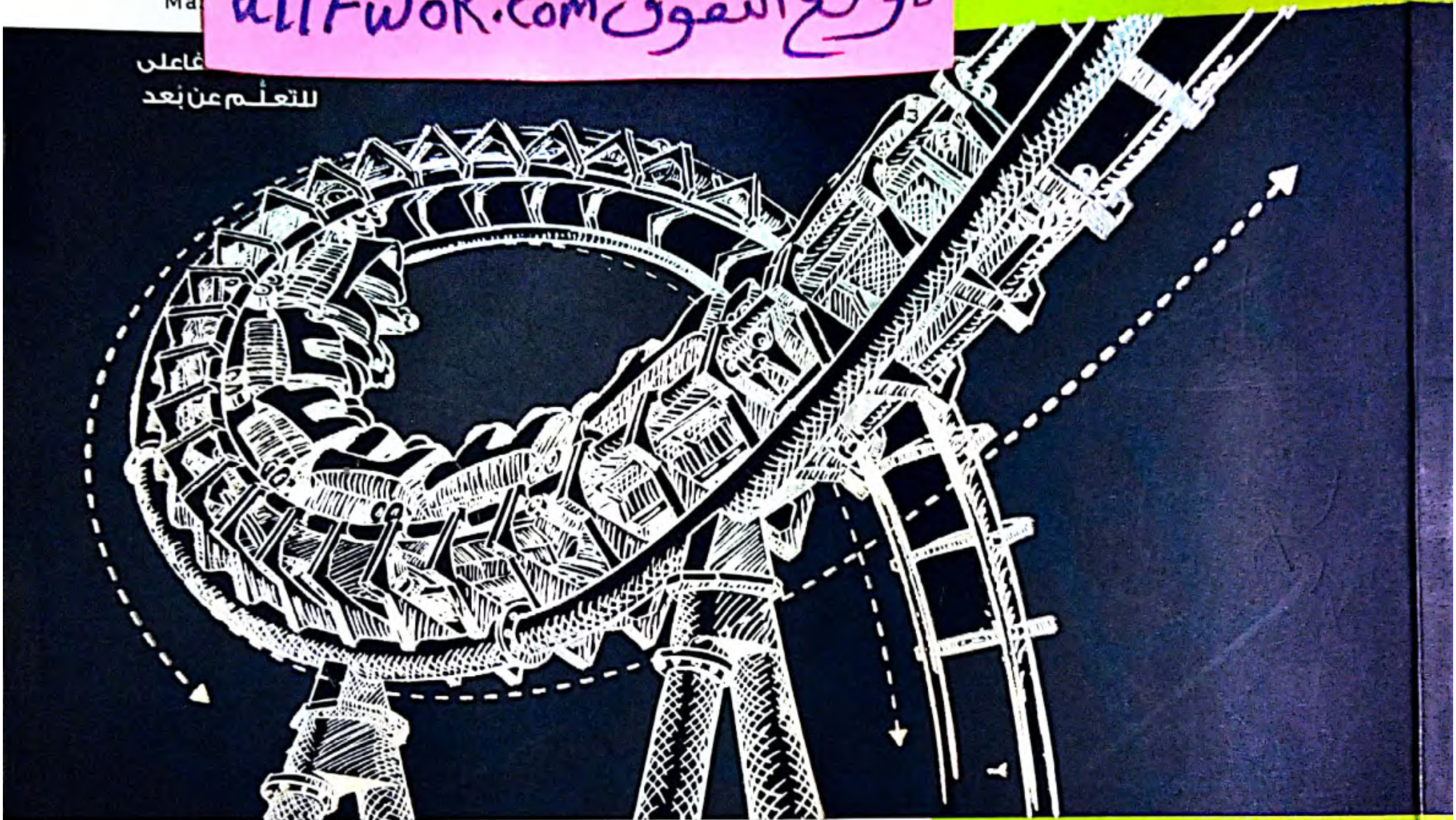
الجزء الخاص
بالشرح و التمارين

الرياضيات
البحتة

امتحانات إلكترونية باستخدام تقنية QR

تفاعلى للتعلم عن بعد



2022

المعاصر

إعداد نخبة من خبراء التعليم

الصف الثانى الثانوى
القسم العلمى
الفصل الدراسى الأول

محتويات الكتاب

أولًا الجبـــر

الوحدة 1 الدوال الحقيقية ورسم المنحنيات

متطلبات قبلية على الوحدة الأولى ١٣
الــدرس الأول الدوال الحقيقية (تحديد المجال والمدى - بحث الاطراد). ١٨
الــدرس الثـانى العمليات على الدوال - تركيب دالتين. ٣٧
الــدرس الثـالث بعض خواص الدوال (الدوال الزوجية والفردية - الدوال الأحادية). ٥٥
الــدرس الرابــع التمثيل البيانى للدوال الأساسية ورسم الدالة مجزأة المجال). ٧٨
الــدرس الخامس التحويلات الهندسية لمنحنيات الدوال الأساسية. ٨٩
الــدرس السادس حل معادلات ومتباينات القيمة المطلقة. ١١٥

الوحدة 2 الأسس واللوغاريتمات وتطبيقات عليها

الــدرس الأول الأسس الكسرية والمعادلات الأسية. ١٤٤
الــدرس الثـانى الدالة الأسية وتطبيقاتها. ١٥٩
الــدرس الثـالث الدالة العكسية. ١٧٧
الــدرس الرابــع الدالة اللوغاريتمية وتمثيلها البيانى. ١٩١
الــدرس الخامس بعض خواص اللوغاريتمات. ٢٠٨

محتويات الكتاب

ثانيًا التفاضل وحساب المثلثات

الوحدة 3 النهايات والاتصال

الــدرس الأول مقدمة فى النهايات ،تقدير النهاية عدديًا وبيانيًا. ٢٣٤
الــدرس الثـانى إيجاد نهاية الدالة جبريًا ٢٤٨
الــدرس الثـالث نظرية (٤) ،القانون. ٢٦٣
الــدرس الرابــع نهاية الدالة عند اللانهاية. ٢٧٥
الــدرس الخامس نهايات الدوال المثلثية ٢٨٨
الدرس السادس بحث وجود نهاية للدالة مجزأة المجال ٣٠١
الدرس السابــع الاتصال ٣١٨

الوحدة 4 حساب المثلثات

• مراجعة على أهم القوانين التى سبقت دراستها. ٣٤٤
الــدرس الأول قانون الجيب ،قاعدة الجيب. ٣٤٦
الــدرس الثـانى قانون جيب التمام ،قاعدة جيب التمام. ٣٦٢
الــدرس الثـالث حل المثلث ٣٧٨

أولاً

الجبـــر

الوحدة 1 الدوال الحقيقية ورسم المنحنيات.

الوحدة 2 الأسس واللوغاريتمات وتطبيقات عليها.

جديد

امتحان تفاعلى إلكترونى على كل درس
باستخدام تقنية QR Code

قم بتحميل ... على هات ... أو ...

... مسح ... الخاصة ... مباشرة

بعد الانتهاء من الامتحان يمكنك معرفة نتيجتك لتقييم نفسك مع عرض تقرير مفصل بالإجابات الصحيحة.

الوحدة 1

الدوال الحقيقية ورسم المنحنيات

دروس الوحدة

متطلبات قبلية على الوحدة الأولى

الدرس 1 الدوال الحقيقية (تحديد المجال والمدى - بحث الاطراد).

الدرس 2 العمليات على الدوال - تركيب دالتين.

الدرس 3 بعض خواص الدوال (الدوال الزوجية والفردية - الدوال الأحادية).

الدرس 4 التمثيل البيانى للدوال الأساسية ورسم الدالة مجزأة المجال.

الدرس 5 التحويلات الهندسية لمنحنيات الدوال الأساسية.

الدرس 6 حل معادلات ومتباينات القيمة المطلقة.

فى نهاية الوحـــدة : تطبيقات حياتية على الوحدة الأولى.

متطلبات قبلية على الوحدة الأولى

• إذا كانت س ، ص مجموعتين غير خاليتين فإن :

الدالة من المجموعة س إلى المجموعة ص هى علاقة تربط كل عنصر من عناصر س بعنصر واحد فقط من عناصر ص وتسمى :

- المجموعة س بـ «مجال الدالة».   - المجموعة ص بـ «المجال المقابل للدالة».

- مجموعة صور عناصر مجموعة المجال س بـ «مدى الدالة»، وهى مجموعة جزئية من المجال المقابل ص

• الدالة د تكتب رياضيًا د : س ⟵ ص ، قاعدة الدالة تكتب ص = د (س)

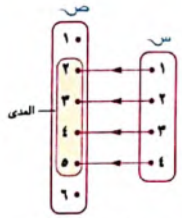
• بيان الدالة = {(س ، ص) ، س ∈ س ، ص ∈ ص ، ص = د (س)}

• يمكن تمثيل الدالة بالمخطط السهمى أو البيانى (الديكارتى)

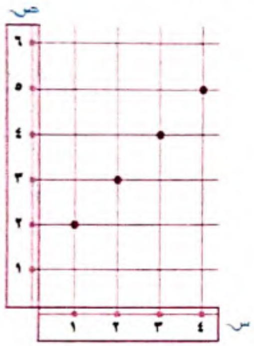
فمثلًا : إذا كانت : س = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤} ، ص = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦}

وكانت الدالة د : س ⟵ ص حيث د (س) = س + ١

فإن بيان الدالة = {(١ ، ٢) ، (٢ ، ٣) ، (٣ ، ٤) ، (٤ ، ٥)}



المخطط السهمى



المخطط البيانى (الديكارتى)

• لاحظ أن :

ليس كل علاقة من س إلى ص دالة ولكن كل الدوال من س إلى ص هى علاقات تحقق أن :

- كل عنصر من س يظهر كمسقط أول مرة واحدة فقط فى الأزواج المرتبة فى بيان العلاقة.

- كل عنصر من س يخرج منه سهم واحد وواحد فقط إلى أحد عناصر ص فى المخطط السهمى.

- كل خط رأسى يمر بنقطة واحدة فقط من النقط التى تمثل العلاقة فى المخطط البيانى.

• الدالة د : د (س) = أ + $أ_1$ س + $أ_2$ $س^2$ + $أ_3$ $س^3$ + ... + $أ_ن$ $س^ن$

حيث أ ، $أ_1$ ، $أ_2$ ، $أ_3$ ، ... ، $أ_ن$ ثوابت ، $أ_ن$ ∈ ح - {٠} ، ن ∈ ط تسمى

كثيرة حدود من الدرجة ن وكل من مجالها والمجال المقابل هو ح ما لم يذكر خلاف ذلك.

• إذا كانت د (س) = أ حيث أ ≠ ٠ فإن الدالة د تسمى دالة كثيرة حدود ثابتة

وإذا كانت د (س) = صفر فإن الدالة د تسمى دالة صفرية ويمثلها بيانيًا محور السينات.

• تسمى الدالة كثيرة الحدود وفقًا لدرجة المقدار الجبرى الممثل لقاعدتها.

• الدالة كثيرة الحدود من الدرجة الأولى تسمى دالة خطية ومن الدرجة الثانية تسمى

دالة تربيعية ومن الدرجة الثالثة تسمى دالة تكعيبية وهكذا.

• مجموعة أصفار الدالة كثيرة الحدود د هى مجموعة قيم س التى تجعل د (س) = صفر وهى تساوى مجموعة

الإحداثيات السينية لنقط تقاطع الشكل البيانى للدالة مع محور السينات.

• تتساوى الدالتان كثيرتا الحدود د ، ر فى مجالها المشترك إذا كان :

د (س) = ر (س) أى إذا كان لهما نفس الدرجة ومعاملات قوى س المتناظرة فيهما متساوية.

• الدالة د : ح ← ح ، د (س) = أ $س^ن$ حيث أ ∈ $ح^*$ ، ن ∈ $ص_+$ تسمى دالة قوى لذلك عند جمع أو

طرح دوال قوى مع ثوابت نحصل على دالة كثيرة حدود.

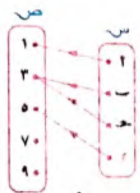
مثال ❶

بين مع ذكر السبب أى العلاقات المبينة بالمخططات السهمية الآتية يمثل دالة وأيها لا يمثل دالة وإذا كانت دالة اذكر

المجال والمدى :

$ع_1$

$ع_2$


$ع_3$

الحل

• $ع_1$ لا تمثل دالة لأن العنصر ب ∈ س لم يخرج منه أى سهم

• $ع_2$ لا تمثل دالة لأن العنصر أ ∈ س خرج منه سهمان

• $ع_3$ تمثل دالة لأن كل عنصر من س خرج منه سهم واحد فقط إلى أحد عناصر ص

، مجال الدالة = {أ ، ب ، حـ ، ء} ، مدى الدالة = {١ ، ٣ ، ٥}

مثال ❷

حدد قيم أ ، ب ، حـ التى تجعل د (س) = ر (س) حيث :

د (س) = (أ + ب) $س^2$ - ٣ س - ٤ ، ر (س) = $س^2$ + (أ + حـ) س + ب

الحل

∵ د (س) ، ر (س) لهما نفس الدرجة (الثانية)

∴ د (س) = ر (س) عندما تتساوى معاملات قوى س المتناظرة

∴ أ + ب = ١ (١) ، (أ + حـ) = -٣ (٢) ، ب = -٤

، بالتعويض عن قيمة ب فى (١) ∴ أ - ٤ = ١ ∴ أ = ٥

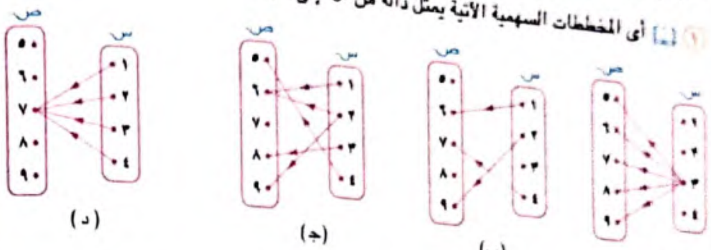
وبالتعويض عن قيمة أ فى (٢) ∴ ٥ + حـ = -٣ ∴ حـ = -٨

تماريـن على المتطلبات القبلية

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) أى المخططات السهمية الآتية يمثل دالة من س إلى ص ؟



(أ) (ب) (جـ) (د)

(٢) العلاقة المبينة بمجموعة الأزواج المرتبة والتى لا تمثل دالة هى ....

(أ) {(١ ، ٣) ، (٣ ، ٥) ، (٥ ، ٧) ، (٧ ، ٩)}

(ب) {(٢ ، ٣) ، (٣ ، ٤) ، (٢ ، ١) ، (٣ ، ٥)}

(جـ) {(٠ ، ٣) ، (١ ، ٣) ، (٢ ، ٣) ، (٣ ، ٣)}

(د) {(-٣ ، ٥) ، (-١ ، ٥) ، (٠ ، ٥) ، (٢ ، ٥)}

(٣) إذا كانت د : ح ← ح وكانت د تربط العدد بنصف مربعه مضافًا إليه ٣

فإن : د (٢) = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ١ (جـ) ٣ (د) ٥

(٤) إذا كانت ط هى مجموعة الأعداد الطبيعية أى مما يأتى يمثل دالة من ط ← ط ؟

(أ) د (س) = $\frac{٢ س}{٣}$ (ب) ر (س) = ١ - س

(جـ) هـ (س) = ٢ س + ٢ (د) ك (س) = $\frac{١}{س - ٢}$

(٥) إذا كانت د : {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥} ← ح حيث د (س + ٢) = ٣ س + ١

فإن : د (٣) = ...

(أ) ١٠ (ب) ٩ (جـ) ٤ (د) ١

(٦) مجال الدالة د حيث د (س) = $\frac{س^{٢} - ٨}{٤}$ هو ....

(أ) ح (ب) ح - {٨} (جـ) ح - {٢} (د) ح - {٤}

(٧) إذا كانت د : ح* ← ح ، د (س) = $\frac{س^{٢} + ١}{س}$ فإن مجال الدالة هو ....

(أ) ح (ب) ح - {٠} (جـ) ح* (د) ح - {-١}

ثانيا الأسئلة المقالية

١ إذا كانت د ، ر كثيرتى حدود حيث د (س) = (أ س + ٥)^{٢} ،

ر (س) = ٩ س^{٢} + ٣٠ س + حـ - ٤ وكانت د (س) = ر (س)

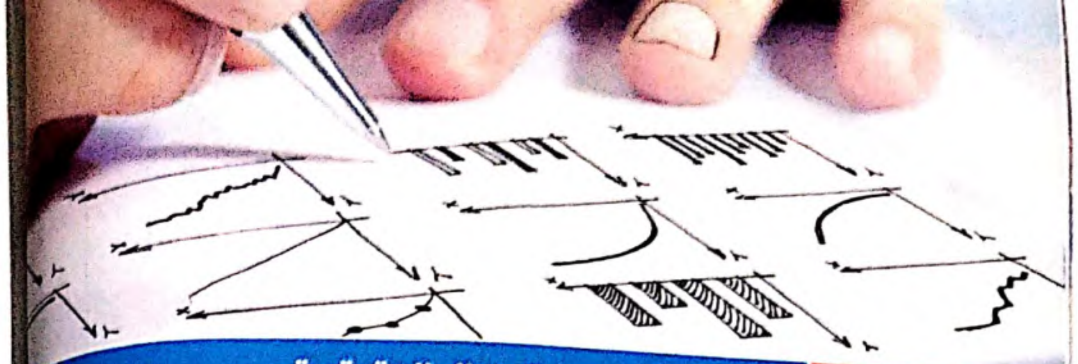
أوجد قيمتى : أ ، حـ ٢٠ ، ٢٩ ،

٢ حدد قيم أ ، ب ، حـ التى تجعل د (س) = ر (س) حيث :

(١) د (س) = (أ + ب) س^{٣} + ٣ س - ٢ ، ر (س) = ٥ س^{٣} + (أ + حـ) س + ب

(٢) د (س) = (أ + ب) س^{٢} - ٢ ، ر (س) = س^{٢} + (أ + حـ) س + ب

(٣) د (س) = (أ + ٢ ب) س^{٣} - حـ س + ٤ ، ر (س) = ٧ س^{٣} + ٥ س + (أ - ب)



الدرس 1 الدوال الحقيقية

(تحديد المجال والمدى - بحث الاطراد)

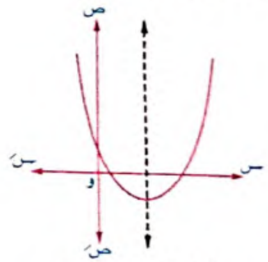
الدالة الحقيقية

الدالة د : س ⟵ ص تسمى دالة حقيقية إذا كان كل من المجال (س) والمجال المقابل (ص) هو مجموعة الأعداد الحقيقية أو مجموعة جزئية فعلية منها.

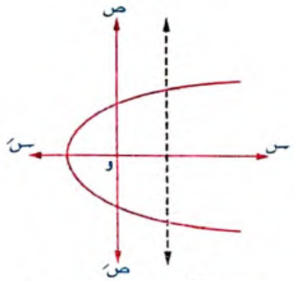
• تحديد كون العلاقة من س ⟵ ص دالة أم لا :

١ جبريًا : العلاقة تكون دالة إذا كان كل قيمة للمتغير س ∈ س يناظرها قيمة واحدة فقط للمتغير ص ∈ ص

٢ بيانيًا (اختبار الخط الرأسى) : العلاقة لا تمثل دالة إذا وجد خط مستقيم رأسى (يوازى محور الصادات) يقطع الشكل البيانى فى أكثر من نقطة :



دالة من س ⟵ ص



ليست دالة من س ⟵ ص

مثال ١

بين أيًا من العلاقتين الآتيتين دالة وأيهما ليست دالة على ح مع ذكر السبب :

١ ص = $س^2$ + ٣

٢ $ص^2$ = $س^2$ + ٩

الحل

١ العلاقة ص = $س^2$ + ٣ دالة

لأن كل قيمة حقيقية للمتغير س يناظرها قيمة وحيدة فقط للمتغير ص

فمثلًا : عند س = ٣ ∴ ص = ١٢

، وعند س = −٢ ∴ ص = ٧ ، .... وهكذا

٢ العلاقة $ص^2$ = $س^2$ + ٩ ليست دالة

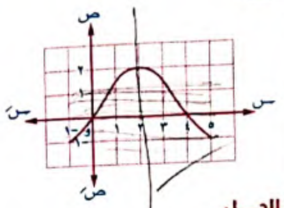
لأنه توجد على الأقل قيمة حقيقية للمتغير س يناظرها قيمتان مختلفتان للمتغير ص

فمثلًا : عند س = ٤ ∴ $ص^2$ = ٢٥ ∴ ص = ± ٥

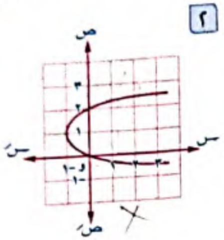
مثال ٢

بين أيًا من الأشكال البيانية الآتية يمثل دالة على ح وأيها لا يمثل دالة مع ذكر السبب :

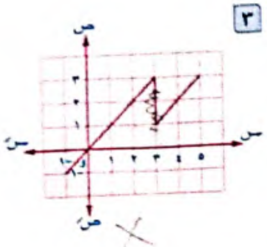
١



٢



٣



الحل

١ يمثل دالة لأن كل خط رأسى يقطع المنحنى فى نقطة واحدة على الأكثر.

٢ لا يمثل دالة لأنه يوجد خط رأسى يقطع المنحنى فى أكثر من نقطة واحدة.

٣ لا يمثل دالة لأنه يوجد خط رأسى يمر بالنقطة (٣ ، ٠) ويقطع المنحنى فى أكثر من نقطة واحدة.

ملاحظتان

١ العلاقة ص = ٤ (تمثل بخط مستقيم أفقى يوازى محور السينات) تعبر عن دالة من س إلى ص لأن كل عنصر من س يرتبط بعنصر واحد فقط من ص

٢ العلاقة س = ٤ (تمثل بخط مستقيم رأسى يوازى محور الصادات) لا تعبر عن دالة من س إلى ص لأن العنصر س = ٤ ارتبط بعدد لانهائى من عناصر ص

تحديد مجال الدوال الحقيقية

يتعين مجال الدالة من قاعدتها أو من الشكل البيانى لها.

أولاً تعيين مجال الدالة إذا علمت قاعدتها

١ الدالة كثيرة الحدود

$د : د(س) = أ_٠ + أ_١ س + أ_٢ س^٢ + ... + أ_ن س^ن$ حيث : $أ_٠ ، أ_١ ، أ_٢ ، .... ، أ_ن$ ثوابت حقيقية

، $أ_ن \in ح - \{٠\}$ كثيرة حدود من الدرجة ن

فإن مجال الدالة كثيرة الحدود يساوى ح ما لم تكن معرفة على مجموعة جزئية منها.

فمثلاً : $د : د(س) = ٣$ كثيرة حدود ثابتة مجالها = ح

، $د : د(س) = ٢ س + ١ ، س \leq ١$

كثيرة حدود من الدرجة الأولى مجالها = $]-\infty ، ١]$

، $د : د(س) = س^٢ - ٤ س + ٣$ كثيرة حدود من الدرجة الثانية مجالها = ح

٢ الدالة الكسرية

إذا كانت د دالة كسرية حيث $د(س) = \frac{هـ(س)}{ى(س)}$ ، هـ ، ى كثيرتى حدود

فإن : مجال الدالة د هو ح - مجموعة أصفار المقام.

مثال ٣

عين مجال كل من الدوال الكسرية المعرفة بالقواعد الآتية :

١ $د(س) = \frac{١}{س}$

٢ $د(س) = \frac{٢}{س - ٢}$

٣ $د(س) = \frac{س - ١}{٢ س^٢ + ٥ س}$

٤ $د(س) = \frac{س - ٣}{س^٢ - ٥ س + ٦}$

٥ $د(س) = \frac{س + ١}{س^٢ - ٤ س + ٤}$

٦ $د(س) = \frac{س}{س^٢ + ٢٥}$

الحل

١ المجال = $ح - \{٠\}$

٢ المجال = $ح - \{٢\}$

٣ بوضع $٢ س^٢ + ٥ س = ٠$

$\therefore س (٢ س + ٥) = ٠$

$\therefore س = ٠$ أ، $س = \frac{-٥}{٢}$

$\therefore$ المجال = $ح - \{٠ ، \frac{-٥}{٢}\}$

٤ بوضع $س^٢ - ٥ س + ٦ = ٠$

$\therefore (س - ٢)(س - ٣) = ٠$

$\therefore س = ٢$ أ، $س = ٣$

$\therefore$ المجال = $ح - \{٢ ، ٣\}$

٥ بوضع $س^٢ - ٤ س + ٤ = ٠$

$\therefore (س - ٢)^٢ = ٠$

$\therefore س = ٢$

$\therefore$ المجال = $ح - \{٢\}$

٦ بوضع $س^٢ + ٢٥ = ٠$ وهذه المعادلة ليس لها حل فى ح أى لا يوجد أصفار حقيقية للمقام

$\therefore$ المجال = ح

٣ دالة الجذر النونى

إذا كانت $د(س) = \sqrt[ن]{هـ(س)}$ حيث $ن \in ص^+ ، ن > ١$ ، هـ(س) كثيرة حدود

أولاً : عندما ن عدد فردى فإن مجال الدالة د هو ح

ثانيًا : عندما ن عدد زوجى فإن مجال الدالة د هو مجموعة قيم س التى تحقق $هـ(س) \geq ٠$

حيث ن تسمى دليل الجذر.

مثال ٤

عين مجال كل من الدوال الحقيقية المعرفة بالقواعد الآتية :

١ $د(س) = \sqrt{س + ٢}$

٢ $د(س) = \sqrt{س^٢ + ٥}$

٣ $د(س) = \sqrt{-٢ س + ٣}$

٤ $د(س) = \sqrt[٣]{٩ - س^٢}$

٥ $د(س) = \sqrt{٤ س^٢ - ١٢ س + ٩}$

٦ $د(س) = \sqrt{س^٢ - ٤}$

٧ $د(س) = \frac{١}{\sqrt{٤ + ٣ س - س^٢}}$

الحل

١ $\because$ دليل الجذر عدد زوجى $\therefore$ الدالة معرفة بشرط $س + ٢ \geq ٠$

$\therefore س \geq -٢$ $\therefore$ المجال = $[-٢ ، \infty[$

٢ $\because$ دليل الجذر عدد زوجى

$\therefore$ الدالة معرفة بشرط $س^٢ + ٥ \geq ٠$ وهو متحقق لكل قيم س الحقيقية

$\therefore$ المجال = ح

٣ $\because$ دليل الجذر عدد زوجى $\therefore -٢ س + ٣ \geq ٠$

$\therefore س \leq \frac{٣}{٢}$ $\therefore$ المجال = $]-\infty ، \frac{٣}{٢}]$

٤ $\because$ دليل الجذر عدد فردى $\therefore$ المجال = ح

٥ $\because$ دليل الجذر عدد زوجى.

$\therefore$ الدالة معرفة بشرط أن : $٤ س^٢ - ١٢ س + ٩ \geq ٠$

$\therefore (٢ س - ٣)^٢ \geq ٠$

، $\because$ مجموعة حل المتباينة = ح $\therefore$ مجال الدالة د = ح

٦ ∵ دليل الجذر عدد زوجي

∴ الدالة معرفة بشرط أن $س^٢ - ٤ \geq ٠$

∴ (س − ٢) (س + ٢) ≥ ٠

، ∵ مجموعة حل المتباينة = ح −]−٢ ، ٢[

∴ مجال الدالة د = ح −]−٢ ، ٢[

٧ ∵ الدالة تكون معرفة بشرط أن

٤ + ٣ س − $س^٢$ > ٠

∴ $س^٢$ − ٣ س − ٤ < ٠

∴ (س − ٤) (س + ١) < ٠

، ∵ مجموعة حل المتباينة =]−١ ، ٤[

∴ مجال الدالة د =]−١ ، ٤[

تذكر أن

(حل متباينات الدرجة الثانية فى متغير واحد)

إذا كان ل ، م حيث ل < م هما جذران حقيقيان للمعادلة

أ $س^٢$ + ب س + حـ = ٠ ، أ > ٠

فإن مجموعة الحل فى ح للمتباينة

١ أ $س^٢$ + ب س + حـ ≥ ٠

هى ح −]ل ، م[

٢ أ $س^٢$ + ب س + حـ > ٠

هى ح − [ل ، م]

٣ أ $س^٢$ + ب س + حـ ≤ ٠

هى [ل ، م]

٤ أ $س^٢$ + ب س + حـ < ٠

هى]ل ، م[

٤ الدالة مجزأة المجال «ذات المقاطع»

هى دالة معرفة بقواعد مختلفة فى فترات مختلفة من مجالها ومجال هذه الدالة يساوى اتحاد الفترات المعرفة فيها قواعدها.

مثال ٥

عين مجال كل من الدالتين المعرفتين بالقاعدتين الآتيتين :

١ د (س) = { ٢ − س ، س < ٠ ؛ س − ٢ ، س > ٠ }

٢ د (س) = { $س^٢$ ، −٢ ≤ س < ٠ ؛ س ، ٠ ≤ س ≤ ١ ؛ $\frac{١}{س}$ ، س > ١ }

الحل

١ الدالة د معرفة على فترتين كما يلى :

معرفة عندما س ∈]− ∞ ، ٠[

، معرفة عندما س ∈]٠ ، ∞[

∴ مجال د =]− ∞ ، ٠[∪]٠ ، ∞[= ح − {٠}

٢ الدالة د معرفة على ثلاث فترات كما يلى :

معرفة عندما س ∈ [−٢ ، ٠[

، معرفة عندما س ∈ [٠ ، ١]

، معرفة عندما س ∈]١ ، ∞[

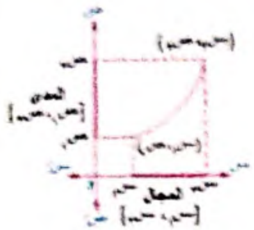
∴ مجال د = [−٢ ، ٠[∪ [٠ ، ١] ∪]١ ، ∞[= [−٢ ، ∞[

ثانيًا تعيين مجال ومدى الدالة من الشكل البيانى لها

من الشكل البيانى للدالة يمكن استنتاج مجال ومدى الدالة فيكون

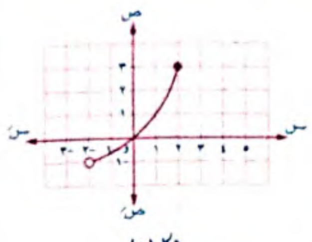
١ مجال الدالة هو مجموعة الإحداثيات السينية لجميع النقط التى تنتمى إلى منحنى الدالة.

٢ مدى الدالة هو مجموعة الإحداثيات الصادية لجميع النقط التى تنتمى إلى منحنى الدالة.

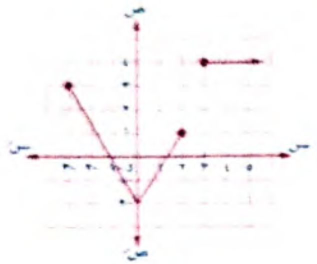


مثال ٦

عين مجال ومدى كل من الدالتين الممثلتين بالشكلين الآتيين :



شكل (١)



شكل (٢)

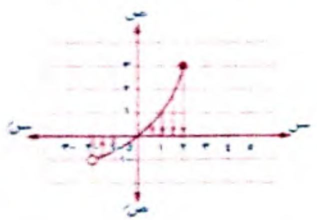
الحل

فى شكل (١) :

• الإحداثيات السينية لجميع نقط منحنى الدالة

هى الفترة]−٢ ، ٢]

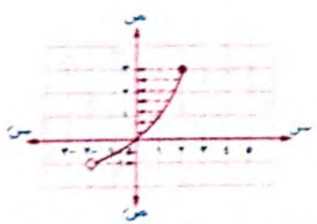
∴ المجال =]−٢ ، ٢]



• الإحداثيات الصادية لجميع نقط منحنى الدالة

هى الفترة]−١ ، ٢]

∴ المدى =]−١ ، ٢]



لاحظ أن

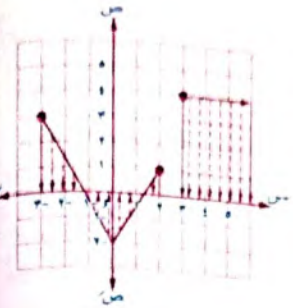
• الدائرة المفرغة عند النقطة (−٢ ، −١) توضح أن النقطة ∌ بيان الدالة وبالتالى −٢ ∌ مجال الدالة ، −١ ∌ مدى الدالة

• الدائرة المغلقة عند النقطة (٢ ، ٢) توضح أن النقطة ∈ بيان الدالة وبالتالى ٢ ∈ مجال الدالة ، ٢ ∈ مدى الدالة

في شكل (٢) :

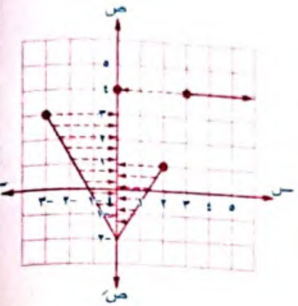
• الإحداثيات السينية لجميع نقط منحنى الدالة هي الفترتين [-٣ ، ٢] ، [٣ ، ∞[

∴ المجال = [-٣ ، ٢] ∪ [٣ ، ∞[



• ∵ الإحداثيات الصادية لجميع نقط الشعاع الأفقي هي ص = ٤ ، الإحداثيات الصادية لجزء المنحنى الآخر هي الفترة [-٢ ، ٣]

∴ المدى = [-٢ ، ٣] ∪ {٤}



تعيين اطراد الدالة من الشكل البياني لها

• يقصد ببحث اطراد دالة ما تحديد الفترات التي تكون فيها الدالة تزايدية والفترات التي تكون فيها الدالة تناقصية والفترات التي تكون فيها الدالة ثابتة.

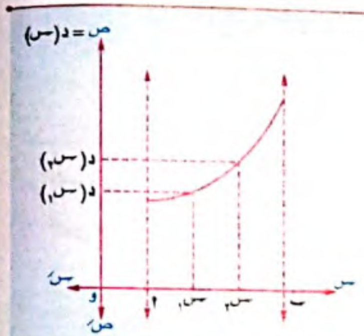
تعريف ① تزايد الدالة

يقال للدالة د إنها تزايدية في الفترة]أ ، ب[

إذا كان :

$س_2 > س_1 \Leftarrow د(س_2) > د(س_1)$

لكل $س_1$ ، $س_2$ ∈]أ ، ب[



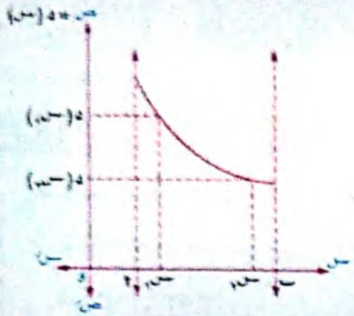
تعريف ② تناقص الدالة

يقال للدالة د إنها تناقصية في الفترة]أ ، ب[

إذا كان :

$س_2 > س_1 \Leftarrow د(س_2) < د(س_1)$

لكل $س_1$ ، $س_2$ ∈]أ ، ب[



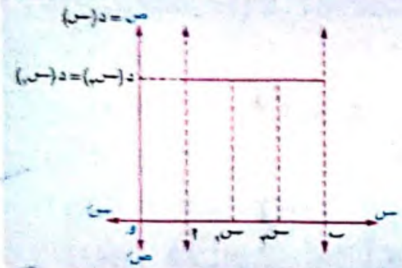
تعريف ③ ثبوت الدالة

يقال للدالة د إنها ثابتة في الفترة]أ ، ب[

إذا كان :

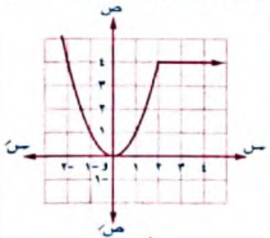
$س_2 > س_1 \Leftarrow د(س_2) = د(س_1)$

لكل $س_1$ ، $س_2$ ∈]أ ، ب[

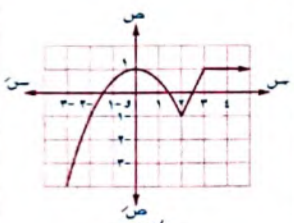


مثال ٧

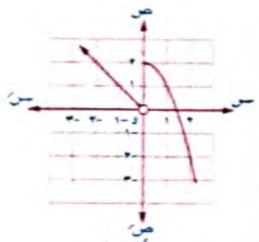
ابحث اطراد كل من الدوال الممثلة بالأشكال الآتية :



شكل (١)



شكل (٢)



شكل (٣)

الحل

شكل (١) : الدالة تناقصية في الفترة]-∞ ، ٠[، تزايدية في الفترة]٠ ، ٢[، ثابتة في الفترة]٢ ، ∞[

شكل (٢) : الدالة تزايدية في الفترة]-∞ ، ٠[، تناقصية في الفترة]٠ ، ٢[

، تزايدية في الفترة]٢ ، ٣[، ثابتة في الفترة]٣ ، ∞[

شكل (٣) : الدالة تناقصية في كل من الفترتين]-∞ ، ٠[،]٠ ، ∞[

• فهم • تطبيق • مستويات عليا
من أسئلة الكتاب المدرسى

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) جميع العلاقات الآتية تكون فيها ص دالة فى س ما عدا العلاقة ....

(أ) ص = ٣ س + ١ (ب) ص = س^٢ – ٤
(جـ) س = ص^٢ – ٢ (د) ص = جا س

(٢) فى جميع العلاقات التالية تكون ص دالة ماعدا ....

(أ) ص = جتا س (ب) ص = ٢
(جـ) ص = س^٢ – ١ (د) ص^٢ = س^٢ + ١

(٣) إذا كانت : د (√س) = س^٢ فإن : د (٢) = ...

(أ) √٢ (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) ١٦

(٤) إذا كانت د : ع ← ع حيث د (س) = (أ + ١) س + ب – ٢ وكانت :
د (س) تربط كل عدد حقيقى بنفسه فإن : (أ ، ب) = ...

(أ) (١ ، ٣) (ب) (٠ ، ٣) (جـ) (٠ ، ٢) (د) (٠ ، ٠)

(٥) الدالة د : د (س) = ٥ مجالها هو ....

(أ) ع (ب) ع^+ (جـ) {٥} (د) {٠ ، ٥}

(٦) مجال الدالة د : د (س) = (٢ س + ١)/(س – ٢) هو ....

(أ) ع (ب) ع – {–١/٢} (جـ) ع – {–١/٢ ، ٢} (د) ع – {٢}

(٧) مجال الدالة د : د (س) = (س + ٥)/((س + ٥) (س – ٥)) هو ....

(أ) ع (ب) {٥ ، –٥} (جـ) ع – {٥} (د) ع – {٥ ، –٥}

(٨) مجال الدالة د : د (س) = (س^٢ + ١)/(س^٢ + ٤ س) هو ....

(أ) ع – {١ ، –١} (ب) ع – {٠ ، –٤} (جـ) ع (د) ع – {٠ ، ٤}

(٩) مجال الدالة د حيث د (س) = (٥ + ٢ س)/(س^٢ + س + ١) هو ....

(أ) ع (ب) ع – {٥} (جـ) ع – {٢} (د) ع – {–٢ ، –٥}

(١٠) مجال الدالة د حيث د (س) = ٧/(س^٢ – س) هو ....

(أ) ع – {٣} (ب) ع – {٧}
(جـ) ع – {٠ ، ١} (د) ع – {٠ ، ١ ، –١}

(١١) مجال الدالة د حيث د : ع^+ ← ع ، د (س) = (س – ١)/(٤ س) هو ....

(أ) ع (ب) ع – {٠} (جـ) ع^+ (د) ع – {١}

(١٢) إذا كان مجال الدالة د : د (س) = ٢/(س^٢ – ٦ س + ك) هو ع – {٣} فإن : ك = ...

(أ) ٣ (ب) ٩ (جـ) ± ٩ (د) ١٨

(١٣) مجال الدالة د : د (س) = √(س – ٣) هو ....

(أ) ع (ب) ع – {٣} (جـ) [٣ ، ∞[(د)]–∞ ، ٣]

(١٤) مجال الدالة د حيث د (س) = √(٤ – س) هو ....

(أ) [٤ ، ∞[(ب)]–∞ ، ٤] (جـ)]٤ ، ∞[(د)]–∞ ، ٤]

(١٥) مجال الدالة د : د (س) = ∛(س – ٥) هو ....

(أ) [٥ ، ∞[(ب)]–∞ ، ٥[(جـ) ع (د) ع^+

(١٦) مجال الدالة د : د (س) = ∛(٩ – س^٢) هو ....

(أ)]–٣ ، ٣[(ب) ع (جـ) ع –]–٣ ، ٣[(د) [–٣ ، ٣]

(١٧) مجال الدالة د : د (س) = √(س + ٣) هو ....

(أ)]–٣ ، ∞[(ب) [–٣ ، ∞[(جـ) {–٣} (د) {٠}

(١٨) مجال الدالة د : د (س) = √(س^٢ + ٩) هو ....

(أ) ع (ب) ع – {–٣ ، ٣} (جـ) ع – [–٣ ، ٣] (د)]–٣ ، ٣[

(١٩) مجال الدالة د : د (س) = ٥/√(س – ٤) هو ....

(أ) [٤ ، ∞[(ب)]٤ ، ∞[(جـ)]–∞ ، ٤] (د)]–∞ ، ٤[

(٢٠) مجال الدالة د : د(س) = $\frac{١}{\sqrt{٩ - س^٢}}$ هو ....

(أ) ح (ب) ح − $[-٣ ، ٣]$ (ج) ح − $\{-٣ ، ٣\}$ (د) $]-٣ ، ٣[$

(٢١) مجال الدالة د حيث د(س) = $\sqrt{س^٢ + ٤}$ هو ....

(أ) ح (ب) ح − $\{٤\}$ (ج) ح − $\{٠\}$ (د) ح − $\{-٢ ، ٢\}$

(٢٢) مجال الدالة د حيث د(س) = $\frac{١}{\sqrt[٣]{س^٢ - ٥س - ٦}}$ هو ....

(أ) ح − $\{٥\}$ (ب) ح − $\{٦\}$ (ج) ح − $\{١ ، -٦\}$ (د) ح − $\{-١ ، ٦\}$

(٢٣) مجال الدالة د : د(س) = $\frac{١}{\sqrt[٣]{س^٢ + ٩س + ٨}}$ هو ....

(أ) ح − $\{-٨ ، -١\}$ (ب) ح − $[-٨ ، -١]$ (ج) $]-٨ ، -١[$ (د) $\{-٨ ، -١\}$

(٢٤) إذا كانت م مساحة سطح دائرة وكان س طول نصف قطر الدائرة وكان م = π س^٢ أى أن المساحة دالة فى س ، فإن مجالها = ...

(أ) ح (ب) ح − $\{٠\}$ (ج) ص$^+$ (د) ح$^+$

(٢٥) إذا كان مجال الدالة د : د(س) = $\frac{١}{\sqrt{س - أ}}$ هو $]-٣ ، \infty[$ فإن : أ = ...

(أ) ٣ (ب) −٣ (ج) ±٣ (د) $\sqrt{٣}$

(٢٦) إذا كان مجال الدالة د : د(س) = $\frac{١}{\sqrt{س^٢ + أ}}$ هو ح − $[-٥ ، ٥]$ فإن : أ = ...

(أ) ٥ (ب) −٢٥ (ج) −٥ (د) ٢٥

(٢٧) إذا كان مجال الدالة د : د(س) = $\frac{١}{\sqrt{س^٢ + أ}}$ هو ح فإن : أ لايمكن أن تساوى ....

(أ) ٥ (ب) $\sqrt{٤}$ (ج) صفر (د) ٩

(٢٨) إذا كانت : د(س) = $\begin{cases} -٤س + ٣ &، س < ٣ \\ -س^٢ &، ٢ \le س \le ٨ \\ ٣س^٢ + ١ &، س > ٨ \end{cases}$ فإن : د(١٠) = ...

(أ) −٣٧ (ب) −١٠٠٠ (ج) ٣٠١ (د) ٤٣

(٢٩) مجال الدالة د حيث د(س) = $\begin{cases} -٢ &، س < ٢ \\ ٣ &، س > ٢ \end{cases}$ هو ....

(أ) ح (ب) ح − $\{٣\}$ (ج) ح − $\{-٢\}$ (د) ح − $\{٢\}$

(٣٠) مجال الدالة د حيث د(س) = $\begin{cases} س &، ٠ \le س \le ١ \\ ٢ - س &، ١ < س \le ٢ \end{cases}$ هو ....

(أ) ح − $\{١\}$ (ب) $[٠ ، ٢]$ (ج) ح − $\{٠ ، ٢\}$ (د) $]٠ ، ٢[$

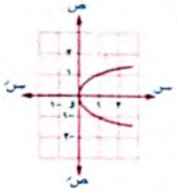
(٣١) مجال الدالة د : د(س) = $\begin{cases} س^٢ + ٢ &، -٢ \le س < ٠ \\ س - ١ &، س > ٠ \end{cases}$ هو ....

(أ) ح (ب) $[-٢ ، ٠[$ (ج) $[-٢ ، \infty[- \{٠\}$ (د) $[-٢ ، \infty[$

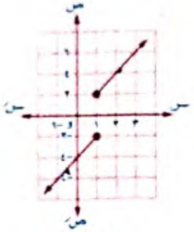
(٣٢) مجال الدالة د : د(س) = $\begin{cases} ٠ &، س \le ٠ \\ ١ &، س > ٢ \end{cases}$ هو ....

(أ) $\{٠ ، ١\}$ (ب) $[٠ ، ٢[$ (ج) ح (د) ح − $]٠ ، ٢]$

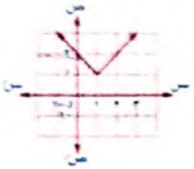
(٣٣) الشكل الذى يمثل دالة فى س من بين الأشكال الآتية هو ....



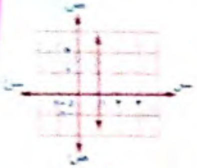
(أ)



(ب)

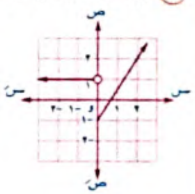


(ج)

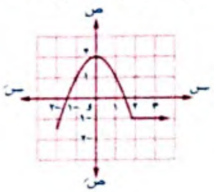


(د)

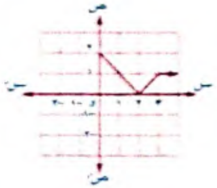
(٣٤) أى الأشكال البيانية الآتية لا يمثل دالة فى س ؟



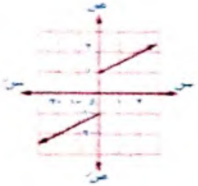
(أ)



(ب)

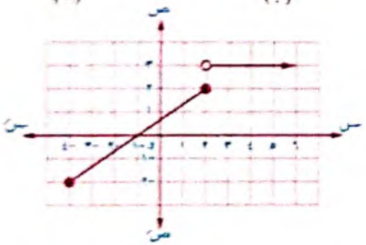


(ج)



(د)

(٣٥) الشكل المقابل يمثل ....



(أ) دالة د : $[-٤ ، ٢] \longrightarrow$ ح

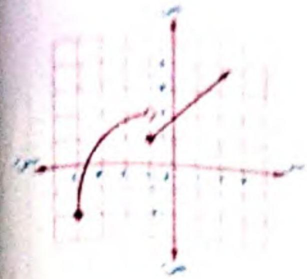
(ب) دالة د : $[-٤ ، \infty[\longrightarrow$ ح

(ج) دالة د : $[-٤ ، ٢] \longrightarrow [-٢ ، ٣]$

(د) علاقة بين س ، ص ولا تمثل دالة.

(٣٦) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د

فإن مجالها هو ....



(أ) ح − {−٤ ، −١}

(ب)]−٤ ، −١[

(جـ)]−٤ ، ∞[

(د)]−٤ ، ∞[− {−١}

(٣٧) الشكل المقابل يمثل دالة في س مجالها ....

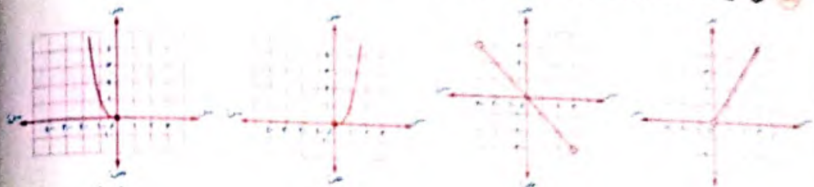
(أ) ح

(ب) ح −]−٢ ، ٢[

(جـ) ح − [−٢ ، ٢]

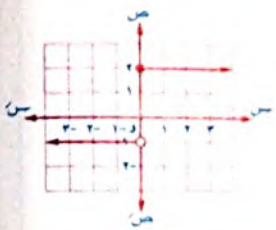
(د) ح − {٠}

(٣٨) أي من الأشكال الآتية تمثل منحنى دالة يكون فيه المدى ≠ المجال ؟



(أ) (ب) (جـ) (د)

(٣٩) مدى الدالة الممثلة بالشكل المقابل هو ....



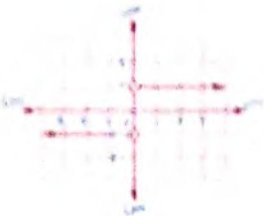
(أ) {−١ ، ٢}

(ب) {٢}

(جـ) {−٣ ، ٣}

(د) {−١}

(٤٠) مدى الدالة الممثلة بالشكل المقابل هو ....



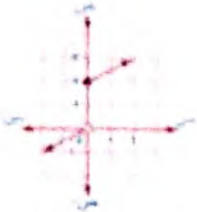
(أ) {١}

(ب) {١ ، −١}

(جـ) {−١}

(د) ح − {٠}

(٤١) الشكل المقابل يمثل دالة في س مداها ....



(أ) ح − [٠ ، ٢]

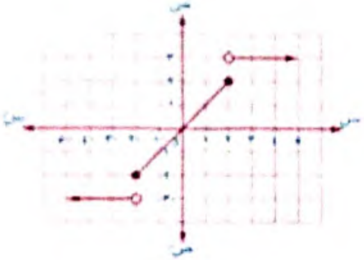
(ب) ح − {٠}

(جـ) ح − [٠ ، ٢[

(د) ح −]٠ ، ٢]

(٤٢) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د

فإن مداها هو ....



(أ) ح

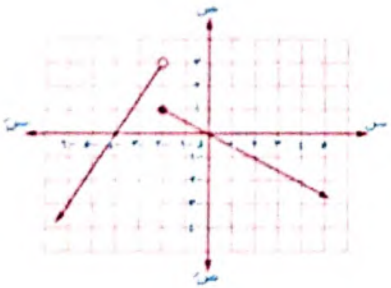
(ب) [−٢ ، ٢]

(جـ) [−٢ ، ٢] ∪ {−٣ ، ٣}

(د)]−٣ ، ٣[

(٤٣) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د

فإن مداها هو ....



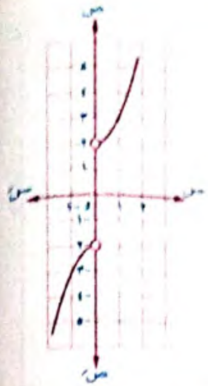
(أ) ح

(ب) ح − {−٢}

(جـ)]−∞ ، ٣[

(د)]−∞ ، ١] ∪ {٣}

(٤٤) فى الشكل المقابل :



أولاً : مدى الدالة هو ....

(أ) ح - {٠}   (ب) ح - [-٢ ، ٢]

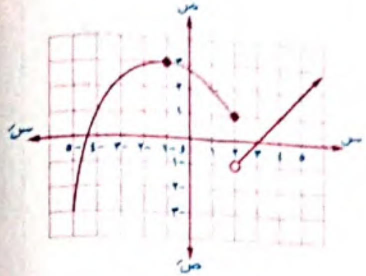
(جـ) ح   (د) [-٢ ، ٢]

ثانيًا : الدالة تكون متزايدة فى ....

(أ)]- ∞ ، ٠[فقط.   (ب)]٠ ، ∞[فقط.

(جـ)]- ∞ ، ٠[،]٠ ، ∞[(د) ح - [-٢ ، ٢]

(٤٥) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د



فإن الدالة تكون تزايدية فى ....

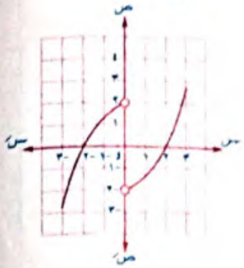
(أ)]- ∞ ، -١[

(ب)]- ∞ ، -١[،]٢ ، ∞[

(جـ)]٢ ، ∞[

(د)]-١ ، ٢[

(٤٦) فى الشكل المقابل :



إذا كان المنحنى المرسوم يمثل الدالة د

أى العبارات الآتية صحيحة ؟

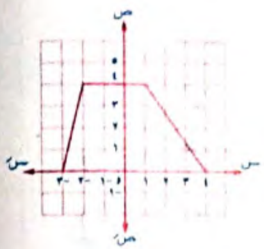
(أ) الدالة تزايدية على مجالها

(ب) الدالة تناقصية فى]- ∞ ، ٠[وتزايدية فى]٠ ، ∞[

(جـ) الدالة متزايدة فى كل من]- ∞ ، ٢[،]-٢ ، ∞[

(د) الدالة تزايدية فى كل من]- ∞ ، ٠[،]٠ ، ∞[

(٤٧) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د



أى العبارات الآتية خطأ ؟

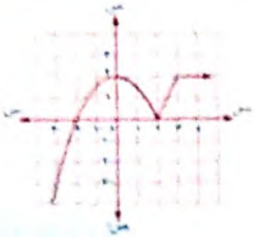
(أ) د ثابتة فى]-٢ ، ١[

(ب) د تناقصية فى]١ ، ٤[

(جـ) د تزايدية فى]-٣ ، -٢[

(د) د ثابتة فى]-٣ ، ٤[

(٤٨) فى الشكل المقابل :



إذا كانت الدالة متناقصة فى]٠ ، أ[وثابتة فى]ب ، ∞[

فإن : أ - ب = ...

(أ) ٥   (ب) ١

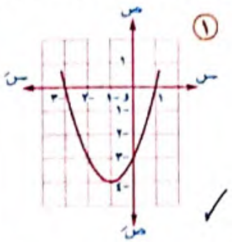
(جـ) -١   (د) ٢

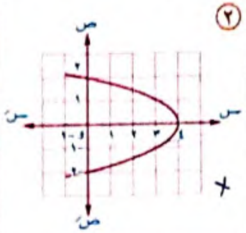
ثانيًا الأسئلة المقالية

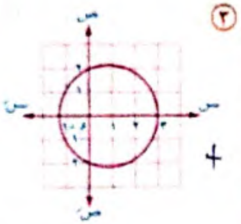
١ إذا كان س ، ص متغيرين حقيقيين فحدد أى علاقة مما يأتى تمثل قاعدة دالة فى س وأيها لا :

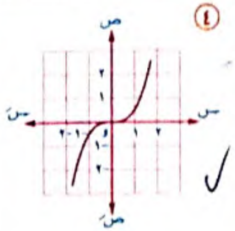
① ص = ٢ س + ٥	② $ص^٢$ = س + ٤
③ ص = $\sqrt{س^٢ + ٤}$	④ $(س - ص)^٢$ = ٥
⑤ $ص^٢ - س^٢$ = ٢	⑥ $ص^٤ = س^٢$ - ٤ س + ٤
⑦ ص = ٢	⑧ س = ٣
⑨ ص = ٣ جاس + جتا ٢ س	⑩ س ص + ص = ٢ س + ٢

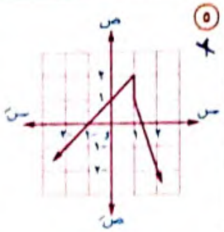
٢ فى كل شكل من الأشكال الآتية بين ما إذا كانت ص تمثل دالة فى س أم لا :

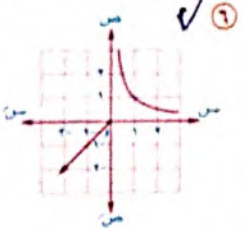
①


②


③


④


⑤


⑥


3 عين مجال كل من الدوال الحقيقية المعرفة بالقواعد الآتية :

① د (س) = $\frac{س + 3}{س^2 - 9}$

② د (س) = $\frac{2س + 3}{س^2 - 2س + 2}$

③ د (س) = $\frac{س^2 - 1}{3س^2 + 12س}$

④ د (س) = $\frac{8}{س^2 - 6س + 9}$

⑤ د (س) = $\frac{س + 3}{2س^2 - س - 2}$

⑥ د (س) = $\frac{س + 1}{س^2 + 1}$

4 عين مجال كل من الدوال الحقيقية المعرفة بالقواعد الآتية :

① د (س) = $\frac{4}{\sqrt{2س - 5}}$

② د (س) = $\frac{3}{\sqrt{س - 2}}$

③ د (س) = $\frac{2}{\sqrt{1 - س}}$

④ د (س) = $\sqrt{س^2 - 16}$

⑤ د (س) = $\sqrt{4 - س^2}$

⑥ د (س) = $\frac{5}{\sqrt{9 - س^2}}$

⑦ د (س) = $\sqrt{س^2 + 2س + 5}$

⑧ د (س) = $\frac{1}{\sqrt{س^2 - 4س + 4}}$

⑨ د (س) = $\frac{5}{\sqrt{س} - 1}$

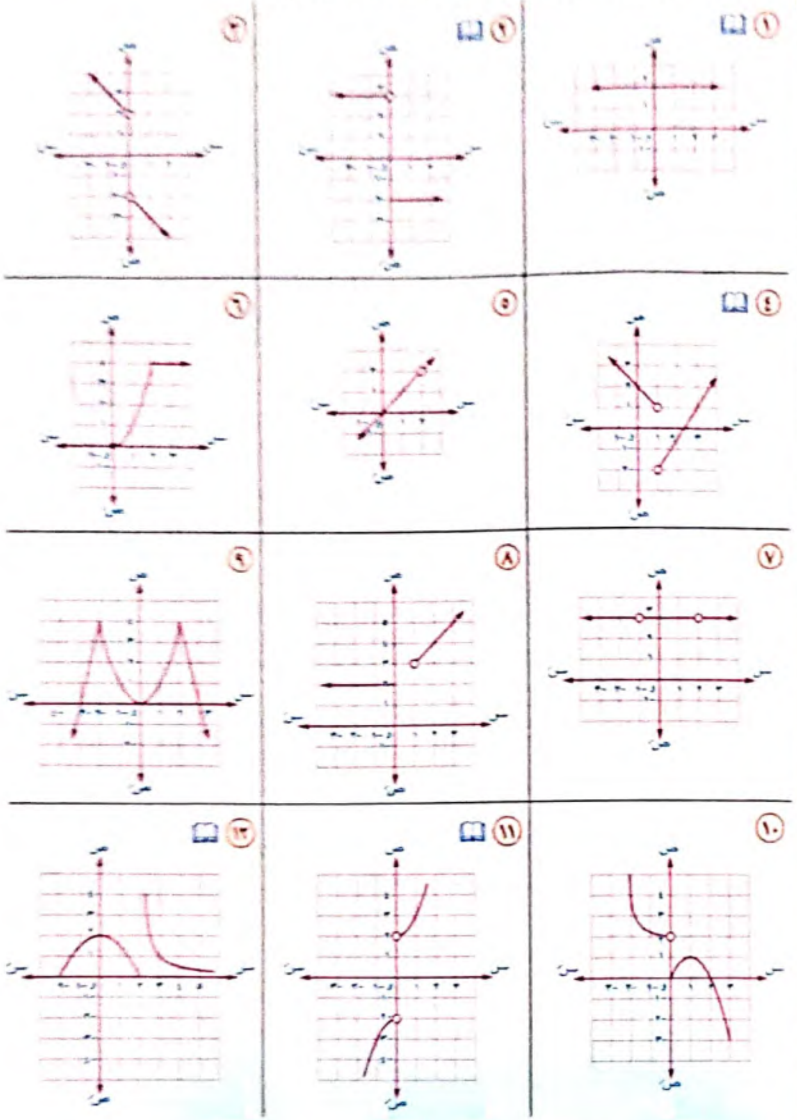
5 عين مجال كل من الدوال الحقيقية المعرفة بالقواعد الآتية :

① د (س) = $\begin{cases} -3 & ، س < 3 \\ 5 - س & ، س \geq 3 \end{cases}$

② د (س) = $\begin{cases} س^2 - 1 & ، س \leq 2 \\ -5 & ، 2 < س < 4 \end{cases}$

③ د (س) = $\begin{cases} 3س & ، س \in [0 ، 2] \\ 6 & ، س \in]2 ، 4[\\ س + 2 & ، س \in [4 ، 6] \end{cases}$

1 عين مجال ومدى ثم ابحث اطراد كل من الدوال الممثلة بالأشكال الآتية :



ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

❖ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت العلاقة بين مجموع قياسات زوايا المضلع الداخلة (ص) ، عدد أضلاع المضلع (س) هى ص = π (س − ٢) فإن مجال الدالة ص = ...

(أ) $ح^+$ (ب) ح − {٢} (جـ) $ص^+$ (د) $ص^+$ − {١ ، ٢}

(٢) مجال الدالة د : د (س) = $\frac{س}{\sqrt{س} - ٢}$ هو ....

(أ) ح (ب) ح − {٢} (جـ) ح − {٠ ، ٢} (د) ح − {٨}

(٣) مجال الدالة د : د (س) = $\frac{س}{\sqrt{٢س} - س}$ هو ....

(أ)]٠ ، ∞[(ب)]−∞ ، ٠] (جـ) [٠ ، ∞[− {١} (د)]٠ ، ∞[− {٢}

(٤) مجال الدالة د : د (س) = $\frac{٥}{\sqrt{س - ١} - ٢}$ هو ....

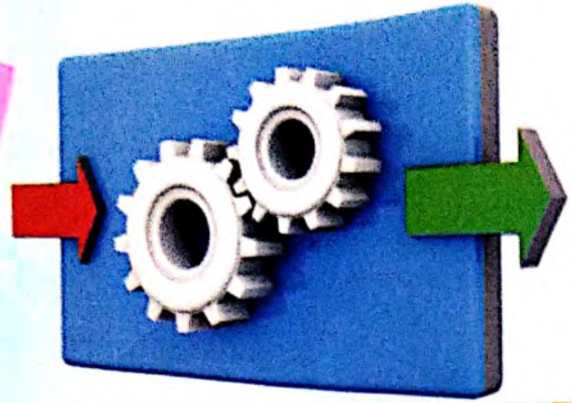
(أ) [١ ، ∞[(ب) [١ ، ∞[− {٢} (جـ) [١ ، ∞[− {١٠} (د) [−٣ ، ∞[

(٥) مجال الدالة د : د (س) = $\frac{٧}{\sqrt{س - ١} + ٢}$ هو ....

(أ) [١ ، ∞[(ب) [١ ، ∞[− {−٣} (جـ) [١ ، ∞[− {١٠} (د) [٣ ، ∞[

(٦) مجال الدالة د : د (س) = $\sqrt{٦س - ٩ - س^٢}$ هو ....

(أ) ح (ب) ح − {٣} (جـ) [٣ ، ∞[(د) {٣}



الدرس 2 العمليات على الدوال - تركيب دالتين

* إذا كانت $د_١$ ، $د_٢$ دالتين مجالاهما $م_١$ ، $م_٢$ فإن :

١ ($د_١ ± د_٢$) (س) = $د_١$ (س) ± $د_٢$ (س) ، مجال ($د_١ ± د_٢$) هو $م_١ \cap م_٢$

٢ ($د_١ × د_٢$) (س) = $د_١$ (س) × $د_٢$ (س) ، مجال ($د_١ × د_٢$) هو $م_١ \cap م_٢$

٣ $\left(\frac{د_١}{د_٢}\right)$ (س) = $\frac{د_١ (س)}{د_٢ (س)}$ حيث $د_٢$ (س) ≠ ٠ .

، مجال $\left(\frac{د_١}{د_٢}\right)$ هو ($م_١ \cap م_٢$) − ص ($د_٢$) حيث ص ($د_٢$) مجموعة أصفار $د_٢$

ونلاحظ أنه فى جميع العمليات على الدوال يكون مجال الدالة الناتجة يساوى تقاطع مجالى الدالتين مع استثناء القيم التى تجعل المقام يساوى الصفر فى عملية القسمة.

مثال ١

إذا كانت د : $ح^+$ ⟵ ح حيث د (س) = ٢ $س^٢$ − ٧ س + ٥

، ر :]−∞ ، ٤] ⟵ ح حيث ر (س) = ٢ س − ٥ أوجد :

١ (د + ر) (س) ٢ (د − ر) (س) ٣ (د × ر) (س) ٤ $\left(\frac{د}{ر}\right)$ (س)

وعين مجال كل منهم ثم احسب قيمة كل من :

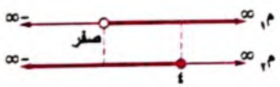
(د + ر) (٣) ، (د − ر) (٠) ، (د × ر) (−٣) ، $\left(\frac{د}{ر}\right)$ (١)

الحل

مجال د = $م_١$ = $ح^+$ =]٠ ، ∞[

، مجال ر = $م_٢$ =]−∞ ، ٤]

∴ المجال المشترك للدالتين = $م_١ \cap م_٢$ = $ح^+ \cap$]−∞ ، ٤] =]٠ ، ٤]



١ $(د + ر)(س) = (٢س^٢ - ٧س + ٥) + (٢س - ٥) = ٢س^٢ - ٥س$

، المجال $=]٠ ، ٤]$

٢ $(د - ر)(س) = (٢س^٢ - ٧س + ٥) - (٢س - ٥) = ٢س^٢ - ٩س + ١٠$

، المجال $=]٠ ، ٤]$

٣ $(د \times ر)(س) = (٢س^٢ - ٧س + ٥)(٢س - ٥)$

$= ٤س^٣ - ٢٤س^٢ + ٤٥س - ٢٥$ ، المجال $=]٠ ، ٤]$

٤ $\left(\frac{د}{ر}\right)(س) = \frac{٢س^٢ - ٧س + ٥}{٢س - ٥} = \frac{(٢س - ٥)(س - ١)}{٢س - ٥} = س - ١$

، المجال $=]٠ ، ٤] - \left\{\frac{٥}{٢}\right\}$

القيم العددية
- $(د + ر)(٣) = ٢ \times ٩ - ٥ \times ٣ = ٣$
- $(د - ر)(٠)$ غير معرفة لأن صفر $\notin]٠ ، ٤]$
- $(د \times ر)(-٣)$ غير معرفة لأن $-٣ \notin]٠ ، ٤]$
- $\left(\frac{د}{ر}\right)(١) =$ صفر

مثال ٢

إذا كانت د ، ر دالتين حيث $د(س) = \frac{س}{س + ١}$ ، $ر(س) = \frac{س + ١}{س - ٢}$ فأوجد:

١ $(د + ر)(س)$ ثم احسب قيمة $(د + ر)(٣)$

٢ $(د - ر)(س)$ ثم احسب قيمة $(د - ر)(٢)$

٣ $(د \times ر)(س)$ ثم احسب قيمة $(د \times ر)(٣)$

٤ $\left(\frac{د}{ر}\right)(س)$ ثم احسب قيمة $\left(\frac{د}{ر}\right)(-١)$ ، $\left(\frac{د}{ر}\right)(١)$

الحل

مجال $د = م_١ = ح - \{-١\}$ ، مجال $ر = م_٢ = ح - \{٢\}$

$\therefore$ المجال المشترك للدالتين د ، ر $= م_١ \cap م_٢ = ح - \{-١ ، ٢\}$

١ $(د + ر)(س) = \frac{س}{س + ١} + \frac{س + ١}{س - ٢} = \frac{س(س - ٢) + (س + ١)^٢}{(س + ١)(س - ٢)}$

$= \frac{س^٢ - ٢س + س^٢ + ٢س + ١}{(س + ١)(س - ٢)} = \frac{٢س^٢ + ١}{(س + ١)(س - ٢)}$

، المجال $= ح - \{-١ ، ٢\}$ ، $(د + ر)(٣) = \frac{٢ \times ٩ + ١}{٤ \times ١} = \frac{١٩}{٤}$

٢ $(د - ر)(س) = \frac{س}{س + ١} - \frac{س + ١}{س - ٢} = \frac{س(س - ٢) - (س + ١)^٢}{(س + ١)(س - ٢)}$

$= \frac{-٤س - ١}{(س + ١)(س - ٢)}$ ، المجال $= ح - \{-١ ، ٢\}$

، $(د - ر)(٢)$ غير معرفة لأن $٢ \notin$ مجال $(د - ر)$

٣ $(د \times ر)(س) = \frac{س}{س + ١} \times \frac{س + ١}{س - ٢} = \frac{س}{س - ٢}$

، المجال $= ح - \{-١ ، ٢\}$ ، $(د \times ر)(٣) = \frac{٣}{١} = ٣$

٤ $\left(\frac{د}{ر}\right)(س) = \frac{س}{س + ١} \div \frac{س + ١}{س - ٢} = \frac{س}{س + ١} \times \frac{س - ٢}{س + ١} = \frac{س(س - ٢)}{(س + ١)^٢}$

، المجال $= ح - \{-١ ، ٢\}$

، $\left(\frac{د}{ر}\right)(-١)$ غير معرفة لأن $-١ \notin$ مجال $\frac{د}{ر}$ ، $\left(\frac{د}{ر}\right)(١) = \frac{١ \times -١}{٢^٢} = \frac{-١}{٤}$

مثال ٣

إذا كانت: $د_١(س) = \sqrt{س - ٢}$ ، $د_٢(س) = \sqrt{٥ - س}$ ، $د_٣(س) = س - ٢$

فأوجد قاعدة ومجال كل من الدوال الآتية:

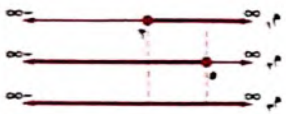
١ $(د_١ + د_٢)$ ٢ $(د_٢ - د_٣)$ ٣ $(د_١ \times د_٢)$ ٤ $\left(\frac{د_٢}{د_٣}\right)$ ٥ $\left(\frac{د_٣}{د_١}\right)$

الحل

مجال $د_١ = م_١ = [٢ ، \infty[$

، مجال $د_٢ = م_٢ =]-\infty ، ٥]$

، مجال $د_٣ = م_٣ = ح$



١ $(د_١ + د_٢)(س) = \sqrt{س - ٢} + \sqrt{٥ - س}$ ، المجال $= [٢ ، ٥]$

٢ $(د_٢ - د_٣)(س) = \sqrt{٥ - س} + ٢ - س$ ، المجال $=]-\infty ، ٥]$

٣ $(د_١ \times د_٢)(س) = \sqrt{س - ٢} \times \sqrt{٥ - س}$ ، المجال $= [٢ ، ٥]$

٤ $\left(\frac{د_٢}{د_٣}\right)(س) = \frac{\sqrt{٥ - س}}{س - ٢}$ ، المجال $=]-\infty ، ٥] - \{٢\}$

٥ $\left(\frac{د_٣}{د_١}\right)(س) = \frac{س - ٢}{\sqrt{س - ٢}}$ ، المجال $=]٢ ، \infty[$

تركيب الدوال

إذا كانت : د ، ر دالتين وكان مدى الدالة ر تقاطع مجال الدالة د لا يساوى ∅

فإن تركيب الدالة د مع الدالة ر ينتج دالة جديدة يرمز لها بالرمز (د ∘ ر) وتقرأ

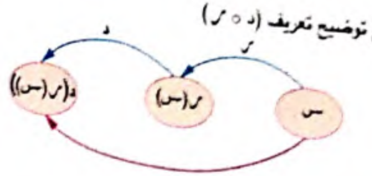
[د تركيب ر] أو [د بعد ر]

ويكون (د ∘ ر) (س) = د (ر (س)) وتطبق قاعدة الدالة ر أولاً ثم قاعدة الدالة د

حيث : مجال (د ∘ ر) يتكون من قيم س التى فى مجال الدالة ر والتى تجعل ر (س) فى مجال الدالة د

أى أن مجال (د ∘ ر) = {س : س ∈ مجال ر ، ر (س) ∈ مجال د}

والشكل التالى يساعدنا فى توضيح تعريف (د ∘ ر)



مثال توضيحى

إذا كانت : ر ، د دالتين معرفتين كمجموعة من الأزواج المرتبة كالتالى :

بيان ر = {(١ ، ٥) ، (٢ ، ١٠) ، (٣ ، ١٥)}

، بيان د = {(١٠ ، ٢٠) ، (١٥ ، ٣٠) ، (١٦ ، ٣٢)}

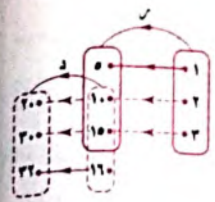
فإن : مجال ر = {١ ، ٢ ، ٣} ، مجال د = {١٠ ، ١٥ ، ١٦}

مجال (د ∘ ر) = {س : س ∈ مجال ر ، ر (س) ∈ مجال د}

= مجموعة المساقط الأولى فى بيان ر والتى مساقطها الثانية تظهر كمساقط أولى فى بيان د

∴ مجال (د ∘ ر) = {٢ ، ٣} ، مدى (د ∘ ر) = {٢٠ ، ٣٠}

، بيان (د ∘ ر) = {(٢ ، ٢٠) ، (٣ ، ٣٠)}



مثال ٤

إذا كانت : د (س) = س^{٢} ، ر (س) = س + ١ فأوجد :

١ (د ∘ ر) (١) ٢ (ر ∘ د) (١) ٣ (د ∘ د) (−١) ٤ (ر ∘ ر) (−١)

الحل

١ ∵ (د ∘ ر) (س) = د (ر (س)) ∴ (د ∘ ر) (١) = د (ر (١))

، ∵ ر (١) = ١ + ١ = ٢ ∴ (د ∘ ر) (١) = د (٢) = ٢^{٢} = ٨

٢ ∵ (ر ∘ د) (س) = ر (د (س)) ∴ (ر ∘ د) (١) = ر (د (١))

، ∵ د (١) = ١^{٢} = ١ ∴ (ر ∘ د) (١) = ر (١) = ١ + ١ = ٢

٣ ∵ (د ∘ د) (س) = د (د (س)) ∴ (د ∘ د) (−١) = د (د (−١))

، ∵ د (−١) = (−١)^{٢} = −١ ∴ (د ∘ د) (−١) = د (−١) = −١

٤ ∵ (ر ∘ ر) (س) = ر (ر (س)) ∴ (ر ∘ ر) (−١) = ر (ر (−١))

، ∵ ر (−١) = −١ + ١ = ٠ ∴ (ر ∘ ر) (−١) = ر (٠) = ٠ + ١ = ١

مثال ٥

إذا كانت : د (س) = ٢ س + ١ ، ر (س) = س^{٢} − ٣

فأوجد كلًا من تركيبات الدوال الآتية :

١ (د ∘ ر) (س) ٢ (ر ∘ د) (س) ٣ (د ∘ د) (س)

الحل

١ (د ∘ ر) (س) = د (ر (س)) وبوضع ر (س) بدلًا من س فى الدالة د

∴ (د ∘ ر) (س) = ٢ ر (س) + ١ وبوضع ر (س) = س^{٢} − ٣

∴ (د ∘ ر) (س) = ٢ (س^{٢} − ٣) + ١ وبتبسيط المقدار الناتج

∴ (د ∘ ر) (س) = ٢ س^{٢} − ٦ + ١ = ٢ س^{٢} − ٥

٢ (ر ∘ د) (س) = ر (د (س)) وبوضع د (س) بدلًا من س فى الدالة ر

∴ (ر ∘ د) (س) = (د (س))^{٢} − ٣ وبوضع د (س) = ٢ س + ١

∴ (ر ∘ د) (س) = (٢ س + ١)^{٢} − ٣ وبتبسيط المقدار الناتج

∴ (ر ∘ د) (س) = ٤ س^{٢} + ٤ س + ١ − ٣ = ٤ س^{٢} + ٤ س − ٢

٣ (د ∘ د) (س) = د (د (س)) ∴ (د ∘ د) (س) = ٢ (د (س)) + ١

∴ (د ∘ د) (س) = ٢ (٢ س + ١) + ١ ∴ (د ∘ د) (س) = ٤ س + ٢ + ١ = ٤ س + ٣

ملاحظة

فى المثال السابق لاحظ أن : (د ∘ ر) (س) ≠ (ر ∘ د) (س)

ومن ذلك يمكن استنتاج أن : د ∘ ر ≠ ر ∘ د

أى أن عملية تركيب دالتين ليست عملية إبدالية.

مثال ٦

إذا كانت د دالة خطية وكانت (د ∘ د) (س) = ٤ س + ٣ **أوجد :** د (س)

الحل

نفرض أن : د (س) = أ س + ب

، ∵ (د ∘ د) (س) = ٤ س + ٣

∴ د (أ س + ب) = ٤ س + ٣

∴ أ² س + أ ب + ب = ٤ س + ٣

، أ ب + ب = ٣

، عند أ = ٢

، عند أ = -٢

∴ د (د (س)) = ٤ س + ٣

∴ أ (أ س + ب) + ب = ٤ س + ٣

∴ أ² = ٤ ومنها أ = ± ٢

∴ ب = $\frac{\text{٣}}{\text{أ + ١}}$

∴ ب = ١

∴ ب = -٣

∴ د (س) = ٢ س + ١ أ، د (س) = -٢ س - ٣

مثال ٧

إذا كانت د (س) = ٢ س + ١ ، (د ∘ ر) (س) = س² + س - ١ **أوجد :** ر (س)

الحل

∵ (د ∘ ر) (س) = س² + س - ١

∴ ٢ ر (س) + ١ = س² + س - ١

∴ ر (س) = $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ س² + $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ س - ١

∴ د (ر (س)) = س² + س - ١

∴ ٢ ر (س) = س² + س - ٢

مثال ٨

إذا كانت د : ح ⟵ ح ، د (س) = ٥ س - ٢ ، ر (س) = { س + ١ ، س > ٢ ؛ ٢ س ، س ≤ ٢ }

أوجد : [١] (د ∘ ر) (٤) [٢] (ر ∘ د) (١)

الحل

[١] (د ∘ ر) (٤) = د (ر (٤)) (لاحظ أن : ر (٤) = ٤ + ١ = ٥)

= د (٥) = ٥ × ٥ - ٢ = ٢٣

[٢] (ر ∘ د) (١) = ر (د (١)) (لاحظ أن : د (١) = ٥ × ١ - ٢ = ٣)

= ر (٣) = ٢ × ٣ = ٦

• لتعيين مجال الدالة (د ∘ ر) نتبع الخطوات التالية :

[١] نوجد م₁ = مجال الدالة ر

[٢] نوجد م₂ = قيم س التي تجعل ر (س) في مجال د

[٣] نوجد م₁ ∩ م₂ وهو مجال (د ∘ ر)

مثال ٩

أوجد مجال (د ∘ ر) إذا كان : د (س) = $\frac{\text{٣}}{\text{س - ٤}}$ ، ر (س) = $\frac{\text{٤}}{\text{س + ٢}}$

الحل

لإيجاد مجال (د ∘ ر) نتبع الخطوات الآتية :

• نوجد مجال ر وليكن م₁ :

∵ ر (س) = $\frac{\text{٤}}{\text{س + ٢}}$ ∴ م₁ = مجال ر = ح - {-٢}

• نوجد قيم س التي تجعل ر (س) في مجال الدالة د ولتكن م₂ :

∵ د (س) = $\frac{\text{٣}}{\text{س - ٤}}$ ∴ د (ر (س)) = $\frac{\text{٣}}{\text{ر (س) - ٤}}$

∴ ر (س) في مجال د إذا كان : ر (س) ≠ ٤

، عندما ر (س) = ٤ ∴ $\frac{\text{٤}}{\text{س + ٢}}$ = ٤

∴ س + ٢ = ١ ∴ س = -١

∴ م₂ = قيم س التي تجعل ر (س) في مجال د = ح - {-١}

• نوجد مجال (د ∘ ر) = م₁ ∩ م₂ = (ح - {-٢}) ∩ (ح - {-١}) = ح - {-٢ ، -١}

ويمكن اختصار الخطوات السابقة في المخطط التالي :

د [ر (س)] = $\frac{\text{٣}}{\frac{\text{٤}}{\text{س + ٢}} - \text{٤}}$

$\frac{\text{٤}}{\text{س + ٢}}$ - ٤ ≠ ٠

∴ $\frac{\text{٤}}{\text{س + ٢}}$ ≠ ٤

∴ س + ٢ ≠ ١

∴ س ≠ -١

س + ٢ ≠ ٠

∴ س ≠ -٢

لاحظ أنه

في حالة استخدام هذا المخطط لإيجاد المجال نكتب د [ر (س)] كما هي دون تبسيط.

∴ مجال (د ∘ ر) = ح - {-٢ ، -١}

مثال ١٠

إذا كانت : د (س) = √(س − ٢) ، ر (س) = √(٦ − س)

فأوجد مجال كل من الدالتين الآتيتين : ١ د ∘ ر ٢ ر ∘ د

الحـــل

١ (د ∘ ر) (س) = د (ر (س)) = √(ر (س) − ٢) = √(√(٦ − س) − ٢)

، ∵ ر (س) = √(٦ − س) وبوضع ٦ − س ≥ ٠ ∴ س ≤ ٦

∴ م₁ = مجال ر =]− ∞ ، ٦]

وبوضع ر (س) − ٢ ≥ ٠ ∴ √(٦ − س) − ٢ ≥ ٠

∴ √(٦ − س) ≥ ٢ (بتربيع الطرفين)

∴ ٦ − س ≥ ٤ ∴ س ≤ ٢

∴ م₂ = قيم س التى تجعل ر (س) فى مجال د =]− ∞ ، ٢]

∴ مجال (د ∘ ر) = م₁ ∩ م₂ =]− ∞ ، ٦] ∩]− ∞ ، ٢] =]− ∞ ، ٢]

٢ (ر ∘ د) (س) = ر (د (س)) = √(٦ − د (س)) = √(٦ − √(س − ٢))

، ∵ د (س) = √(س − ٢) وبوضع س − ٢ ≥ ٠

∴ س ≥ ٢ ∴ م₁ = مجال د = [٢ ، ∞[

وبوضع ٦ − √(س − ٢) ≥ ٠ ∴ √(س − ٢) ≤ ٦ (بتربيع الطرفين)

∴ س − ٢ ≤ ٣٦ ∴ س ≤ ٣٨

∴ م₂ = قيم س التى تجعل د (س) فى مجال ر =]− ∞ ، ٣٨]

∴ مجال (ر ∘ د) = م₁ ∩ م₂ = [٢ ، ∞[∩]− ∞ ، ٣٨] = [٢ ، ٣٨]

حل آخر لإيجاد مجال (ر ∘ د) :

∵ مجال د = [٢ ، ∞[، مجال ر =]− ∞ ، ٦]

، ∵ مجال (ر ∘ د) = {س : س ∈ مجال د ، د (س) ∈ مجال ر}

∵ س ∈ مجال د ∴ **س ∈ [٢ ، ∞[**

∵ د (س) ∈ مجال ر ∴ د (س) ∈]− ∞ ، ٦]

∴ √(س − ٢) ∈]− ∞ ، ٦] ∴ √(س − ٢) ≤ ٦

∴ س − ٢ ≤ ٣٦ ∴ س ≤ ٣٨

∴ **س ∈]− ∞ ، ٣٨]**

أى أن مجال (ر ∘ د) = [٢ ، ∞[∩]− ∞ ، ٣٨] = [٢ ، ٣٨]

مثال ١١

إذا كانت : د (س) = √(س − ١) ، ر (س) = س² − ٣

أوجد (د ∘ ر) (س) فى أبسط صورة موضحًا المجال ثم أوجد (د ∘ ر) (٢)

الحـــل

(د ∘ ر) (س) = د (ر (س)) = √(ر (س) − ١) = √(س² − ٣ − ١) = √(س² − ٤)

∵ مجال د = [١ ، ∞[، مجال ر = ح

، ∵ مجال (د ∘ ر) = {س : س ∈ مجال ر ، ر (س) ∈ مجال د}

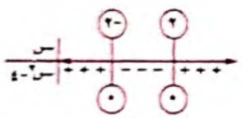
∵ س ∈ مجال ر ∴ **س ∈ ح**

، ∵ ر (س) ∈ مجال د ∴ ر (س) ∈ [١ ، ∞[

∴ س² − ٣ ∈ [١ ، ∞[∴ س² − ٣ ≥ ١

∴ س² − ٤ ≥ صفر

∴ (س − ٢) (س + ٢) ≥ صفر



∴ س ≥ ٢ ، س ≤ −٢ ∴ **س ∈ ح −]−٢ ، ٢[**

∴ مجال (د ∘ ر) = ح ∩ (ح −]−٢ ، ٢[) = ح −]−٢ ، ٢[

، (د ∘ ر) (٢) = √(٤ − ٤) = صفر

تمارين 2

على العمليات على الدوال - تركيب دالتين

اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسي ∴ مستويات عليا • تطبيق • فهم

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) مجال الدالة د : $د(س) = \frac{س - ١}{س^٢ - ١} + \frac{١}{س + ٢}$ هو ....

(أ) $ح - \{١ ، -١ ، -٢\}$ (ب) $ح - \{١ ، -٢\}$ (جـ) $ح - \{١ ، -١ ، ٢\}$ (د) $\{١ ، ٢\}$

(٢) مجال الدالة د : $د(س) = \sqrt{س - ٢} - \sqrt{٧ - س}$ هو ....

(أ) $[٢ ، ٧]$ (ب) $]٢ ، ٧[$ (جـ) $ح - [٢ ، ٧]$ (د) $ح -]٢ ، ٧[$

(٣) إذا كان : $د(س) = \sqrt[٣]{س - ١}$ ، $ر(س) = \sqrt{س - ١}$

فإن مجال (د − ر) هو ....

(أ) $[-١ ، \infty[$ (ب) $[١ ، \infty[$ (جـ) ح (د) $]-\infty ، ١]$

(٤) مجال الدالة د : $د(س) = \sqrt{س - ١} + \sqrt{س + ٢}$ هو ....

(أ) $[-٢ ، \infty[$ (ب) $[١ ، \infty[$ (جـ) $]١ ، \infty[$ (د) $]-٢ ، \infty[$

(٥) مجال الدالة د : $د(س) = \sqrt{س + ٢} - \sqrt{٣ - س}$ هو ....

(أ) ح (ب) $ح - [-٢ ، ٣]$ (جـ) $[-٢ ، ٣]$ (د) $]-٢ ، ٣[$

(٦) إذا كانت د دالة حيث د = $\{(١ ، ٢) ، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٦) ، (٤ ، ٨)\}$

، ر دالة حيث ر = $\{(١ ، ٣) ، (٣ ، ٥) ، (٥ ، ٧)\}$ فإن : د + ر = ...

(أ) $\{(١ ، ٢) ، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٦) ، (٤ ، ٨) ، (١ ، ٣) ، (٣ ، ٥) ، (٥ ، ٧)\}$

(ب) $\{(١ ، ٢) ، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٦) ، (٤ ، ٨) ، (٥ ، ٧)\}$

(جـ) $\{(١ ، ٥) ، (٣ ، ١١)\}$

(د) $\{(١ ، ٥) ، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ١١) ، (٤ ، ٨) ، (٥ ، ٧)\}$

(٧) إذا كانت : د ، ر : ح ⟵ ح حيث $د(س) = ٣س + ١$

، وكان $(د + ر)(س) = س^٢ + ٢س - ١$ فإن : $ر(-١)$ = ...

(أ) −٢ (ب) −١ (جـ) صفر (د) ٢

(٨) إذا كانت د : $ح^+$ ⟵ ح حيث $د(س) = س^٢ - ٧$ ، ر : $[-٣ ، ٢]$ ⟵ ح

حيث $ر(س) = س^٢ + ٢$ فإن : $(د - ر)(-٥)$ = ...

(أ) −٥ (ب) −١٠ (جـ) −٢٠ (د) غير معرفة.

(٩) مجال الدالة (د . ر) حيث $د(س) = س^٢ - ٤$ ، $ر(س) = س + ١$ هو ....

(أ) $ح - \{٢ ، -٢ ، -١\}$ (ب) $\{٢ ، -٢ ، -١\}$ (جـ) ح (د) $ح - \{٤ ، ١\}$

(١٠) إذا كانت : $د(س) = \frac{١}{س}$ ، $ر(س) = \sqrt{س}$ فإن مجال (د . ر) = ...

(أ) $ح - \{٠\}$ (ب) ح (جـ) $ح^+$ (د) $[٠ ، \infty[$

(١١) مجال الدالة د : $د(س) = \sqrt{س - ٤}\sqrt[٣]{س - ٢}$ هو ....

(أ) $]٤ ، \infty[$ (ب) $[٢ ، \infty[$ (جـ) ح (د) $[٤ ، \infty[$

(١٢) إذا كان د : ح ⟵ ح حيث $د(س) = س^٢ - س$ ، ر : ح ⟵ ح حيث $ر(س) = ٢س - ٢$

فإن : $(د . ر - ٦ر)(٢)$ = ...

(أ) ٢٤ (ب) ٤٠ (جـ) ١٦ (د) −١٦

(١٣) إذا كانت : $د(س) = ٢س + ١$ ، $ر(س) = -س - ٢$ ،

كان : $هـ(س) = د(س) + ر(س)$ ، $ك(س) = د(س) - ر(س)$

فإن : $هـ(٢) . ك(١)$ = ...

(أ) ٣ (ب) ١ (جـ) ٦ (د) صفر

(١٤) إذا كانت د : $ح^+$ ⟵ ح حيث $د(س) = س - ٥$ ، ر : $[-١ ، ٥]$ ⟵ ح

حيث $ر(س) = س - ٢$ فإن : $\left(\frac{د}{ر}\right)(١)$ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) ٨

(١٥) إذا كانت : د ، ر دالتين حقيقيتين حيث $د(س) = \frac{س - ٢}{س^٢ - ٣س + ٢}$ ، $ر(س) = س - ٣$

فإن : $\left(\frac{د}{ر}\right)(٣)$ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ١ (جـ) صفر (د) غير معرفة.

(١٦) مجال الدالة د : $د(س) = \frac{س}{\sqrt[٣]{س}}$ هو ....

(أ) ح (ب) $ح - \{٠\}$ (جـ) $ح^+$ (د) $ح^+ \cup \{٠\}$

١٧) مجال الدالة د : د(س) = (س − ٥) / √(٢س − ٣) هو ....

(أ) ح − {٥}   (ب)]٣/٢ ، ∞[(ج) [٣/٢ ، ∞[− {٥}   (د) ح − {٣/٢}

١٨) مجال الدالة د : د(س) = √(س − ٢) / (س − ٢) هو ....

(أ) ح   (ب) {٢}   (ج) [٢ ، ∞[(د) [٢ ، ∞[− {٢}

١٩) إذا كانت د : ح ← ح حيث د(س) = س − ٥ ، حيث ر(س) = س − ٢ فإن مجال (د/ر) هو ....

(أ) [٠ ، ٥]   (ب) [٠ ، ٥] − {٢}   (ج) [−١ ، ∞[(د) ح

٢٠) إذا كانت د١ : [−٢ ، ٢] ← ح حيث د١(س) = س ، د٢ ، حيث د٢(س) = س² فإن : مجال (د١/د٢) = ...

(أ) [−٢ ، ٤]   (ب) [−٢ ، ٤] − {٠}   (ج)]٠ ، ٢]   (د) [٠ ، ٢]

٢١) مجال الدالة د حيث د(س) = (س + ١) / √(س − ١) هو ....

(أ) ح − {١}   (ب) ح − {−١}   (ج) [−١ ، ∞[(د) ح

٢٢) إذا كان : د(س) = √(س − ٣) ، ر(س) = √(٣ − س) فإن مجال (د/ر) هو ....

(أ)]٣ ، ∞[(ب) [٣ ، ∞[(ج)]−∞ ، ٣[(د)]−∞ ، ٣]

٢٣) مجال الدالة د : د(س) = √(س − ٤) / ((س − ٣)(س − ٥)) هو ....

(أ) ح   (ب) ح − {٣ ، ٥}   (ج) [٤ ، ∞[(د) [٤ ، ∞[− {٥}

٢٤) مجال الدالة د حيث د(س) = √(س − ٣) / √(٥ − س) هو ....

(أ)]٣ ، ٥[(ب) ح − {٣ ، ٥}   (ج) [٣ ، ٥[(د) {−٣ ، −٥}

٢٥) مجال الدالة د : د(س) = √((٣ − س) / (٥ − س)) هو ....

(أ)]٣ ، ٥[(ب) ح −]٣ ، ٥[(ج) [٣ ، ٥]   (د) ح − [٣ ، ٥[

٢٦) إذا كانت : د(س) = √(س + ٥) ، ر(س) = س² فإن (د ∘ ر)(٢) = ...

(أ) ٧   (ب) ٣   (ج) ٤   (د) ٩

٢٧) إذا كان : د(١) = ٤ ، ر(٤) = ٧ فإن (ر ∘ د)(١) = ...

(أ) ١   (ب) ٤   (ج) ٧   (د) ١١

٢٨) إذا كان : د(س) = س² + ٦ ، ر(س) = ٣س فإن (د ∘ ر)(٣) = ...

(أ) ٧٥   (ب) ٨٧   (ج) ٩٠   (د) ١٠٠

٢٩) إذا كانت : د(س) = ٥س + ٤ ، ر(س) = ٢ − س

فإن : (د ∘ ر)(−٢) + (ر ∘ د)(٥) = ...

(أ) ٢٤   (ب) −٢٧   (ج) ٤٩   (د) −٣

٣٠) إذا كانت : ر(س) = س / (س − ١) فإن : (ر ∘ ر)(١) = ...

(أ) ١   (ب) صفر   (ج) −١   (د) غير معرفة

٣١) إذا كان : د(س) = √س ، ر(س) = س² فإن : (د ∘ ر)(س) = ...

(أ) س   (ب) س²   (ج) √س   (د) |س|

٣٢) إذا كان : د(س) = س − ٣ ، ر(س) = س² فإن : (د ∘ ر)(س) = ...

(أ) (س − ٣)²   (ب) س² − ٣   (ج) س² + ٣   (د) √(س − ٣)

٣٣) إذا كانت : د(س) = (٣س + ٢) / (٢س − ٣) فإن : (د ∘ د)(س) = ...

(أ) س   (ب) −س   (ج) د(س)   (د) −د(س)

٣٤) إذا كانت : د(س) = ٢س + ٥ ، وكانت ر(س) = س² فإن : د(ر(س)) = ...

(أ) (٢س + ٥)²   (ب) ٢س² + ٥   (ج) (٢س² + ٥)²   (د) ٢س² + ١٠

٣٥) إذا كان : د(س) = ٣س + ٢ ، ر(س) = ٢س + ك

وكان (د ∘ ر)(س) = (ر ∘ د)(س) فإن : ك = ...

(أ) ١   (ب) ٢   (ج) ٣   (د) ٤

٣٦) إذا كانت : د(س) = س + ١ ، ر(س) = س² − ١

فإن مجموعة حل المعادلة ر(د(س)) = صفر هي ....

(أ) {٠ ، ٢}   (ب) {١ ، −١}   (ج) {٠ ، −٢}   (د) {٢ ، −٢}

(٣٧) إذا كانت د(س) = ٢ س ، ر(س) = $\frac{١}{٢س}$ ، كان د(ر(س)) = ٦

فإن س = ...

(أ) $\frac{١}{٦}$ (ب) ٦ (جـ) ٤ (د) $\frac{١}{١٢}$

(٣٨) إذا كانت د(س) = $\frac{١}{س}$ ، ر(س) = س٢ - ١ فإن مجال (د ∘ ر) =

(أ) ح - {٠ ، ١ ، -١} (ب) ح - {٠ ، ١ ، -١} (جـ) ح (د) {١ ، -١} (هـ) [-١ ، ١]

(٣٩) إذا كان د(س) = $\sqrt{س}$ ، ر(س) = س٢ فإن مجال (ر ∘ د) =

(أ)]-∞ ، ٠] (ب) [٠ ، ∞[(جـ) ح⁺ (د) ح

(٤٠) إذا كان د(س) = $\sqrt{س}$ ، ر(س) = س٢ فإن مجال (د ∘ ر) =

(أ)]-∞ ، ٠] (ب) [٠ ، ∞[(جـ) ح⁺ (د) ح

(٤١) مجال الدالة (د ∘ ر) حيث د(س) = $\sqrt{س - ٢}$ ، ر(س) = $\sqrt{٦ - س}$ هو

(أ) ح (ب) [٢ ، ∞[(جـ)]-∞ ، ٢] (د)]-∞ ، ٢[

(٤٢) إذا كانت العلاقة بين س ، د(س) ، ر(س) كما بالجدول المقابل

س	د(س)	س	ر(س)
-٣	٤	-٤	٣
-٢	٣	-١	١
٣	١	١	-٤
٦	-١	٤	-٧

فإن ر(د(٦)) = ...

(أ) ٣ (ب) ١ (جـ) -٤ (د) -٧

(٤٣) إذا كانت العلاقة بين س ، د(س) ، ر(س) لبعض قيم س كما بالجدول المقابل.

س	د(س)	ر(س)
صفر	-٢	٢
٢	٤	صفر
٤	٨	-٢

فأي مما يأتي صحيح ؟

(I) د(٠) = ر(٤) (II) د(ر(٢)) = -٢

(III) ر(د(٢)) = ٢

(أ) I فقط (ب) I ، II فقط (جـ) I ، III فقط (د) جميع ما سبق.

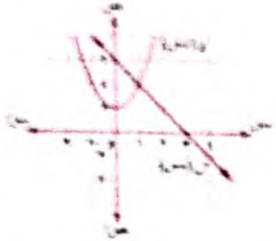
(٤٤) إذا كان الجدول المقابل يمثل بيان كل من الدالتين د ، ر

س	١	٢	٣	٤
د(س)	٣	١	٤	٢
ر(س)	٤	٣	٢	١

فإن (ر ∘ د)(١) =

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٤٥) الشكل المقابل يوضح منحنى الدالتين د ، ر



فإن (ر ∘ د)(١) = ...

(أ) ٥ (ب) -٢ (جـ) -٤ (د) ٦

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ إذا كانت د دالة حيث د(س) = س٢ - س - ١٢ ومجالها [-٤ ، ٨] ، ر دالة حيث ر(س) = س - ٤ ومجالها [-٧ ، ٤] فأوجد كلاً من الدوال الآتية مع تعيين مجال كل منها :

① (د + ر)(س) ② (د - ر)(س) ③ (د . ر)(س)

④ ($\frac{د}{ر}$)(س) ⑤ ($\frac{ر}{د}$)(س)

٢ إذا كانت د ، ر دالتين حقيقيتين حيث : د(س) = س٢ - ٤ ، ر(س) = $\sqrt{س - ١}$

أوجد : ① مجال كل من الدوال الآتية : (د + ر) ، (د . ر) ، ($\frac{د}{ر}$) ، ($\frac{ر}{د}$)

② القيمة العددية - إن أمكن - لكل من :

(د + ر)(٥) ، (د . ر)(٢) ، ($\frac{د}{ر}$)(٣) ، ($\frac{ر}{د}$)(-٢)

٣ إذا كان : د(س) = س٢ - ٤ س ، ر(س) = $\sqrt{س + ٢}$ ، ع(س) = $\sqrt{٤ - س}$

أولًا : أوجد قاعدة ومجال كل من الدوال الآتية :

① (د + ر) ② (ر - ع) ③ (د . ع) ④ ($\frac{ع}{د}$)

ثانيًا : احسب القيمة العددية - إن أمكن - لكل من :

① (ر - ع)(١) ② (د . ع)(٥) ③ ($\frac{ع}{د}$)(٣)

٤ عين مجال كل من الدوال الحقيقية المعرفة بالقواعد الآتية :

① د(س) = $\frac{١}{س} + \frac{١}{س + ٢}$

② د(س) = $\frac{س - ١}{س^٢ - ١} + \frac{١}{س + ١}$

③ د(س) = $\frac{س}{\sqrt{١ - س}}$

④ د(س) = $\frac{٣ س}{\sqrt{٣ س - ١}}$

⑤ د(س) = $\sqrt[٣]{س - ٤} + \sqrt{س - ٢}$

⑥ د(س) = $\frac{\sqrt{س - ٤}}{س - ٦}$

⑦ د(س) = $\frac{\sqrt{س - ٣}}{س^٢ - ٤}$

⑧ د(س) = $\frac{\sqrt{س - ٣}}{\sqrt{س} - ٥}$

5 إذا كانت د ، ر دالتين حقيقيتين حيث

د (س) = $\begin{cases} \text{س − ٢} & \text{، س} \geq \text{٢} \\ \text{− س + ٢} & \text{، س} < \text{٢} \end{cases}$ ، ر (س) = س فأوجد كلاً من :

(١) (د . ر) (س)　　(٢) $\left(\frac{\text{د}}{\text{ر}}\right)$ (س)　　(٣) $\left(\frac{\text{ر}}{\text{د}}\right)$ (س)

مع تعيين مجال كل دالة.

---

6 عين مجال كل من الدوال الحقيقية المعرفة بالقواعد الآتية :

(١) د (س) = $\sqrt{\frac{\text{س − ٣}}{\text{س − ٥}}}$　　(٢) د (س) = $\frac{\text{٥ س + ٢}}{\sqrt{\text{س − ٢}} - \text{١}}$

(٣) د (س) = $\frac{\sqrt{\text{س + ٢}}}{\text{س}^{\text{٢}} \text{ − ٦ س − ٧}}$　　(٤) د (س) = $\frac{\frac{\text{٢}}{\text{س − ١}}}{\frac{\text{١}}{\text{س − ٢}} + \text{٤}}$

---

7 إذا كان : د (س) = ٣ س + ١ ، ر (س) = س$^{\text{٢}}$ − ٥ ، ع (س) = س$^{\text{٣}}$

أوجد : (١) (د ∘ ر) (٢)　　(٢) (ر ∘ د) (−٣)

(٣) (ر ∘ ع) (١)　　(٤) (ع ∘ د) (−٢)　　«−٢ ، ٥٩ ، −٤ ، −١٢٥»

---

8 إذا كان : د (س) = $\frac{\text{١}}{\text{س}}$ ، ر (س) = س + ٢

أوجد : (١) (د ∘ ر) (س)　　(٢) (ر ∘ د) (س) وحدد مجال كل منهما.

---

9 إذا كان : د (س) = $\frac{\text{١}}{\text{س − ١}}$ ، ر (س) = س$^{\text{٢}}$ فأوجد فى أبسط صورة موضحًا المجال :

(١) (د ∘ ر) (س)　　(٢) (ر ∘ د) (س)

---

10 إذا كان : د (س) = س$^{\text{٢}}$ + ٦ ، ر (س) = ٣ س

(١) أوجد : (د ∘ ر) (٣)

(٢) حدد : قيم س التى تجعل (د ∘ ر) (س) = ٤٢　　«٨٧ ، ±٢»

---

11 إذا كان : د (س) = س$^{\text{٢}}$ − ٣ ، ر (س) = $\sqrt{\text{س − ٢}}$

أوجد (د ∘ ر) (س) فى أبسط صورة محددًا المجال ثم أوجد (د ∘ ر) (٣)　　«−٢»

---

12 إذا كان د (س) = $\sqrt{\text{س + ١}}$ ، ر (س) = $\frac{\text{٢}}{\text{س − ٣}}$ فأوجد مجال (د ∘ ر)

13 إذا كان : د (س) = $\sqrt{\text{س − ٢}}$ ، ر (س) = $\sqrt{\text{٤ − س}}$

فأوجد كلًا من الدالتين الآتيتين موضحًا مجالها :

(١) د ∘ ر　　(٢) ر ∘ د

---

14 إذا كان : د (س) = $\sqrt{\text{س − ١}}$ ، ر (س) = $\sqrt{\text{س}^{\text{٢}} \text{ − ٤}}$

فأوجد مجال كل من الدالتين الآتيتين :

(١) د ∘ ر　　(٢) ر ∘ د

---

15 إذا كان : ع (س) = $\sqrt{\text{س}^{\text{٢}} \text{ − ٤}}$ فأوجد الدالتين د ، ر بحيث يكون : ع (س) = (د ∘ ر) (س)

---

16 إذا كانت : د دالة خطية وكان (د ∘ د) (س) = ١٦ س + ١٥　أوجد : د (س)

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

1 اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت : د (س) = $\sqrt{\text{س − ١}}$ ، ر (س) = $\sqrt{\text{١ − س}}$ فإن مجال (د + ر) هو ....

(أ) [١ ، ∞[　　(ب)]−∞ ، ١]

(جـ) [−١ ، ∞[　　(د) {١}

(٢) إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} \text{− س + ٢} & \text{، س} < \text{٠} \\ \text{٣ س} & \text{، س} \geq \text{٠} \end{cases}$ ، ر (س) = $\begin{cases} \text{٢ س − ١} & \text{، س} \geq \text{١} \\ \text{س + ٢} & \text{، س} < \text{١} \end{cases}$

فإن : (د + ر) (س) = ... حيث ٠ < س < ١

(أ) ٤ س + ٢　　(ب) س + ١　　(جـ) ٥ س − ١　　(د) ٤

(٣) إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} \text{س}^{\text{٢}} \text{ + ١} & \text{، س} < \text{٠} \\ \text{٣ س + ١} & \text{، س} \geq \text{٠} \end{cases}$ ، ر (س) = $\begin{cases} \text{٤ س − ٢} & \text{، س} < \text{٢} \\ \text{س}^{\text{٢}} \text{ + ٢} & \text{، س} \geq \text{٢} \end{cases}$

فإن : (ر ∘ د) (−١) = ...

(أ) ٣٧　　(ب) −١٧　　(جـ) ١٠　　(د) ٦

(٤) إذا كانت : د (س) = س$^{\text{٢}}$ ، ر (س) = ٢ س + ٣

فإن مجموعة حل المعادلة د (ر (س)) = د (س) هى ....

(أ) {١ ، ٣}　　(ب) {−٣ ، ١}　　(جـ) {−١ ، −٣}　　(د) {−١ ، ٣}

⑤ إذا كانت د (س) = ٢ س + ١ وكان : (د ∘ ر) (س) = ٢ س + ٢

فإن ر (س) = ...

(أ) س + ١ (ب) ٥ س + ٣ (جـ) $\frac{٣}{٢}$ س + $\frac{١}{٢}$ (د) ٢ س + ٣

⑥ إذا كانت د : ح ⟵ ح وكان : د (س) = ٢ س - ٣ ، (ر ∘ د) (س) = س + ٢

فإن ر (س) = ...

(أ) ٢ س^{٢} + س - ٦ (ب) $\frac{\text{س} + ٢}{٢ \text{س} - ٣}$ (جـ) $\frac{\text{س} + ٣}{٢}$ (د) $\frac{\text{س} + ٧}{٢}$

⑦ إذا كانت د (س) = س + ٢ ، ر (س) = $\frac{\text{س} - \text{ك}}{٢ \text{س} - ١}$

وكان : (ر ∘ د) (٠) = (د ∘ ر) (١) فإن : ك = ...

(أ) ٧ (ب) ٥ (جـ) ١ (د) $\frac{٧}{٢}$

⑧ الشكل المقابل يمثل

منحنى ص = د (س)

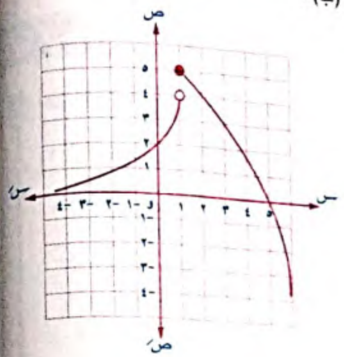
فإن (د ∘ د ∘ د) (١) = ...

(أ) -٥

(ب) -١

(جـ) ١

(د) ٢



⑨ إذا كانت د : ط ⟵ ط حيث د (س) = ٢ س

، ت : ط ⟵ ط حيث ت (س) = $\begin{cases} \frac{\text{س}}{٢} & \text{، س زوجي} \\ \frac{\text{س} + ١}{٢} & \text{، س فردي} \end{cases}$

فإن : (د ∘ ت) (٣) - (د ∘ ت) (٨) = ...

(أ) ٤ (ب) ٨ (جـ) -٤ (د) -٥

٢ إذا كانت د : ح - {٠} ⟵ ح وكان د (س) = $\frac{١}{\text{س}}$ أوجد :

① (د ∘ د) (س)

② (د ∘ د ∘ د) (س)

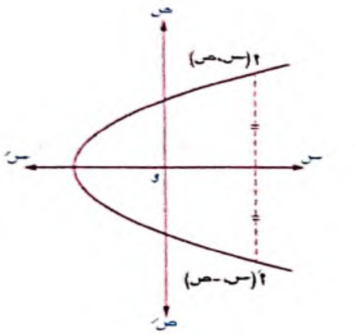
③ (د ∘ د ∘ د ∘ د ..... إلى ن من المرات) (س)

الدرس 3
بعض خواص الدوال
(الدوال الزوجية والفردية - الدوال الأحادية)

تمهيد

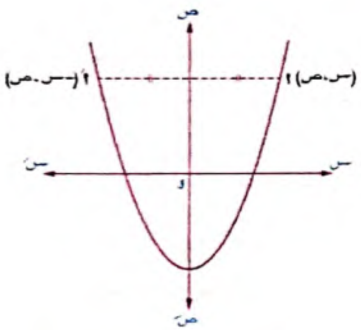
١ التماثل حول محور السينات

يكون الشكل البيانى متماثلًا حول محور السينات إذا كان لكل نقطة أ (س ، ص) واقعة على الشكل البيانى توجد نقطة أخرى أ´ (س ، - ص) تقع على الشكل البيانى حيث أ´ صورة أ بالانعكاس فى محور السينات.



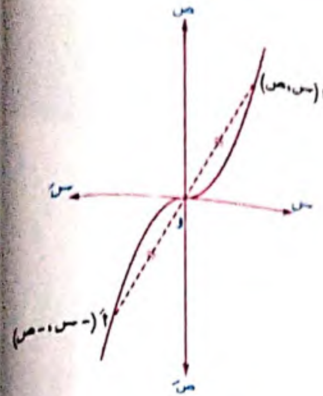
٢ التماثل حول محور الصادات

يكون الشكل البيانى متماثلًا حول محور الصادات إذا كان لكل نقطة أ (س ، ص) واقعة على الشكل البيانى توجد نقطة أخرى أ´ (- س ، ص) تقع على الشكل البيانى حيث أ´ صورة أ بالانعكاس فى محور الصادات.



٣ التماثل حول نقطة الأصل «و»

يكون الشكل البياني متماثلاً حول نقطة الأصل (و) إذا كان لكل نقطة أ (س ، ص) واقعة على الشكل البياني توجد نقطة أخرى أَ (- س ، - ص) تقع على الشكل البياني حيث أَ صورة أ بالانعكاس في نقطة الأصل (و)



الدالة الزوجية والدالة الفردية

• **الدالة الزوجية :** يقال إن الدالة د زوجية إذا كانت : د (- س) = د (س) لكل س ، - س في مجال الدالة د ويكون الشكل البياني للدالة الزوجية متماثلاً حول محور الصادات.

• **الدالة الفردية :** يقال إن الدالة د فردية إذا كانت : د (- س) = - د (س) لكل س ، - س في مجال الدالة د ويكون الشكل البياني للدالة الفردية متماثلاً حول نقطة الأصل.

ملاحظات

١ إذا كانت د (- س) ≠ د (س) ، د (- س) ≠ - د (س) فإن الدالة د ليست زوجية وليست فردية.

٢ عند بحث نوع الدالة د من حيث كونها زوجية أو فردية يجب تحقق شرط انتماء كل من العنصرين س ، - س إلى مجال الدالة وإذا لم يتحقق الشرط كانت الدالة ليست زوجية وليست فردية دون الحاجة لإيجاد د (- س)

٣ إذا كانت الدالة مجالها ح - {أ} ، أ ≠ صفر فإن الدالة ليست زوجية وليست فردية بدون بحثها.

٤ إذا كانت الدالة زوجية ومنحنى الدالة يمر بالنقطة (أ ، ب) فإن منحنى الدالة أيضًا يمر بالنقطة (- أ ، ب)

٥ إذا كانت الدالة فردية ومنحنى الدالة يمر بالنقطة (أ ، ب) فإن منحنى الدالة أيضًا يمر بالنقطة (- أ ، - ب)

٦ الدالة الصفرية د : د (س) = ٠ هي زوجية وفردية في نفس الوقت.

مثال ١

ابحث نوع كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

١ د (س) = $س^{2}$ ٢ د (س) = ٢ $س^{3}$

٣ د (س) = $\sqrt{س - ١}$ ٤ د (س) = جتا س

٥ د (س) = $س^{2}$ - ٥ ، س ∈]-٢ ، ٢]

الحل

١ ∵ د كثيرة حدود ∴ مجال د = ح

∴ لكل س ، - س ∈ ح يكون : د (- س) = $(- س)^{2}$ = $س^{2}$ = د (س)

∴ د دالة زوجية.

٢ ∵ د كثيرة حدود ∴ مجال د = ح

∴ لكل س ، - س ∈ ح يكون : د (- س) = ٢ $(- س)^{3}$ = ٢ (- $س^{3}$) = -٢ $س^{3}$ = - د (س)

∴ د دالة فردية.

٣ ∵ مجال د هو مجموعة قيم س التي تجعل س - ١ ≥ ٠ أي : س ≥ ١

∴ مجال د = [١ ، ∞[

∴ لكل س ∈ [١ ، ∞[لا يوجد - س ∈ [١ ، ∞[

∴ الدالة د ليست زوجية وليست فردية.

> **لاحظ أن**
> ٢ ∈ [١ ، ∞[
> ولكن -٢ ∉ [١ ، ∞[

٤ مجال الدالة د : د (س) = جتا س هو ح

∴ لكل س ، - س ∈ ح يكون :

د (- س) = جتا (- س) = جتا س = د (س)

∴ د دالة زوجية.

> **تذكر أن**
> جا (- س) = - جا س
> جتا (- س) = جتا س
> ظا (- س) = - ظا س

٥ ∵ -٢ ∈ مجال الدالة ، ٢ ∉ مجال الدالة

∴ د ليست زوجية وليست فردية.

ملاحظتان

١ تُسمى الدالة د : ح ← ح ، د (س) = أ $س^{ن}$ حيث أ ≠ ٠ ، ن ∈ $ص_{+}$ دالة القوى وتكون الدالة د : ⟸ زوجية إذا كان ن عددًا زوجيًا. ⟸ فردية إذا كان ن عددًا فرديًا.

٢ د (س) = جتا س ، د (س) = قا س دوال زوجية

بينما د (س) = جا س ، د (س) = قتا س ، د (س) = ظا س

، د (س) = ظتا س دوالًا فردية.

مثال ②

إذا كانت د دالة زوجية حيث : د (س) = أ س^{٢} + ب س + ٥ وكان منحنى الدالة يمر بالنقطة (١ ، ٦)

فأوجد : قيمة كل من أ ، ب

الحل

∵ الدالة زوجية ومنحناها يمر بالنقطة (١ ، ٦)

∴ المنحنى يمر بالنقطة (−١ ، ٦)

عند النقطة (١ ، ٦) ∴ ٦ = أ + ب + ٥ (١)

، عند النقطة (−١ ، ٦) ∴ ٦ = أ − ب + ٥ (٢)

بجمع (١) ، (٢) : ∴ ١٢ = ٢ أ + ١٠ ∴ ٢ أ = ٢ ∴ أ = ١

، بالتعويض فى (١) : ∴ ٦ = ١ + ب + ٥ ∴ ب = صفر

خواص هامة

إذا كان كل من د$_{١}$ ، د$_{٢}$ دالة زوجية وكل من ر$_{١}$ ، ر$_{٢}$ دالة فردية فإن :

١ د$_{١}$ ± د$_{٢}$ دالة زوجية.

٢ ر$_{١}$ ± ر$_{٢}$ دالة فردية.

٣ د$_{١}$ ± ر$_{١}$ دالة ليست زوجية وليست فردية.

٤ كل من (د$_{١}$ × د$_{٢}$) ، $\left(\frac{د_{١}}{د_{٢}}\right)$ دالة زوجية.

٥ كل من (ر$_{١}$ × ر$_{٢}$) ، $\left(\frac{ر_{١}}{ر_{٢}}\right)$ دالة زوجية.

٦ كل من (د$_{١}$ × ر$_{١}$) ، $\left(\frac{د_{١}}{ر_{١}}\right)$ دالة فردية.

مثال ③

ابحث نوع كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

١ د (س) = س^{٢} + جتا س ٢ د (س) = س^{٢} + جا س ٣ د (س) = ٣ س^{٤} ظا س

الحل

١ ∵ د (− س) = (− س)^{٢} + جتا (− س) = س^{٢} + جتا س = د (س)

∴ د دالة زوجية.

حل آخر : بفرض أن : د (س) = د$_{١}$ (س) + د$_{٢}$ (س)

حيث د$_{١}$ (س) = س^{٢} ، د$_{٢}$ (س) = جتا س دالتان زوجيتان.

∴ د$_{١}$ + د$_{٢}$ دالة زوجية. ∴ د دالة زوجية.

٢ ∵ د (− س) = (− س)^{٢} + جا (− س) = س^{٢} − جا س

= − (− س^{٢} + جا س) = − د (س)

∴ د دالة فردية.

لاحظ أن : الدالة الناتجة من جمع دالتين فرديتين هى دالة فردية.

٣ ∵ د (− س) = ٣ (− س)^{٤} ظا (− س) = ٣ س^{٤} (− ظا س)

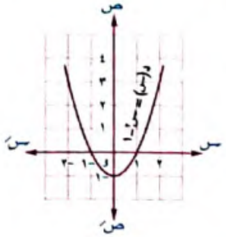
= −٣ س^{٤} ظا س = − د (س)

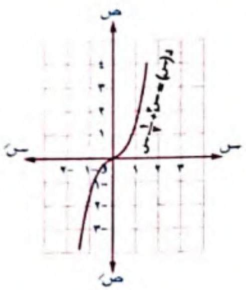
∴ د دالة فردية.

لاحظ أن : الدالة الناتجة من ضرب دالتين إحداهما زوجية والأخرى فردية هى دالة فردية.

مثال ④

كل من الأشكال الآتية يوضح الشكل البيانى للدالة د ، حدد من الرسم ما إذا كانت الدالة د زوجية أم فردية أم غير ذلك وحقق إجابتك جبريًا :


شكل(١)


شكل(٢)

شكل(٣)

الحل

شكل(١) : د (س) = س^{٢} − ١

∵ مجال الدالة د = ح والمنحنى متماثل حول محور الصادات ∴ الدالة د دالة زوجية.

التحقق الجبرى : ∵ لكل س ، − س ∈ ح

د (− س) = (− س)^{٢} − ١ = س^{٢} − ١ = د (س) ∴ الدالة د دالة زوجية.

شكل(٢) : د (س) = س^{٣} + $\frac{١}{٢}$ س

∵ مجال الدالة د = ح والمنحنى متماثل حول نقطة الأصل

∴ الدالة د دالة فردية.

التحقق الجبرى : ∵ لكل س ، − س ∈ ح

$\text{د}(-\text{س}) = (-\text{س})^{٣} + \frac{١}{٢}(-\text{س}) = -\text{س}^{٣} - \frac{١}{٢}\text{س} = -(\text{س}^{٣} + \frac{١}{٢}\text{س}) = -\text{د}(\text{س})$

∴ الدالة د دالة فردية.

مثلاً (٢) : $\text{د}(\text{س}) = ٢\text{س} - \text{س}^{٢}$

∵ مجال الدالة د = ح والمنحنى ليس متماثلاً حول محور الصادات وليس متماثلاً حول نقطة الأصل.

∴ الدالة د ليست زوجية وليست فردية.

التحقق الجبرى : لكل س ، − س ∈ ح

$\text{د}(-\text{س}) = ٢(-\text{س}) - (-\text{س})^{٢} = -٢\text{س} - \text{س}^{٢} = -(٢\text{س} + \text{س}^{٢})$

∴ $\text{د}(-\text{س}) \neq \text{د}(\text{س})$ ، $\text{د}(-\text{س}) \neq -\text{د}(\text{س})$

∴ الدالة د ليست زوجية وليست فردية.

مثال ⑤

ابحث نوع كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

١ $\text{د}(\text{س}) = ٣\text{س}^{٤} - ٥\text{س}^{٢} + ١$

٢ $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^{٣} + ٢\text{س} - ٥$

٣ $\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{س} \text{ جا } ٣\text{س}}{١ + \text{س}^{٢}}$

٤ $\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{س} - \text{ظا س}}{\text{س}^{٢} + \text{س}}$

الحل

١ ∵ $\text{د}(-\text{س}) = ٣(-\text{س})^{٤} - ٥(-\text{س})^{٢} + ١ = ٣\text{س}^{٤} - ٥\text{س}^{٢} + ١ = \text{د}(\text{س})$

∴ الدالة د زوجية.

٢ ∵ $\text{د}(-\text{س}) = (-\text{س})^{٣} + ٢(-\text{س}) - ٥ = -\text{س}^{٣} - ٢\text{س} - ٥ = -(\text{س}^{٣} + ٢\text{س} + ٥)$

∴ $\text{د}(-\text{س}) \neq \text{د}(\text{س})$ ، $\text{د}(-\text{س}) \neq -\text{د}(\text{س})$

∴ الدالة د ليست زوجية وليست فردية.

٣ ∵ $\text{د}(-\text{س}) = \frac{(-\text{س}) \text{ جا } ٣(-\text{س})}{١ + (-\text{س})^{٢}} = \frac{(-\text{س}) \cdot (-\text{جا } ٣\text{س})}{١ + \text{س}^{٢}}$

$= \frac{-(\text{س} \cdot -\text{جا } ٣\text{س})}{١ + \text{س}^{٢}} = -\text{د}(\text{س})$

∴ الدالة د فردية.

٤ ∵ $\text{د}(-\text{س}) = \frac{(-\text{س}) - \text{ظا}(-\text{س})}{(-\text{س})^{٢} + (-\text{س})} = \frac{-\text{س} - (-\text{ظا س})}{\text{س}^{٢} - \text{س}} = \frac{-\text{س} + \text{ظا س}}{\text{س}^{٢} - \text{س}}$

$= \frac{-(\text{س} - \text{ظا س})}{-(\text{س}^{٢} + \text{س})} = \frac{\text{س} - \text{ظا س}}{\text{س}^{٢} + \text{س}} = \text{د}(\text{س})$ ∴ الدالة د زوجية.

مثال ⑥

ابحث نوع كل من الدالتين المعرفتين بالقاعدتين الآتيتين من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

١ $\text{د}(\text{س}) = (\text{س} - \frac{١}{\text{س}})^{٣} + (\text{س} + \frac{١}{\text{س}})^{٣}$

٢ $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} -\frac{١}{\text{س}} & ، \text{س} < ٠ \\ \frac{١}{\text{س}} & ، \text{س} > ٠ \end{cases}$

الحل

١ ∵ $\text{د}(-\text{س}) = (-\text{س} + \frac{١}{\text{س}})^{٣} + (-\text{س} - \frac{١}{\text{س}})^{٣}$

$= [-(\text{س} - \frac{١}{\text{س}})]^{٣} + [-(\text{س} + \frac{١}{\text{س}})]^{٣}$

$= -(\text{س} - \frac{١}{\text{س}})^{٣} - (\text{س} + \frac{١}{\text{س}})^{٣}$

$= -[(\text{س} - \frac{١}{\text{س}})^{٣} + (\text{س} + \frac{١}{\text{س}})^{٣}] = -\text{د}(\text{س})$

∴ الدالة د فردية.

٢ ∵ $\text{د}(-\text{س}) = \begin{cases} -\frac{١}{(-\text{س})} & ، (-\text{س}) < ٠ \\ \frac{١}{(-\text{س})} & ، (-\text{س}) > ٠ \end{cases}$

$= \begin{cases} \frac{١}{\text{س}} & ، \text{س} > ٠ \\ -\frac{١}{\text{س}} & ، \text{س} < ٠ \end{cases}$ «وبتبديل كتابة القاعدتين»

$= \begin{cases} -\frac{١}{\text{س}} & ، \text{س} < ٠ \\ \frac{١}{\text{س}} & ، \text{س} > ٠ \end{cases} = \text{د}(\text{س})$

∴ الدالة د زوجية.

الدالة الأحادية

تعريف

الدالة د : س ⟵ ص تسمى دالة أحادية إذا كان :

لكل أ ، ب ∈ س ، د(أ) = د(ب) فإن : أ = ب

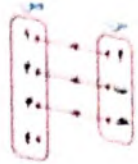
أو : لكل أ ، ب ∈ س ، أ ≠ ب فإن : د(أ) ≠ د(ب)

وهذا يعنى أنه لا يوجد عنصران فى مجال الدالة الأحادية لهما نفس الصورة.

فمثلاً :

•

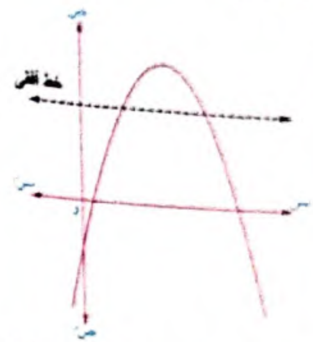
دالة ليست أحادية
من س ← ص



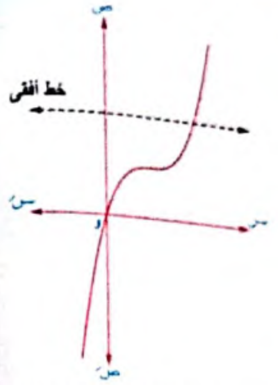
دالة أحادية
من س ← ص

اختبار الخط الأفقي

إذا وجد خط أفقي (يوازي محور السينات) يقطع منحنى الدالة في أكثر من نقطة فإن المنحنى يمثل دالة ليست أحادية.



الخط الأفقي يقطع المنحنى في نقطتين لذلك فإن الدالة ليست أحادية



أي خط أفقي يقطع المنحنى في نقطة واحدة على الأكثر لذلك فإن الدالة أحادية

مثال ٧

أثبت أن كلاً من الدالتين المعرفتين بالقاعدتين الآتيتين دالة أحادية :

١ د (س) = س^{٢} + ٢ ٢ د (س) = $\frac{٢ س - ٣}{٣ س + ٢}$

الحل

١ بفرض أن أ ، ب ∈ مجال الدالة د

∴ د (أ) = أ^{٢} + ٢ ، د (ب) = ب^{٢} + ٢ ويوضع د (أ) = د (ب)

∴ أ^{٢} + ٢ = ب^{٢} + ٢ ∴ أ^{٢} = ب^{٢}

∴ أ = ب ∴ الدالة د دالة أحادية.

٢ بفرض أن أ ، ب ∈ مجال الدالة د

∴ د (أ) = $\frac{٢ أ - ٣}{٣ أ + ٢}$ ، د (ب) = $\frac{٢ ب - ٣}{٣ ب + ٢}$ ويوضع د (أ) = د (ب)

∴ $\frac{٢ أ - ٣}{٣ أ + ٢}$ = $\frac{٢ ب - ٣}{٣ ب + ٢}$ ∴ (٢ أ - ٣) (٣ ب + ٢) = (٣ أ + ٢) (٢ ب - ٣)

∴ ٦ أ ب + ٤ أ - ٩ ب - ٦ = ٦ أ ب - ٩ أ + ٤ ب - ٦

∴ ٤ أ + ٩ أ = ٤ ب + ٩ ب ∴ ١٣ أ = ١٣ ب

∴ أ = ب ∴ الدالة د دالة أحادية.

مثال ٨

أثبت أن كلاً من الدالتين المعرفتين بالقاعدتين الآتيتين ليست أحادية :

١ د (س) = ٣ - س^{٢} ٢ د (س) = س^{٢} + س

الحل

١ بفرض أن أ ، ب ∈ مجال الدالة د

∴ د (أ) = ٣ - أ^{٢} ، د (ب) = ٣ - ب^{٢} ويوضع د (أ) = د (ب)

∴ ٣ - أ^{٢} = ٣ - ب^{٢} ∴ أ^{٢} = ب^{٢}

∴ أ = ± ب ∴ أ لها قيمتان هما ب ، - ب

∴ الدالة د ليست أحادية.

٢ بفرض أن أ ، ب ∈ مجال الدالة د

∴ د (أ) = أ^{٢} + أ ، د (ب) = ب^{٢} + ب

ويوضع د (أ) = د (ب)

∴ أ^{٢} + أ = ب^{٢} + ب ∴ أ^{٢} - ب^{٢} + أ - ب = ٠

∴ (أ - ب) (أ + ب) + (أ - ب) = ٠ ∴ (أ - ب) (أ + ب + ١) = ٠

∴ إما أ - ب = ٠ ومنها أ = ب أو أ + ب + ١ = ٠ ومنها أ = - ب - ١

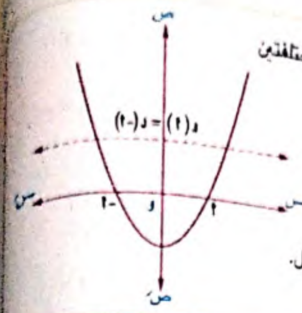
∴ أ لها قيمتان هما ب ، - ب - ١

∴ الدالة د ليست أحادية.

ملاحظتان

• الدوال الزوجية بصفة عامة ليست دوال أحادية لأنه لكل قيمتين مختلفتين ا ، - ا ∈ مجال الدالة الزوجية يكون د (- ا) = د (ا)

أي أن القيمتين ا ، - ا للمتغير س تناظرهما قيمة وحيدة للمتغير ص ولذلك فإن الدالة الزوجية ليست دالة أحادية كما يتضح ذلك باستخدام اختبار الخط الأفقي كما في الشكل المقابل.



• الدالة الفردية قد تكون أحادية أو غير أحادية.

مثال 1

مثل بيانيًا منحنى دالة زوجية يمر بالنقط: (٠ ، -٢) ، (-١ ، -١) ، (-٢ ، ٢)

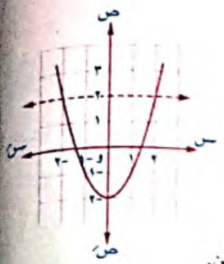
ومن الرسم: بيّن أن الدالة ليست أحادية.

الحل

∵ الدالة زوجية ∴ د (س) = د (- س)

∴ د (١) = د (-١) = -١ ، د (٢) = د (-٢) = ٢

أي أن منحنى الدالة يمر أيضًا بالنقطتين (١ ، -١) ، (٢ ، ٢)

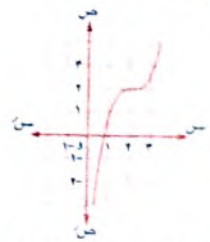


من الرسم: الدالة ليست أحادية لأنه يوجد خط أفقي يقطع منحنى الدالة في نقطتين.

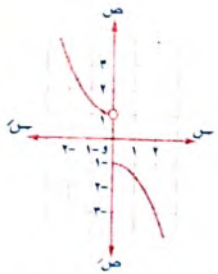
ملاحظة

إذا كانت الدالة د في تزايد مستمر أو في تناقص مستمر لجميع القيم التي تنتمي إلى مجال الدالة فإن الدالة د تكون أحادية.

فمثلًا: في كل من الشكلين الآتيين:



الدالة د في تزايد مستمر على مجالها لذلك د دالة أحادية



الدالة د في تناقص مستمر على مجالها لذلك الدالة د دالة أحادية

تمارين 3

على بعض خواص الدوال (الدوال الزوجية و الفردية - الدوال الأحادية)

اختبر نفسك

• فهم • تطبيق • مستويات عليا • من أسئلة الكتاب المدرسي

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١ الدالة الزوجية من بين الدوال المعرفة بالقواعد الآتية هي ....

(أ) د (س) = س^{3} (ب) د (س) = جا س

(ج) د (س) = س جتا س (د) د (س) = س جا س

٢ الدالة الفردية من بين الدوال المعرفة بالقواعد الآتية هي ....

(أ) د (س) = س^{2} جا س (ب) د (س) = ظا^{2} س

(ج) د (س) = جتا س (د) د (س) = ١

٣ أي قاعدة مما يأتي تكون قاعدة لدالة فردية ؟

(١) د (س) = $\frac{1}{س}$ + س + $\frac{1}{س^{3}}$ (٢) د (س) = س^{2} ظا س

(٣) د (س) = س جا س

(أ) (١) ، (٢) فقط (ب) (١) فقط

(ج) (٢) ، (٣) فقط (د) جميع ما سبق.

٤ نوع الدالة د : د (س) = $\frac{جا س}{س}$ هي ....

(أ) زوجية. (ب) فردية.

(ج) لا زوجية ولا فردية. (د) أحادية.

٥ الدالة د : د (س) = س جتا س ....

(أ) زوجية. (ب) فردية.

(ج) ليست زوجية ولا فردية. (د) أحادية.

٦ كل الدوال الآتية زوجية ماعدا ....

(أ) د (س) = جا س (ب) د (س) = جتا س

(ج) د (س) = س^{2} - ١ (د) د (س) = ١

(٧) الدالة التي ليست زوجية فيما يلي هي ....

(أ) ص = $\frac{١}{س}$ (ب) ص = قا س

(ج) ص = $س^٢$ + جا س (د) ص = ٣ $س^٤$ − ٢ $س^٢$ + ٢٧

(٨) إذا كانت : د (س) = $\frac{١}{جا س}$ فإن : ....

(أ) د (س) = $\frac{١}{د (س)}$ (ب) د (س) = − د (− س)

(ج) د (س) = د (− س) (د) د (− س) = د $\left(\frac{١}{س}\right)$

(٩) إذا كانت د دالة فردية ، د (١) = ٢ فأى من النقط الآتية تقع على منحنى د ؟

(أ) (−١ ، ٢) (ب) (−١ ، −٢) (ج) (١ ، −٢) (د) (−١ ، ٠)

(١٠) إذا كانت د دالة فردية ، أ ∈ مجال د فإن : د (أ) + د (− أ) = ...

(أ) صفر (ب) ٢ د (أ) (ج) ٢ أ (د) د (أ)

(١١) اذا كانت : د (س) دالة فردية فإن : د (أ) − د (− أ) = ...

(أ) صفر (ب) د (أ) (ج) ٢ د (أ) (د) د (٢ أ)

(١٢) اذا كانت : د (س) دالة زوجية فإن : د (أ) − د (− أ) = ...

(أ) صفر (ب) د (أ) (ج) ٢ د (أ) (د) د (٢ أ)

(١٣) إذا كانت د دالة زوجية ، ٢ ∈ مجال د فإن : د (٢) + د (−٢) = ...

(أ) صفر (ب) ٤ (ج) ٢ (د) ٢ د (٢)

(١٤) الدالة د : د (س) = (س + جا س) (..........) تكون زوجية.

(أ) $س^٣$ + ظا س (ب) ١ + جا س

(ج) ٤ − $س^٢$ (د) س − جتا س

(١٥) إذا كانت د دالة زوجية وكان منحنى الدالة يمر بالنقطة (−٣ ، ٢ م + ١) وكانت د (٣) = ٥

فإن : م = ...

(أ) −١ (ب) صفر (ج) ١ (د) ٢

(١٦) إذا كانت الدالة د دالة زوجية فى الفترة [أ ، ب] فإن : ب = ...

(أ) أ (ب) − أ (ج) ٢ أ (د) $أ^٢$

(١٧) إذا كانت الدالة د فردية فى [أ ، ب] ، أ < ٠ فإن : ب = ...

(أ) أ (ب) − أ (ج) ٢ أ (د) $أ^٢$

(١٨) إذا كانت : د دالة زوجية وكان د (٥) = ١ ، د (−٥) = ٣ − ك فإن : ك = ...

(أ) ١ (ب) ٥ (ج) ٣ (د) ٢

(١٩) إذا كانت د دالة حيث د :]−٥ ، ٥] ⟵ ح ، د (س) = $س^٢$ فإن الدالة د (س) تكون ....

(أ) زوجية. (ب) فردية.

(ج) أحادية. (د) ليست زوجية وليست فردية.

(٢٠) إذا كانت : د دالة زوجية مجالها]−٥ ، ٥[فإن مجموعة حل المعادلة د (س) = د (س − ٢) هى ....

(أ) {٢} (ب) {١} (ج) {٠} (د) {−١}

(٢١) إذا كانت : د (س) = أ $س^٣$ + ب س + حـ ، دالة فردية فإن : حـ = ...

(أ) ٢ (ب) ١ (ج) صفر (د) −١

(٢٢) إذا كانت د : د (س) = $س^٢$ + أ س + ٩ دالة زوجية فإن : أ = ...

(أ) ٦ (ب) ٣ (ج) صفر (د) −٦

(٢٣) إذا كانت : د (س) = $س^٢$ − س فإن : | د (س) + د (− س) | = ...

(أ) صفر (ب) ١ (ج) ٢ (د) ٤

(٢٤) إذا كانت د : د (س) دالة زوجية وكان : د (س) + $س^٢$ د (− س) = ٣ فإن : د (١) = ...

(أ) ١ (ب) $\frac{١}{٤}$ (ج) $\frac{٣}{٢}$ (د) ٢

(٢٥) إذا كانت د دالة فردية فإن : $\frac{٢ د (س) + ٨ د (− س)}{٣ د (س)}$ = ...

(أ) صفر (ب) −٢ (ج) −٤ (د) ٤

(٢٦) إذا كانت : د دالة فردية وكان س د (س) + $س^٢$ د (− س) = ٢ فإن : د (٢) = ...

(أ) −٢ (ب) ٢ (ج) $\frac{-١}{٢}$ (د) $\frac{١}{١٠}$

(٢٧) إذا كانت د : د (س) = أ $س^٣$ + ب دالة فردية وكان منحنى الدالة يمر بالنقطة (٢ ، ٨)

فإن : أ + $ب^٢$ = ...

(أ) صفر (ب) −١ (ج) ١ (د) ٥

(٢٨) الدالة الأحادية من بين الدوال المعرفة بالقواعد الآتية هي ....

(أ) د(س) = جا س (ب) د(س) = $س^3$

(جـ) د(س) = $س^2$ (د) د(س) = $س^4 + س^2$

(٢٩) الدالة الأحادية من بين الدوال المعرفة بالقواعد الآتية هي ....

(أ) د(س) = ٣ − $س^2$ (ب) د(س) = $س^2 + ٣$

(جـ) د(س) = جا س ظا س (د) د(س) = $س^3 + س$

(٣٠) كل الدوال المعرفة بالقواعد التالية أحادية ما عدا الدالة التي قاعدتها ....

(أ) د(س) = س (ب) د(س) = س + ٦

(جـ) د(س) = $س^3$ (د) د(س) = $(س − ٢)^2$

(٣١) الدوال المعرفة بالقواعد الآتية كلها أحادية ما عدا ؟

(أ) د(س) = $س^3$ (ب) ر(س) = ٣س

(جـ) ك(س) = $\frac{١}{س}$ (د) ع(س) = $س^2$

(٣٢) كل الدوال المعرفة بالقواعد الآتية ليست أحادية ما عدا ....

(أ) د(س) = $س^2$ (ب) د(س) = ٥

(جـ) د(س) = س + ٢ (د) د(س) = جا س

(٣٣) إذا كان د ، ر دالتين حيث : د(س) = $س^2$ ، ر(س) = س + ٢

فإن : (ر ∘ د) هي دالة ....

(أ) أحادية. (ب) فردية. (جـ) زوجية. (د) خطية.

(٣٤) إذا كانت الدالة في تناقص مستمر لجميع قيم س ∈ مجال الدالة فإن الدالة تكون ....

(أ) زوجية. (ب) فردية. (جـ) أحادية. (د) **ليست أحادية.**

(٣٥) إذا كانت الدالة متزايدة لجميع قيم س ∈ مجال الدالة فإن الدالة تكون ....

(أ) أحادية. (ب) زوجية. (جـ) فردية. (د) **ليست أحادية.**

(٣٦) الدالة د حيث د(س) = ٥ س متماثلة حول ....

(أ) النقطة (٢ ، ١) (ب) المستقيم ص = ١

(جـ) النقطة (٥ ، ٠) (د) النقطة (٠ ، ٠)

(٣٧) الدالة د : د(س) = $س^3$ + ٥ س متماثلة حول ....

(أ) محور السينات. (ب) محور الصادات. (جـ) نقطة الأصل. (د) لا يمكن أن تحدد.

(٣٨) الدالة د : د(س) = $س^4$ + $س^2$ + ١ متماثلة حول ....

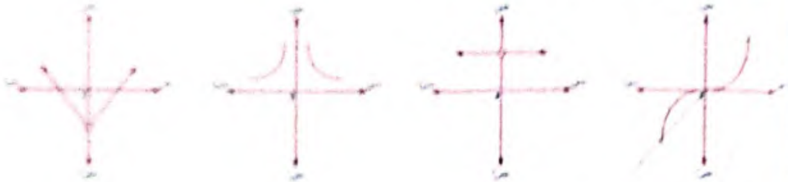
(أ) نقطة الأصل. (ب) محور السينات.

(جـ) محور الصادات. (د) ليس لها نقطة أو محور تماثل.

(٣٩) الدالة د : د(س) = جا ٢ س متماثلة بالنسبة للنقطة ....

(أ) (٠ ، ٠) (ب) (٢ ، ٠) (جـ) (−٢ ، ٠) (د) (−٢ ، ٢)

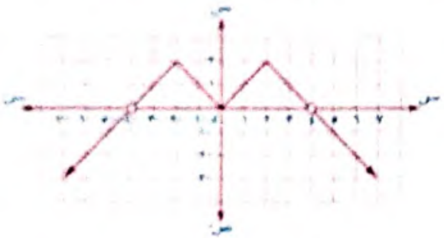
(٤٠) أي من الدوال الآتية ليست زوجية ؟



(أ) (ب) (جـ) (د)

(٤١) الشكل المقابل يمثل منحنى

الدالة د ، فإن د تكون ....



(أ) أحادية.

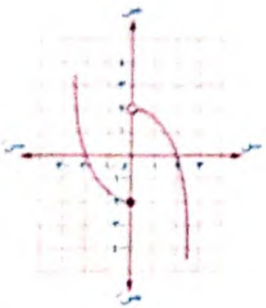
(ب) زوجية.

(جـ) فردية.

(د) ليست زوجية ولا فردية.

(٤٢) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د

فإن د تكون ....



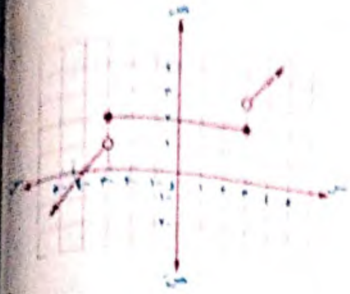
(أ) أحادية.

(ب) زوجية.

(جـ) فردية.

(د) ليست زوجية وليست فردية.

(٤٣) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د



فإن د تكون ....

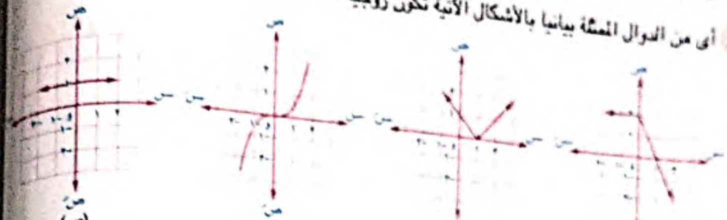
(أ) أحادية.

(ب) زوجية.

(جـ) فردية.

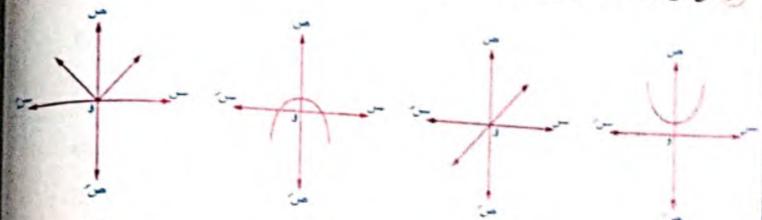
(د) ليست زوجية ولا فردية.

(٤٤) أى من الدوال الممثلة بيانيا بالأشكال الآتية تكون زوجية ؟



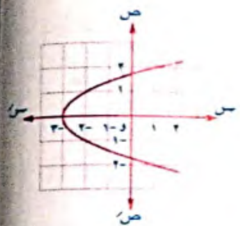
(أ) (ب) (جـ) (د)

(٤٥) أى من الأشكال الآتية يعبر عن دالة أحادية ؟



(أ) (ب) (جـ) (د)

(٤٦) المنحنى الموضح بالشكل المقابل



متماثل حول المستقيم الذى معادلته ....

(أ) س = صفر

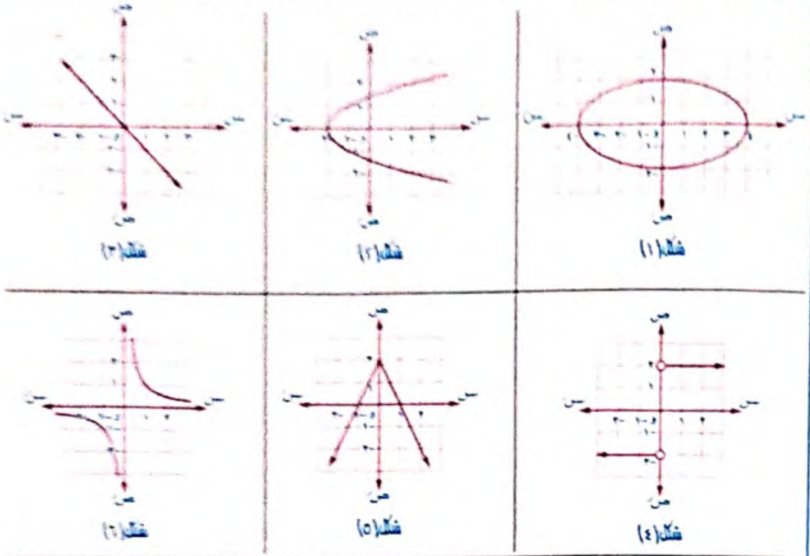
(ب) ص = صفر

(جـ) ص = -٢

(د) س = ٢

ثانيا الأسئلة المقالية

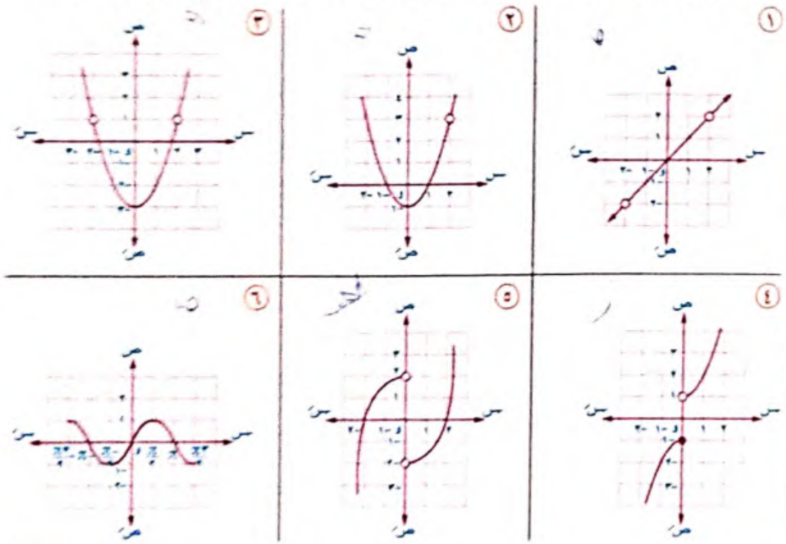
(١) فى كل من الأشكال الآتية اذكر ما إذا كان تماثل المنحنى حول محور السينات أو محور الصادات أو نقطة الأصل :



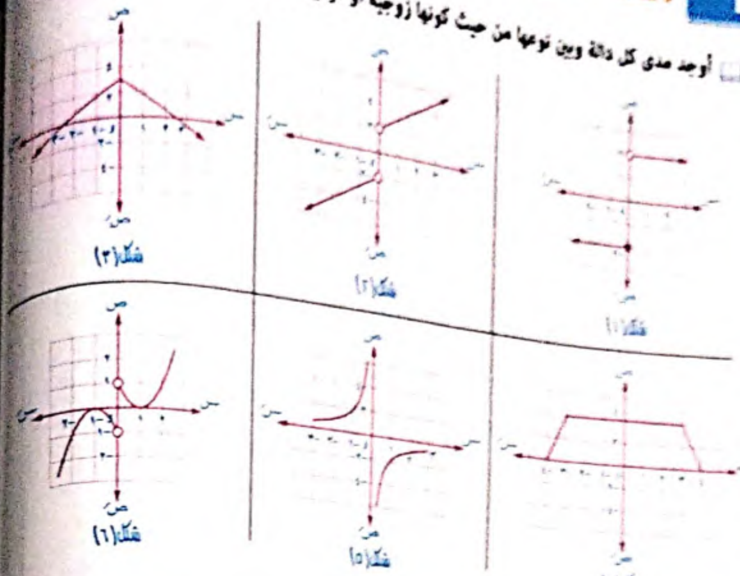
شكل (١) شكل (٢) شكل (٣)

شكل (٤) شكل (٥) شكل (٦)

(٢) اذكر نوع كل من الدوال الممثلة بالأشكال البيانية الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

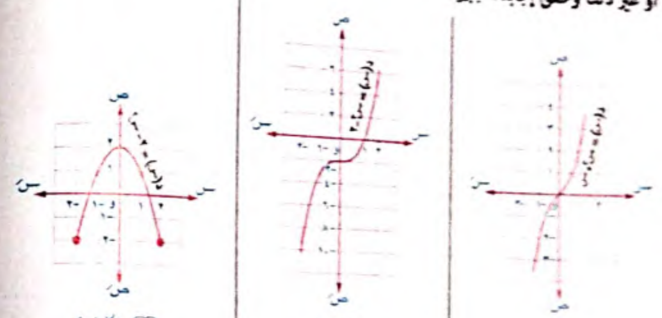


أوجد مدى كل دالة وبين نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :



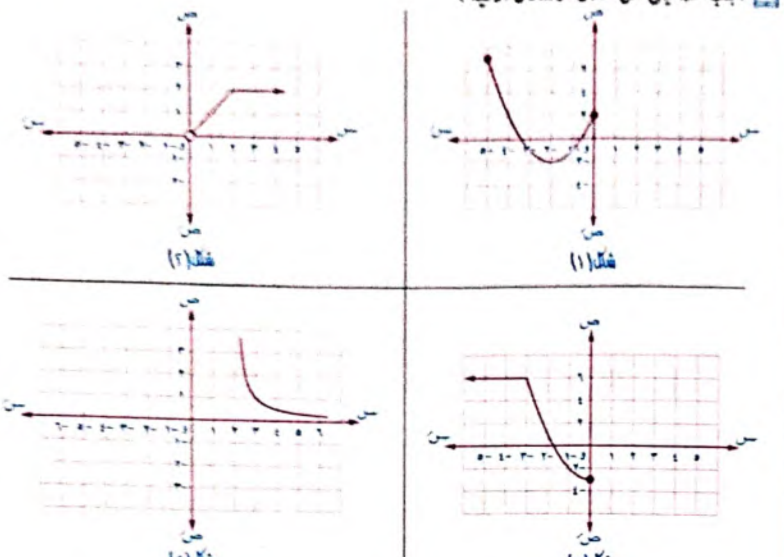
شكل (١) شكل (٢) شكل (٣) شكل (٤) شكل (٥) شكل (٦)

يوضح كل شكل من الأشكال البيانية الآتية منحنى الدالة د ، حدد من الرسم ما إذا كانت الدالة د زوجية أو فردية أو غير ذلك وحقق إجابتك جبريًا.



شكل (١) شكل (٢) شكل (٣)

٥ أجب عما يلى من خلال الأشكال الآتية :



شكل (١) شكل (٢) شكل (٣) شكل (٤)

أولًا : أكمل رسم شكل (١) وشكل (٣) فى كراستك ، بحيث تصبح الدالة زوجية على مجالها.

ثانيًا : أكمل رسم شكل (٢) وشكل (٤) فى كراستك ، بحيث تصبح الدالة فردية على مجالها.

ثالثًا : حدد مجال ومدى الدالة فى كل حالة وبين أى الأشكال البيانية يمثل منحنى دالة أحادية.

٦ ابحث نوع كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

① د (س) = ٥

② د (س) = س⁴ + س² − ١

③ د (س) = ٢ س − ٤ س³

④ د (س) = س² − ٣ س + ٤

⑤ د (س) = س³ (س² − ١)

⑥ د (س) = (س − ٢)² − ٧

⑦ د (س) = $\frac{س^2 + 2}{س - 2}$

⑧ د (س) = $\frac{2 س^3 - س^5}{س}$

⑨ د (س) = $\frac{س^2}{1 + س}$

⑩ د (س) = $\sqrt[3]{س + 3}$

⑪ د (س) = (س² + ١)²

⑫ د (س) = $\sqrt[3]{س^2 + 6}$

⑬ د (س) = $\sqrt[3]{س^3 + س}$

⑭ د (س) = س² − $\frac{1}{س}$

(١٥) $د(\text{س}) = \left(\text{س} - \frac{٢}{\text{س}}\right)^٢$

(١٦) $د(\text{س}) = \left(\frac{\text{س}^٢}{٢} - \frac{٥}{\text{س}^٤}\right)^٥$

(١٧) $د(\text{س}) = \left(\frac{٢ - \text{س}}{\text{س} + ٢}\right)^٢ + \left(\frac{٢ + \text{س}}{\text{س} - ٢}\right)^٢$

(١٨) $د(\text{س}) = \left(\frac{١ - \text{س}}{\text{س} + ١}\right)^٢ - \left(\frac{١ + \text{س}}{\text{س} - ١}\right)^٢$

(١٩) $د(\text{س}) = \left(\frac{\text{س} - ١}{\text{س} + ١}\right)^٢ + \left(\frac{\text{س} + ١}{\text{س} - ١}\right)^٢$

(٢٠) $د(\text{س}) = (\text{س}^٢ + ١)^٤ - (\text{س}^٢ - ١)^٤$

(٢١) $د(\text{س}) = \text{س جتا س}$

(٢٢) $د(\text{س}) = \frac{٣\text{س}}{\text{طا س}}$

(٢٣) $د(\text{س}) = \frac{\text{س}^٢ \text{ جا ٣س}}{١ + \text{س}^٤}$

(٢٤) $د(\text{س}) = \frac{٣\text{س}^٢ - \text{جتا س}}{\text{س}^٣ - ٦\text{س}}$

(٢٥) $د(\text{س}) = \text{س}^٢ \text{ جا}^٣ \text{ س}$

(٢٦) $د(\text{س}) = \text{س جا س}^٢$

(٢٧) $د(\text{س}) = \frac{\text{س}^٢ + \text{طا س}}{\text{س}^٤ + \text{جا س}}$

(٢٨) $د(\text{س}) = \text{جا س}^٢ - \text{جا}^٢ \text{ س}$

(٢٩) $د(\text{س}) = \text{س}^٤ + \text{جا}^٤ \text{ س}$

(٣٠) $د(\text{س}) = \text{س}^٧ + \text{طا}^٥ \text{ س}$

(٣١) $د(\text{س}) = \frac{\text{جا ٣س جتا ٢س}}{\text{قا س}}$

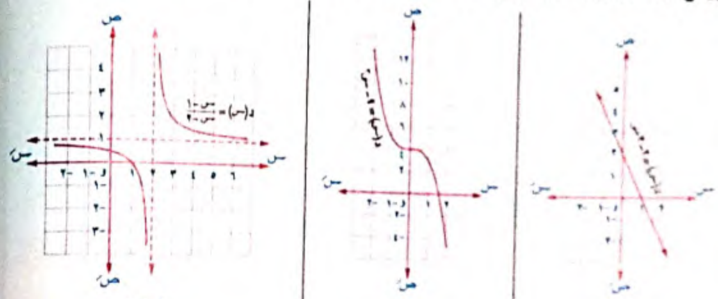
(٣٢) $د(\text{س}) = ٤^{\text{س}} + \text{جتا س} + ٢^{-٢\text{س}}$

(٣٣) $د(\text{س}) = (\text{جتا س} + \text{جا س} - ١)(\text{جتا س} + \text{جا س} + ١)$

(٣٤) $د(\text{س}) = \begin{cases} ٢\text{س} &، \text{س} \geq ٠ \\ -٢\text{س} &، \text{س} < ٠ \end{cases}$

(٣٥) $د(\text{س}) = \begin{cases} ٢\text{س} + \text{س}^٢ &، \text{س} \leq ٠ \\ ٢\text{س} - \text{س}^٢ &، \text{س} > ٠ \end{cases}$

٧ يوضح كل شكل من الأشكال البيانية الآتية منحنى الدالة د ، بين من الرسم أن الدالة د أحادية وحقق ذلك جبريًا.



شكل(١) شكل(٢) شكل(٣)

٨ اثبت أن الدوال المعرفة بالقواعد الآتية دوال أحادية :

(١) $د(\text{س}) = ٢\text{س} - ٣$

(٢) $د(\text{س}) = ٤ - \text{س}^٣$

(٣) $د(\text{س}) = \frac{٣}{٢\text{س} + ٥}$

(٤) $د(\text{س}) = \frac{٣\text{س} - ٥}{٤\text{س} + ٣}$

٩ اثبت أن الدوال المعرفة بالقواعد الآتية دوال ليست أحادية :

(١) $د(\text{س}) = ٣$

(٢) $د(\text{س}) = (\text{س} + ٣)^٢$

(٣) $د(\text{س}) = \text{س}^٢ - ٥\text{س} + ٦$

(٤) $د(\text{س}) = \frac{١}{\text{س}^٢ - ٤}$

١٠ في كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية حدد ما إذا كانت الدالة أحادية أم لا مع توضيح السبب :

(١) $د(\text{س}) = \text{س}^٣ + ١$

(٢) $د(\text{س}) = \text{س}^٢ - ١$

(٣) $د(\text{س}) = ٢\text{س}^٣ - \text{س} - ٢$

(٤) $د(\text{س}) = \text{س}^٤ + ٢\text{س}^٢ + ١$

(٥) $د(\text{س}) = \frac{٢\text{س} + ١}{\text{س} - ٢}$

(٦) $د(\text{س}) = \frac{٣ - \text{س}}{\text{س} + ٢}$

١١ اذكر نوع كل من الدوال الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

(١) د : ح ⟵ ح ، $د(\text{س}) = \text{س} + ٢$

(٢) د :]-٣ ، ٣[⟵ ح ، $د(\text{س}) = ٣\text{س}^٢$

(٣) د : ح$^+$ ⟵ ح حيث $د(\text{س}) = \text{س}^٢$

(٤) د : د(س) = س^٢ حيث س ∈ ح − {٣}

١٢ إذا كانت د دالة مجالها ح أوجد قيمة : $\frac{٧ د(-٥) + ٣ د(٥)}{٢ د(-٥)}$ إذا كان :

(١) د دالة فردية.

(٢) د دالة زوجية.

١٣ إذا كانت د ، ر دالتين حقيقيتين حيث $د(\text{س}) = (١ - \text{س})^٢$ ، $ر(\text{س}) = (١ + \text{س})^٢$

فبين أي الدوال الآتية زوجية وأيها فردية وأيها غير ذلك :

(١) د + ر

(٢) د − ر

(٣) د . ر

(٤) $\frac{د}{ر}$

١٤ إذا كانت $د_١$ ، $د_٢$ ، $ر_١$ ، $ر_٢$ دوال حقيقية حيث $د_١(س) = س^٤$ ، $د_٢(س) = جا^٢ س$ ، $ر_١(س) = ٢ س^٣$ ، $ر_٢(س) = جا^٣ س$

فبين أى الدوال الآتية زوجية وأيها فردية وأيها غير ذلك :

① $د_١ + ر_٢$	② $د_١ - د_٢$	③ $ر_١ + ر_٢$
④ $د_١ \cdot ر_٢$	⑤ $ر_١ \cdot ر_٢$	⑥ $\frac{د_٢}{د_١}$

١٥ مثل بيانيًا منحنى يحقق الشروط الآتية :

① يمر بالنقط (٠ ، −٢) ، (٢ ، ٢) ، (٣ ، ٧) ويمثل دالة زوجية.

② يمر بالنقط (٠ ، ٠) ، (−٢ ، ١) ، (−٣ ، ٥) ويمثل دالة فردية.

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت د دالة أحادية وكانت النقطة (٢ ، ٣) تنتمى لبيان الدالة د فأى النقط الآتية يمكن أن تنتمى لبيان د ؟

(أ) (٥ ، ٣) (ب) (٢ ، −١) (جـ) (٣ ، ٢) (د) كل ما سبق.

② إذا كانت د دالة أحادية وكانت النقطتان (٢ ، أ) ، (٣ ، ب) تنتميان للدالة د فأى مما يأتى صحيح دائمًا ؟

(أ) أ > ب (ب) أ = ب (جـ) أ ≠ ب (د) أ + ب = ٥

③ إذا كانت د دالة زوجية وكان د (س) + $س^٢$ د (−س) = ٣ فإن : د (١) = ...

(أ) $\frac{١}{٤}$ (ب) ١ (جـ) $١\frac{١}{٢}$ (د) ٢

④ إذا كانت د دالة فردية وكان د (١) = ك وكانت د (س + ٢) = د (س) + د (٢)

فإن : د (٣) = ...

(أ) صفر (ب) ٣ ك (جـ) ٦ ك (د) ٩ ك

⑤ إذا كانت : د (س) = $\frac{١ + س}{١ - س}$ وكانت ر (س) = $\frac{١ - س}{١ + س}$ فإن كل من مجموع الدالتين وحاصل ضربهما يكون دالة ....

(أ) زوجية. (ب) فردية.

(جـ) أحادية. (د) ليست زوجية وليست فردية.

⑥ إذا كانت د دالة حقيقية وكانت س ، −س ∈ مجال الدالة فإن الدالة ر (س) = د (س) + د (−س) تكون دائمًا ....

(أ) فردية. (ب) زوجية.

(جـ) ليست زوجية وليست فردية. (د) أحادية.

⑦ إذا كانت : د معرفة على ح وكانت ٣ د (س) + ٢ د (−س) = $س^٣$ − جا س

فإن : د تكون ....

(أ) فردية. (ب) زوجية.

(جـ) ليست زوجية وليست فردية. (د) ليست أحادية.

⑧ إذا كانت : د (س) = $س^٣$ ، ر (س) = $س^٢$ + ١ فأى مما يأتى يكون دالة فردية ؟

① (د × ر) ② (د ∘ ر) ③ (ر ∘ د)

(أ) ① فقط. (ب) ② ، ③

(جـ) ① ، ② (د) ① ، ③

الدرس 4
التمثيل البيانى للدوال الأساسية ورسم الدالة مجزأة المجال

تمثيل الدالة الخطية

• نعلم أن الدالة الخطية د : ح ⟵ ح حيث د (س) = أس + ب يمثلها بيانيًا خط مستقيم يمر بالنقطة (٠ ، ب) وميله = أ

مثال ١

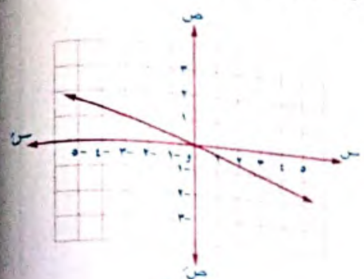
مثل بيانيًا الدالة د فى كل مما يأتى واستنتج من الرسم مدى الدالة :

١ د : ح ⟵ ح ، د (س) = $-\frac{١}{٢}$ س

٢ د : [-١ ، ٢[⟵ ح ، د (س) = ٢ س - ١

٣ د :]- ∞ ، ١] ⟵ ح ، د (س) = ٢ س - ١

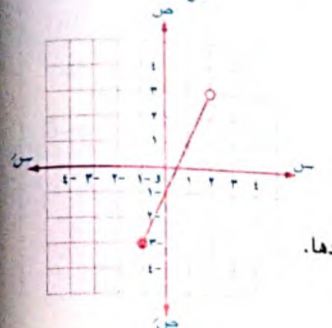
الحل



١ ∵ المجال = ح

∴ الدالة يمثلها خط مستقيم يمر بالنقطة (٠ ، ٠)

وميله = $\frac{١}{٢}$



٢ ∵ المجال = [-١ ، ٢[

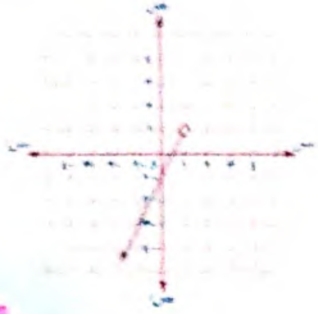
س	-١	٠	②
د (س)	-٣	-١	③

لاحظ أن النقطة (٢ ، ٣) ∉ بيان الدالة لذلك استبعدنا هذه النقطة من الشكل البيانى بوضع دائرة مفرغة عندها.

، من الرسم المدى = [-٣ ، ٣[

٣ ∵ المجال =]- ∞ ، ١]

س	①	٠	-١
د (س)	①	-١	-٢



لاحظ أن النقطة (١ ، ١) ∉ بيان الدالة لذلك استبعدناها من الشعاع الممثل للدالة بوضع دائرة مفرغة عندها.

من الرسم : المدى =]- ∞ ، ١[

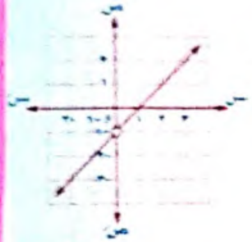
مثال ٢

مثل بيانيًا الدالة د : ح - {٠} ⟵ ح ، د (س) = $\frac{س^٢ - س}{س}$ ومن الرسم استنتج مدى الدالة.

الحل

∵ مجال الدالة د = ح - {٠}

، د (س) = $\frac{س^٢ - س}{س} = \frac{س (س - ١)}{س}$ = س - ١ يمثلها خط مستقيم



س	-١	⓪	١
د (س)	-٢	⊖①	٠

، المدى = ح - {-١}

> **لاحظ أنه**
> تم وضع دائرة مفرغة عند النقطة التى إحداثيها السينى س = ٠ لأنها لا تنتمى للمجال.

مثال ٣

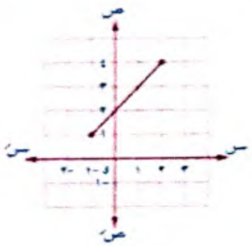
إذا كانت د$_١$:]- ∞ ، ٢] ⟵ ح حيث د$_١$ (س) = ٢ س - ١ ، د$_٢$: [-١ ، ٥] ⟵ ح حيث د$_٢$ (س) = ٣ - ٢ س فارسم الدالة د$_١$ + د$_٢$ ومن الرسم استنتج مداها.

الحل

∵ مجال د$_١$ =]- ∞ ، ٢] ، مجال د$_٢$ = [-١ ، ٥]

∴ مجال (د$_١$ + د$_٢$) =]- ∞ ، ٢] ∩ [-١ ، ٥] = [-١ ، ٢]

، ∵ (د$_١$ + د$_٢$) (س) = ٢ س - ١ + ٣ - ٢ س = س + ٢



س	-١	٠	٢
(د$_١$ + د$_٢$) (س)	١	٢	٤

مدى (د$_١$ + د$_٢$) = [١ ، ٤]

تمثيل الدالة التربيعية

مثال ④

مثل بيانيًا الدالة د : د (س) = س^{٢} − س حيث س ∈ [−١ ، ٢]

الحل

∵ د (س) = س^{٢} − س ، المجال = [−١ ، ٢]

∴ الإحداثي السيني لرأس المنحنى = $\frac{-ب}{٢أ}$ = $\frac{١}{٢}$

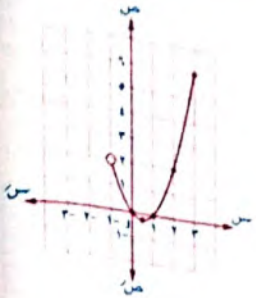
، ∵ د $(\frac{١}{٢})$ = $(\frac{١}{٢})^{٢}$ − $\frac{١}{٢}$ = −$\frac{١}{٤}$

∴ رأس المنحنى هو $(\frac{١}{٢} ، \frac{-١}{٤})$

س	①−	.	$\frac{١}{٢}$	١	٢	٣
د (س)	②	.	$\frac{-١}{٤}$	.	٢	٦

تذكر أن

نقطة رأس منحنى الدالة التربيعية د : د (س) = أ س^{٢} + ب س + جـ هو $(\frac{-ب}{٢أ} ، د(\frac{-ب}{٢أ}))$



من الرسم :

• المدى = [−$\frac{١}{٤}$ ، ٦]

• الدالة تناقصية في]−١ ، $\frac{١}{٢}$[وتزايدية في]$\frac{١}{٢}$ ، ٢]

تمثيل الدالة مجزأة المجال (ذات المقاطع)

مثال ⑤

مثل بيانيًا الدالة د : د (س) = { ٢ − س ، −١ ≤ س < ٢ ؛ س − ٢ ، ٢ ≤ س < ٥ } ومن الرسم :

١ عين مجال ومدى الدالة د

٢ ابحث اطراد الدالة د

٣ اذكر نوع الدالة د من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك مع بيان السبب.

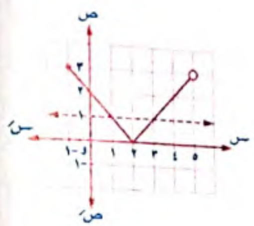
٤ اذكر هل الدالة د أحادية أم لا مع بيان السبب.

الحل

الدالة د معرفة بقاعدتين

• د$_{١}$ (س) = ٢ − س حيث س ∈ [−١ ، ٢[

س	−١	.	②
د$_{١}$ (س)	٣	٢	⓪



• د$_{٢}$ (س) = س − ٢ حيث س ∈ [٢ ، ٥[

س	٢	٢	⑤
د$_{٢}$ (س)	.	١	③

لاحظ أن

٢ ∉ [−١ ، ٢[بينما ٢ ∈ [٢ ، ٥[لذلك ٢ ∈ مجال د وبالتالي (٢ ، ٠) ∈ بيان د أي لا نضع دائرة مفرغة عند النقطة (٢ ، ٠) في الرسم

١ مجال د = [−١ ، ٢[∪ [٢ ، ٥[= [−١ ، ٥[، مدى د = [٠ ، ٣]

٢ الدالة د تناقصية في الفترة]−١ ، ٢[وتزايدية في الفترة]٢ ، ٥[

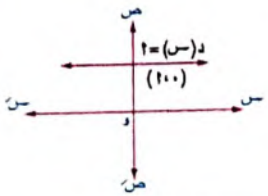
٣ الدالة ليست زوجية وليست فردية لأنها غير متماثلة حول محور الصادات وغير متماثلة حول نقطة الأصل

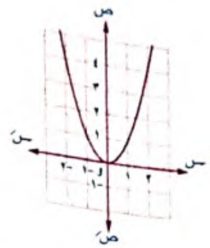
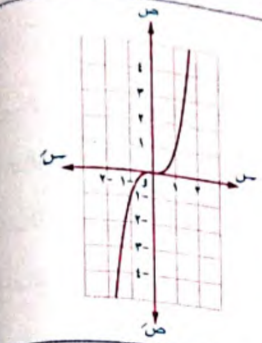
٤ الدالة د ليست أحادية لوجود خط أفقي يقطع الشكل البياني للدالة د في نقطتين.

الصور الأساسية لبعض الدوال

سوف نتعرف الآن على التمثيل البياني للصور البسيطة (الصور الأساسية) لبعض الدوال الحقيقية وذلك تمهيدًا لاستخدامها في تمثيل الدوال الحقيقية بصورها المختلفة في الدرس القادم.

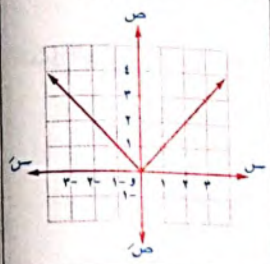
١ الصور الأساسية لبعض دوال كثيرات الحدود

	الدالة الثابتة	دالة الدرجة الأولى (الخطية)
الصورة الأساسية	د : ح ⟵ ح ، د (س) = أ حيث أ ∈ ح	د : ح ⟵ ح ، د (س) = س
التمثيل البياني		
المدى والاطراد والخواص	• مدى الدالة = {أ} • الدالة ثابتة على مجالها. • الدالة زوجية (متماثلة حول محور الصادات). • الدالة ليست أحادية.	• مدى الدالة = ح • الدالة تزايدية على مجالها ح • الدالة فردية (متماثلة حول نقطة الأصل). • الدالة أحادية.

	دالة الدرجة الثانية (التربيعية)	دالة الدرجة الثالثة (التكعيبية)
الصورة الأساسية	د : ح ⟵ ح ، د (س) = $س^٢$	د : ح ⟵ ح ، د (س) = $س^٣$
التمثيل البيانى		
المدى والاطراد والخواص	* مدى الدالة = [٠ ، ∞[* الدالة تناقصية فى]− ∞ ، ٠] ، وتزايدية فى [٠ ، ∞[* الدالة زوجية (متماثلة حول محور الصادات). * الدالة ليست أحادية.	* مدى الدالة = ح * الدالة تزايدية على مجالها ح * الدالة فردية (متماثلة حول نقطة الأصل). * الدالة أحادية.

٤ الصورة الأساسية لدالة المقياس (دالة القيمة المطلقة)

التمثيل البيانى



* الصورة الأساسية :

د : ح ⟵ ح ، د (س) = | س |

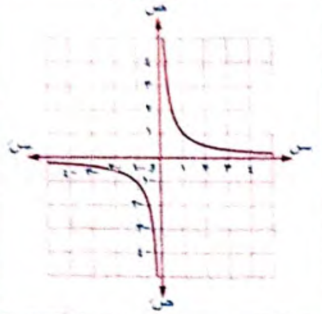
ويعاد تعريفها كالتالى : د (س) = { س ، س ≥ ٠ ؛ − س ، س < ٠

* المدى والاطراد والخواص :

* مدى الدالة = [٠ ، ∞[
* الدالة تناقصية فى]− ∞ ، ٠] وتزايدية فى [٠ ، ∞[
* الدالة زوجية (متماثلة حول محور الصادات).
* الدالة ليست أحادية.

٣ الصورة الأساسية للدالة الكسرية

التمثيل البيانى



* الصورة الأساسية :

د : ح − {٠} ⟵ ح ، د (س) = $\frac{١}{س}$

نظرًا لاقتراب كل من جزئى المنحنى من المحورين دون أن يقطعهما يقال إن المحورين $\overleftrightarrow{سس}$ ، $\overleftrightarrow{صص}$ هما خطا التقارب للمنحنى.

* المدى والاطراد والخواص :

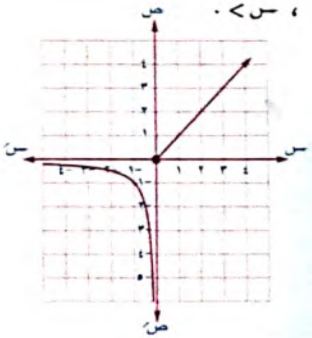
* مدى الدالة = ح − {٠}
* الدالة تناقصية فى]− ∞ ، ٠[وتناقصية أيضًا فى]٠ ، ∞[
* الدالة فردية (متماثلة حول نقطة الأصل) * الدالة أحادية.

مثال ٦

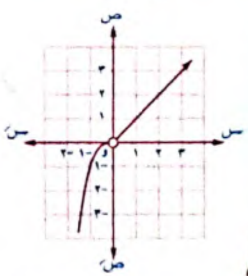
مثل بيانيًا كلًا من الدالتين المعرفتين بالقاعدتين الآتيتين ومن الرسم أوجد مجال ومدى الدالة واستنتج اطرادها ونوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

١ د (س) = { $\frac{١}{س}$ ، س < ٠ ؛ | س | ، س ≥ ٠   ٢ د (س) = { $س^٣$ ، س < ٠ ؛ س ، س > ٠

الحل



١ * المجال = ح
* المدى = ح
* الدالة تناقصية فى]− ∞ ، ٠]
وتزايدية فى [٠ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.



٢ * المجال = ح − {٠}
* المدى = ح − {٠}
* الدالة تزايدية على مجالها.
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.

تمارين 4

على التمثيل البياني للدوال الأساسية ورسم الدالة مجزأة المجال

اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسي

مستويات عليا • تطبيق • فهم

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت : د (س) = ٥ فإن مجال الدالة د هو ....

(أ) ح　(ب) ح⁺　(جـ) {٥}　(د) ح − {٥}

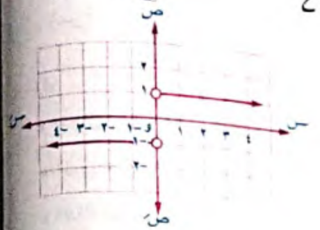
(٢) إذا كانت : د (س) = ٧ فإن مدى الدالة د هو ....

(أ) ح　(ب) ح⁺　(جـ) {٧}　(د) ح − {٧}

(٣) مدى الدالة د : د (س) = { ١ ، س > ٠ ؛ ٠ ، س ≤ ٠ } هو ....

(أ) {١}　(ب) {٠}　(جـ) ح　(د) {٠ ، ١}

(٤) مدى الدالة الممثلة بالشكل المقابل هو ....



(أ) {١}　(ب) {١ ، −١}　(جـ) {−١}　(د) ح

(٥) مدى الدالة د : د (س) = (٣ س² − ٣) / (س² − ١) هو ....

(أ) ح − {١ ، −١}　(ب) ح − {٣ ، −٣}　(جـ) {٣ ، −٣}　(د) {٣}

(٦) مدى الدالة د (س) = (س² − ٣ س) / س حيث س ≠ ٠ هو ....

(أ) ح　(ب) ح − {٠}　(جـ) {٠}　(د) ح − {−٣}

(٧) مدى الدالة د : د (س) = (٢ س² − ٢ س) / (س² − ١) هو ....

(أ) ح − {١ ، −١}　(ب) ح − {٢ ، −٢}　(جـ) ح⁺　(د) ح⁺ − {٢}

(٨) مدى الدالة د : [−٢ ، ٣[⟵ ح ، د (س) = س² هو ....

(أ) [٤ ، ٩[　(ب) ح⁺　(جـ) [٠ ، ٩[　(د) [٠ ، ٤]

(٩) مدى الدالة د : د (س) = { س ، س > ٠ ؛ −٢ ، س ≤ ٠ } هو ....

(أ) ح⁺　(ب) ح⁺ − {−٢}　(جـ) ح⁺ ∪ {−٢}　(د) ح

(١٠) الدالة د حيث د (س) = { ٢ ، س > ٠ ؛ −٢ ، س < ٠ } متماثلة بالنسبة للنقطة ....

(أ) (٢ ، ٠)　(ب) (−٢ ، ٠)　(جـ) (٠ ، ٠)　(د) (٢ ، −٢)

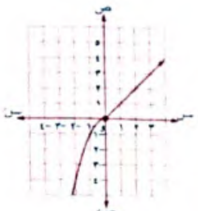
(١١) محور تماثل الدالة د : د (س) = س² هو المستقيم ....

(أ) ص = صفر　(ب) ص = س　(جـ) ص = −س　(د) س = صفر

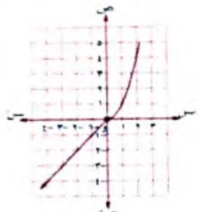
(١٢) الدالة د : د (س) = { س² ، س < ٠ ؛ ١/س ، س > ٠ } تكون تزايدية في ....

(أ) ح　(ب) ح⁻　(جـ) ح⁺　(د) ح − {٠}

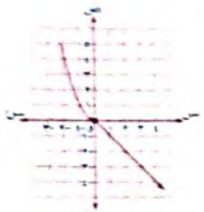
(١٣) منحنى الدالة د : د (س) = { س² ، س > ٠ ؛ س ، س ≤ ٠ } هو ....



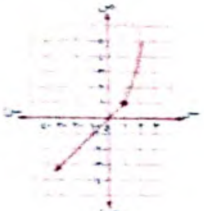
(أ)



(ب)

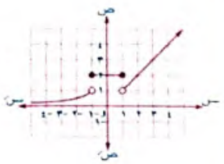


(جـ)

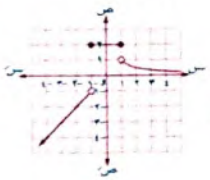


(د)

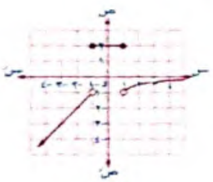
(١٤) منحنى الدالة د : د (س) = { س ، س < −١ ؛ ٢ ، −١ ≤ س ≤ ١ ؛ ١/س ، س > ١ } هو ....



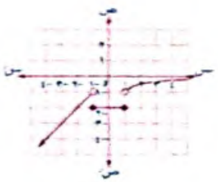
(أ)



(ب)

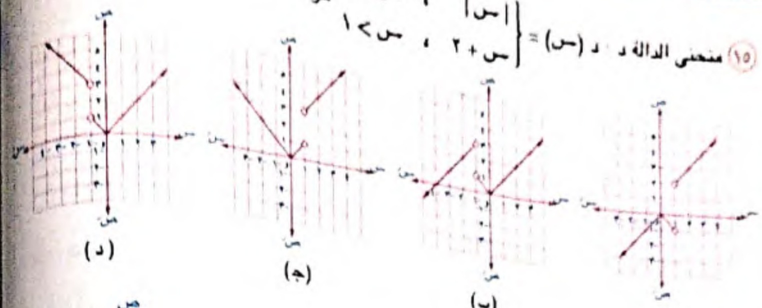


(جـ)



(د)

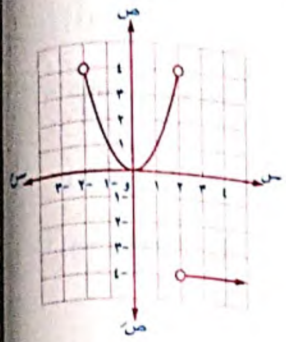
(١٥) منحنى الدالة د : د(س) = { |س| ، س < ١ ؛ س + ٢ ، س > ١ } هو ....



(أ) (ب) (جـ) (د)

(١٦) فى الشكل المقابل

منحنى الدالة د المعرفة بالقاعدة د(س) = ...



(أ) { $س^{٢}$ ، -٢ < س < ٢ ؛ -٤ ، س < -٢ }

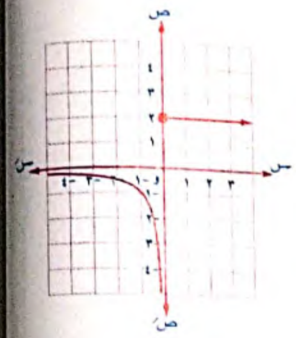
(ب) { $س^{٢}$ ، -٢ < س < ٢ ؛ -٤ ، س > ٢ }

(جـ) { $س^{٢}$ ، -٢ ≤ س ≤ ٢ ؛ -٤ ، س < ٢ }

(د) { $س^{٢}$ ، -٢ < س < ٢ ؛ -٤ ، س < ٢ }

(١٧) فى الشكل المقابل

منحنى الدالة د المعرفة بالقاعدة د(س) = ...



(أ) { ٢ ، س > ٠ ؛ $\frac{١}{س}$ ، س < ٠ }

(ب) { ٢ ، س ≥ ٠ ؛ $\frac{١}{س}$ ، س < ٠ }

(جـ) { ٢ ، س < ٠ ؛ $\frac{١}{س}$ ، س ≥ ٠ }

(د) { ٢ ، س ≥ ٢ ؛ $\frac{١}{س}$ ، س < ٢ }

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ مثل كلاً من الدوال الآتية بيانيًا ، وعين مداها :

(١) د : {-٣ ، -١ ، ١ ، ٢} ⟵ [-٣ ، ٧] ، د(س) = ٢س + ٢

(٢) 📖 د :]١ ، ٥[⟵ ح ، د(س) = س + ١

(٣) 📖 ر :]-∞ ، -١] ⟵ ح ، ر(س) = ١ - س

(٤) د : د(س) = -٣س + ٧ لكل س ∈ ح

(٥) د : ح ⟵ ح ، د(س) = $س^{٢}$

(٦) د : د(س) = $س^{٢}$ - ٥ ، س ≥ ٠

(٧) د : د(س) = $س^{٢}$ - ٢س ، س ∈ [-٢ ، ٢]

٢ 📖 إذا كانت د : [-٢ ، ٦] ⟵ ح ، د(س) = { ٤ - س عندما -٢ ≤ س < ١ ؛ س عندما ١ ≤ س ≤ ٦ }

(١) ارسم الشكل البيانى للدالة د ، واستنتج من الرسم مدى الدالة وابحث اطرادها.

(٢) هل د دالة أحادية ؟ فسر إجابتك.

٣ مثل بيانيًا كلًا من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية ومن الرسم أوجد مجال ومدى كل دالة وابحث اطرادها ونوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك وابحث تماثلها :

(١) د(س) = $\frac{٣س^{٢} - ٣}{س^{٢} - ١}$

(٢) د(س) = $\frac{٤ - س^{٢}}{س + ٢}$

(٣) د(س) = $\frac{س^{٣} - س}{س^{٢} - ١}$

(٤) د(س) = $\frac{س^{٤} - س^{٢}}{س^{٢} - ١}$

٤ مثل بيانيًا كلًا من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية ومن الرسم أوجد مجال ومدى كل دالة وابحث اطرادها ونوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك وابحث تماثلها :

(١) د :]-∞ ، ٣[⟵ ح حيث د(س) = ٢

(٢) د(س) = { ٢ ، س ≤ ٠ ؛ -٢ ، س > ٠ }

(٣) د(س) = { ٢ ، س > ١ ؛ س - ٢ ، س ≤ ١ }

(٤) د(س) = { س + ٢ ، س ∈ [-٢ ، ١] ؛ -س + ٤ ، س ∈]١ ، ٤] }

(٥) 📖 د(س) = { ٤ ، س < -٢ ؛ $س^{٢}$ ، س ≥ -٢ }

(٦) 📖 د(س) = { $س^{٢}$ ، س < ٠ ؛ س ، س ≥ ٠ }

❖ مستويات عليا

(٧) د (س) = { س^٢ ، س < ١ ؛ ١ ، س > ١ }

(٨) د (س) = { س^٢ ، س < ١ ؛ ٢ - س ، س ≥ ١ }

(٩) د (س) = { |س| ، س ≤ ٠ ؛ $\frac{١}{س}$ ، س > ٠ }

(١٠) د (س) = { |س| ، س ≤ ٠ ؛ س^٢ ، س > ٠ }

(١١) د (س) = { ٢ ، س ≤ -٢ ؛ |س| ، -٢ < س < ٢ ؛ ٢ ، س ≥ ٢ }

(١٢) د (س) = { $\frac{٢س - ٦}{س - ٢}$ ، س > ٢ ؛ ٢ ، س < ٢ }

(١٣) د (س) = { ٢ ، -٢ ≤ س ≤ -١ ؛ ٠ ، -١ < س < ١ ؛ ٢ ، ١ ≤ س ≤ ٢ }

(١٤) د (س) = { -س - ١ ، -٤ ≤ س < -٢ ؛ ١ ، -٢ ≤ س ≤ ٢ ؛ س - ١ ، ٢ < س ≤ ٤ }

---

5 إذا كان د١ : ح ⟵ ح حيث د١ (س) = ٢س - ١ ، د٢ : [-٢ ، ٢] ⟵ ح

حيث د٢ (س) = ٣ - ٢س فارسم الدالة (د١ + د٢) (س) محددًا مجالها

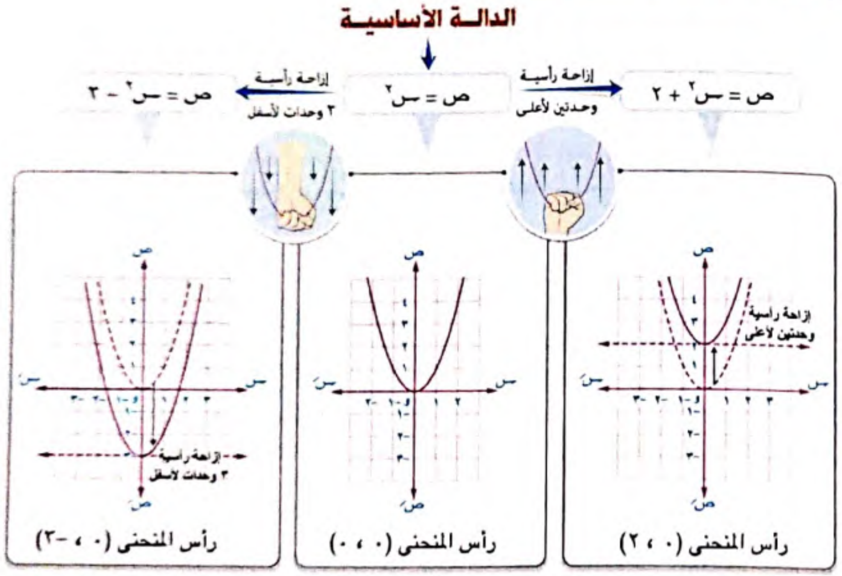
ثم استنتج اطراد الدالة.

---

6 إذا كانت د (س) = س^٢ - ٤س ، ر (س) = س^٢ - ٤ فعين مجال الدالة $\frac{د}{ر}$ ومثلها بيانيًا ومن الرسم عين مداها وعين نوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك وابحث اطرادها واذكر هل هي دالة أحادية أم لا.

الدرس 5 التحويلات الهندسية لمنحنيات الدوال الأساسية

أولًا الإزاحة الرأسية لمنحنى الدالة



بصفة عامة

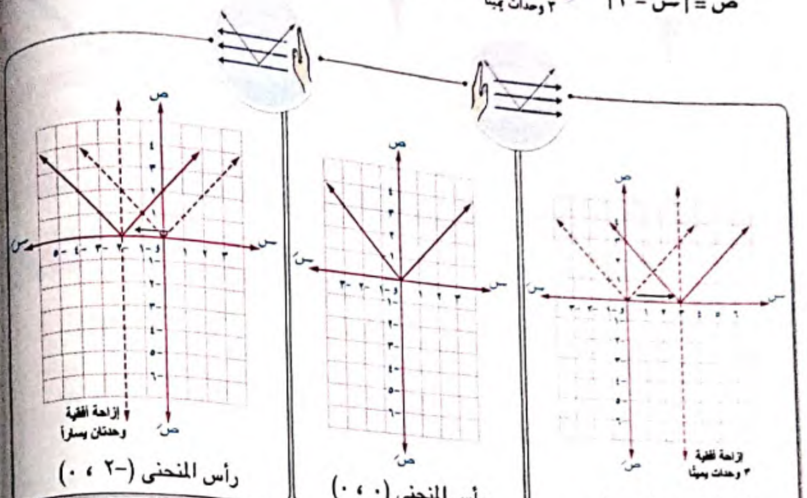
لأى دالة د يكون المنحنى ص = د (س) + ا ، ا ∈ ح - {٠} هو نفس المنحنى ص = د (س)

بإزاحة رأسية قدرها |ا| وحدة طول فى اتجاه : { و ص (أى لأعلى) عندما ا > ٠ ؛ و ص′ (أى لأسفل) عندما ا < ٠ }

ثانيًا الإزاحة الأفقية لمنحنى الدالة

الدالة الأساسية

ص = |س + ٢| ← إزاحة أفقية وحدتان يسارًا — ص = |س| — إزاحة أفقية ٢ وحدات يمينًا → ص = |س − ٢|



رأس المنحنى (−٢ ، ٠) — رأس المنحنى (٠ ، ٠) — رأس المنحنى (٢ ، ٠)

بصفة عامة

لأى دالة د يكون المنحنى ص = د (س + أ) ، أ ∈ ح − {٠} هو نفس المنحنى

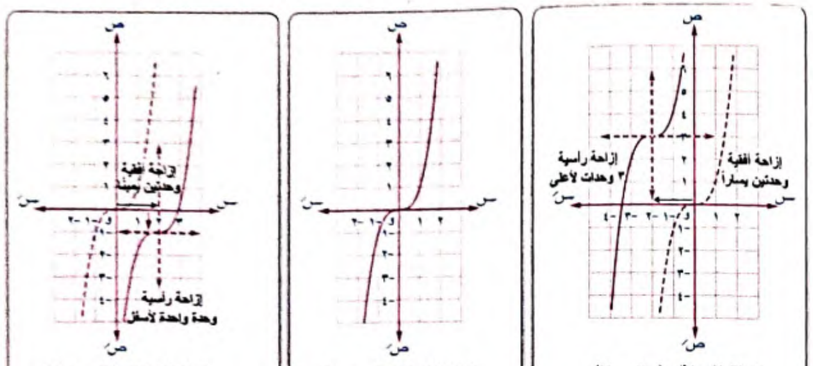
ص = د (س) بإزاحة أفقية قدرها |أ| وحدة طول

فى اتجاه :
- و س→ (يمينًا) عندما أ < ٠
- و س← (يسارًا) عندما أ > ٠

ثالثًا الإزاحة الأفقية متبوعة بالإزاحة الرأسية لمنحنى الدالة

الدالة الأساسية

ص = (س + ٢)^{٣} + ٢ ← إزاحة أفقية وحدتين يسارًا ثم إزاحة رأسية ٢ وحدات لأعلى — ص = س^{٣} — إزاحة أفقية وحدتين يمينًا ثم إزاحة رأسية وحدة واحدة لأسفل → ص = (س − ٢)^{٣} − ١



نقطة التماثل (−٢ ، ٢) — نقطة التماثل (٠ ، ٠) — نقطة التماثل (٢ ، −١)

بصفة عامة

لأى دالة د يكون المنحنى ص = د (س + أ) + ب حيث أ ، ب ∈ ح − {٠} هو نفس المنحنى ص = د (س) بإزاحة أفقية مقدارها |أ| وحدة طول فى اتجاه و س→ إذا كان أ < ٠ أو فى اتجاه و س← إذا كان أ > ٠ ثم إزاحة رأسية مقدارها |ب| وحدة طول فى اتجاه و ص→ إذا كان ب > ٠ أو فى اتجاه و ص← إذا كان ب < ٠ .

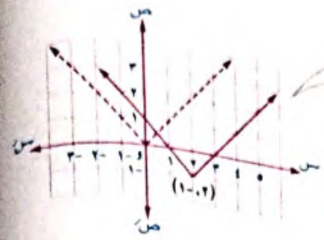
مثال ١

استخدم منحنيات الدوال الأساسية لرسم منحنيى الدالتين المعرفتين بالقاعدتين الآتيتين ومن الرسم عين مجال ومدى كل دالة وابحث اطرادها وبين نوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك :

١ ر(س) = |س − ٢| − ١

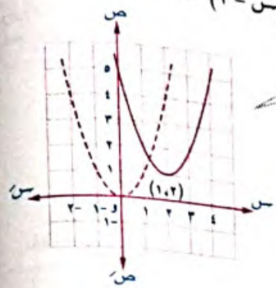
٢ ر(س) = (س − ٢)^{٢} + ١

الحل



١) منحنى الدالة ر هو نفس منحنى الدالة د : د(س) = |س| بإزاحة أفقية ٢ وحدة في اتجاه و س ثم إزاحة رأسية وحدة واحدة في اتجاه و ص

- مجال ر = ح ، مدى ر = [-١ ، ∞[
- الدالة ر تناقصية في]-∞ ، ٢[وتزايدية في]٢ ، ∞[
- الدالة ر ليست زوجية وليست فردية.



٢) ∵ $(٢ - س)^٢ = (س - ٢)^٢$

∴ $ر(س) = (س - ٢)^٢ + ١$

منحنى الدالة ر هو نفس منحنى الدالة د : د(س) = $س^٢$ بإزاحة أفقية ٢ وحدة في اتجاه و س ثم إزاحة رأسية وحدة واحدة في اتجاه و ص

- مجال ر = ح ، مدى ر = [١ ، ∞[
- الدالة ر تناقصية في]-∞ ، ٢[وتزايدية في]٢ ، ∞[
- الدالة ر ليست زوجية وليست فردية.

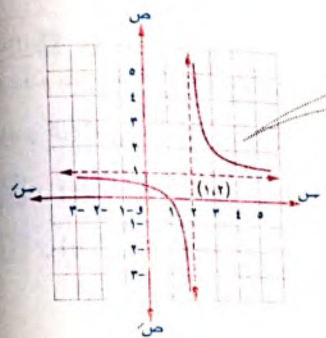
مثال ٢

استخدم منحنى الدالة د : د(س) = $\frac{١}{س}$ لتمثيل الدوال ر ، ع ، هـ حيث:

١) $ر(س) = \frac{١}{س - ٢} + ١$ ٢) $ع(س) = \frac{١}{س} + ٢$ ٣) $هـ(س) = \frac{٢س - ١}{س - ١}$

ومن الرسم حدد مجال ومدى كل دالة وابحث اطرادها.

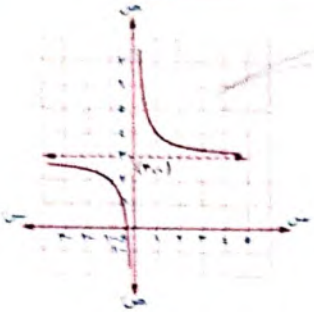
الحل



١) منحنى الدالة ر هو نفس منحنى الدالة د بإزاحة أفقية قدرها ٢ وحدة في اتجاه و س ثم إزاحة رأسية قدرها وحدة واحدة في اتجاه و ص

- مجال ر = ح - {٢}   • مدى ر = ح - {١}
- الدالة تناقصية في الفترة]-∞ ، ٢[

وتناقصية أيضًا في الفترة]٢ ، ∞[

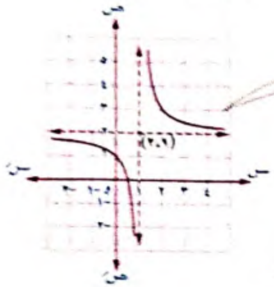


٢) منحنى الدالة ع هو نفس منحنى الدالة د بإزاحة رأسية مقدارها ٢ وحدات في اتجاه و ص

- مجال ع = ح - {٠}
- مدى ع = ح - {٢}
- الدالة تناقصية في الفترة]-∞ ، ٠[

وتناقصية أيضًا في الفترة]٠ ، ∞[

٣) $هـ(س) = \frac{٢س - ١}{س - ١} = \frac{٢س - ٢ + ١}{س - ١} = \frac{٢(س - ١) + ١}{(س - ١)} = ٢ + \frac{١}{س - ١}$



منحنى الدالة هـ هو نفس منحنى الدالة د بإزاحة أفقية وحدة واحدة في اتجاه و س ثم إزاحة رأسية ٢ وحدة في اتجاه و ص

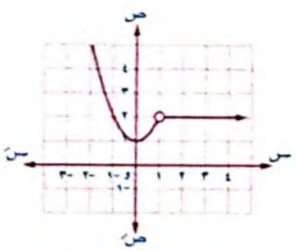
- مجال هـ = ح - {١}
- مدى هـ = ح - {٢}
- الدالة تناقصية في]-∞ ، ١[وتناقصية أيضًا في]١ ، ∞[

مثال ٣

مثل بيانيًا كلًا من الدالتين المعرفتين بالقاعدتين الآتيتين ومن الرسم أوجد مجال ومدى الدالة واستنتج اطرادها ونوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك:

١) $د(س) = \begin{cases} س^٢ + ١ & ، س < ١ \\ ٢ & ، س > ١ \end{cases}$ ٢) $د(س) = \begin{cases} |س - ٢| + ١ & ، س < ٤ \\ \frac{١}{س - ٤} + ٢ & ، س > ٤ \end{cases}$

الحل

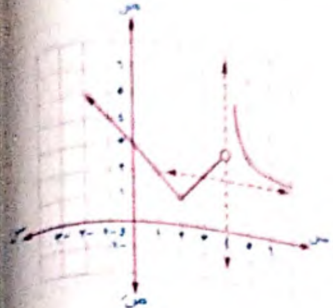


١) • المجال = ح - {١}

- المدى = [١ ، ∞[
- الدالة تناقصية في]-∞ ، ٠]

وتزايدية في [٠ ، ١[، ثابتة في]١ ، ∞[

- الدالة ليست زوجية وليست فردية.

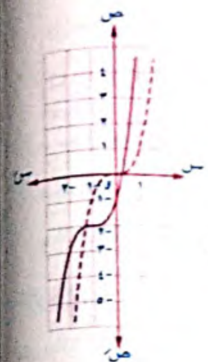


٢ • المجال = ح - {٤}
• المدى = [١ ، ∞[
• الدالة تناقصية في كل من]-∞ ، ٢[
،]٤ ، ∞[وتزايدية في]٢ ، ٤[
• الدالة ليست زوجية وليست فردية.

مثال ٤

إذا كانت د : ح ← ح حيث د (س) = س^٣ فارسم الشكل البياني للدالة ر حيث ر (س) = د (س + ١) - ٢ ومن الرسم عين مجال ر ومداها وابحث اطرادها وبين نوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك واذكر ما إذا كانت الدالة ر أحادية أم لا.

الحل



∵ ر (س) = د (س + ١) - ٢

∴ ر (س) = (س + ١)^٣ - ٢

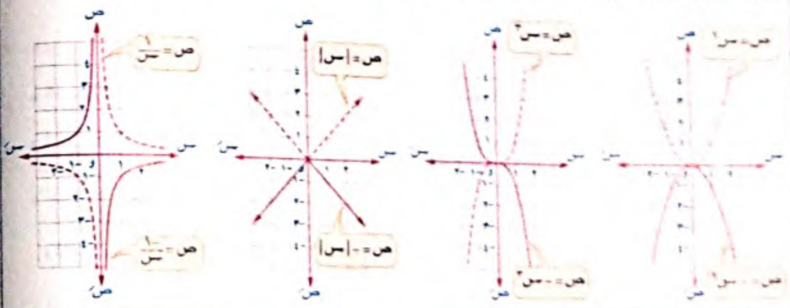
∴ منحنى الدالة ر هو نفس منحنى الدالة د بإزاحة أفقية وحدة واحدة في اتجاه و س← ثم إزاحة رأسية وحدتان في اتجاه و ص↑

• مجال الدالة ر = ح ، مدى الدالة ر = ح • الدالة ر متزايدة على مجالها ح

• الدالة ر ليست زوجية وليست فردية. • الدالة ر أحادية.

رابعًا انعكاس منحنى الدالة في محور السينات

لأي دالة د يكون المنحنى ص = - د (س) هو نفس المنحنى ص = د (س) بالانعكاس في محور السينات.



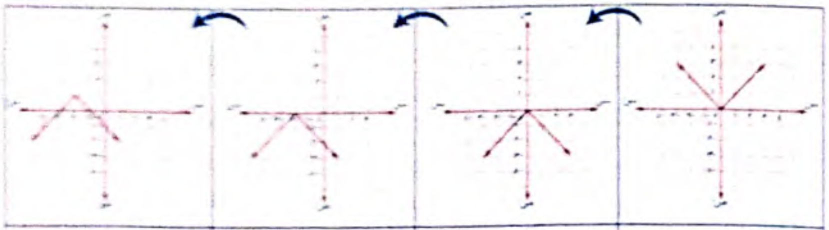
ملاحظة هامة

من المهم ترتيب إجراء التحويلات على المنحنى ص = د (س) للحصول منه على المنحنى ص = - د (س + أ) + ب كالتالي:

١ انعكاس في محور السينات. ٢ إزاحة أفقية. ٣ إزاحة رأسية.

فإذا عكس الترتيب بإجراء الإزاحة الرأسية قبل إجراء الانعكاس في محور السينات فإننا نحصل على منحنى آخر غير المنحنى المطلوب.

فمثلًا : من منحنى الدالة الأساسية ص = |س| نحصل على منحنى الدالة ص = - |س + ٢| + ١ كالتالي:



الدالة الأساسية	الانعكاس في محور السينات	إزاحة أفقية وحدتان يسارًا	إزاحة رأسية وحدة واحدة لأعلى
ص = |س|	ثم ص = - |س|	ثم ص = - |س + ٢|	ثم ص = - |س + ٢| + ١

مثال ٥

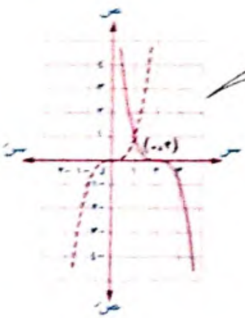
باستخدام منحنيات الدوال الأساسية ارسم منحنيات الدوال ر ، ع ، هـ حيث :

١ ر (س) = - (س - ٢)^٣   ٢ ع (س) = ١/(٢ - س) + ٢   ٣ هـ (س) = ٤ س - س^٢ - ٣

ومن الرسم بين مدى كل دالة وابحث اطرادها وتماثلها وبين نوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك.

الحل

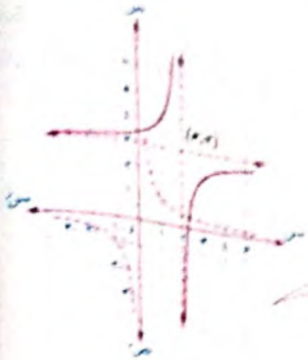
١ منحنى الدالة ر هو نفس منحنى الدالة د : د (س) = س^٣ بالانعكاس في محور السينات ثم إزاحة أفقية ٢ وحدة في اتجاه و س→



• مدى ر = ح
• الدالة ر تناقصية على مجالها ح
• الدالة ر متماثلة حول النقطة (٢ ، ٠)
• الدالة ر ليست زوجية وليست فردية.

٢ ∵ ق (س) = $\frac{-1}{س + ٢}$ + ٣ = $\frac{1}{-(س - ٢)}$ + ٣

= $\frac{-1}{س - ٢}$ + ٣



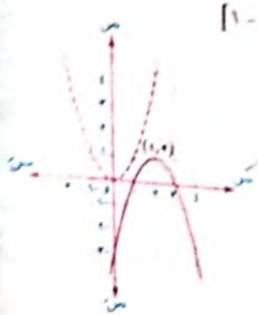
منحنى الدالة ق هو نفس منحنى الدالة د : د (س) = $\frac{1}{س}$ بالانعكاس في محور السينات متبوعًا بإزاحة أفقية وحدتين في اتجاه و س ثم إزاحة رأسية ٣ وحدات في اتجاه و ص

- مدى ق = ح - {٣}
- الدالة ق تزايدية في الفترة]- ∞ ، ٢[وتزايدية أيضًا في الفترة]٢ ، ∞[
- الدالة ق متماثلة حول النقطة (٢ ، ٣)
- الدالة ق ليست زوجية وليست فردية.

٣ ∵ هـ (س) = - س^2 + ٤ س - ٣ = - (س^2 - ٤ س + ٣)

= - (س^2 - ٤ س + ٤ - ١) = - [(س - ٢)^2 - ١]

= - (س - ٢)^2 + ١



منحنى الدالة هـ هو نفس منحنى الدالة د : د (س) = س^2 بالانعكاس في محور السينات متبوعًا بإزاحة أفقية وحدتين في اتجاه و س ثم إزاحة رأسية وحدة واحدة في اتجاه و ص

- مدى هـ =]- ∞ ، ١]
- الدالة هـ متزايدة في الفترة]- ∞ ، ٢[ومتناقصة في]٢ ، ∞[
- الدالة هـ متماثلة حول المستقيم س = ٢
- الدالة هـ ليست زوجية وليست فردية.

لاحظ أن

نقطة رأس المنحنى في الدالة هـ هي (٢ ، ١)

ويمكن الحصول عليها من القانون : رأس المنحنى = ($\frac{-ب}{٢أ}$ ، د ($\frac{-ب}{٢أ}$))

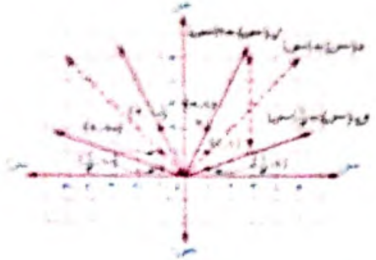
وذلك للدوال التي قاعدتها على الصورة : د (س) = أ س^2 + ب س + جـ

خامسًا تمدد منحنى الدالة

لأي دالة د يكون المنحنى ص = أ د (س) حيث أ ∈ ح$^+$

- تمدد رأسي للمنحنى ص = د (س) إذا كان أ > ١
- انكماش رأسي للمنحنى ص = د (س) إذا كان ٠ < أ < ١

فمثلًا : في الشكل المقابل :



- منحنى الدالة ر : ر (س) = ٢ | س |

هو تمدد رأسي لمنحنى الدالة د : د (س) = | س |

لأن : أ > ١

أي أنه لكل (س ، ص) ∈ بيان د

يكون (س ، ٢ ص) ∈ بيان ر

- منحنى الدالة ع : ع (س) = $\frac{1}{2}$ | س | هو انكماش رأسي لمنحنى الدالة د : د (س) = | س |

لأن : ٠ < أ < ١

أي أنه لكل (س ، ص) ∈ بيان د يكون (س ، $\frac{1}{2}$ ص) ∈ بيان ع

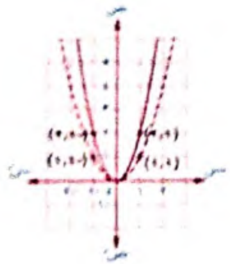
مثال ٦

استخدم منحنى الدالة د : د (س) = س^2 في رسم كل من المنحنيات الآتية :

١ ر (س) = ٢ س^2 ٢ ع (س) = - $\frac{1}{2}$ س^2 ٣ هـ (س) = ٢ (س - ١)^2 - ٢

ومن الرسم عين مدى كل منها وابحث اطرادها وبين نوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك.

الحل



١ منحنى الدالة ر هو تمدد رأسي لمنحنى الدالة د فيه أ = ٢ > ١

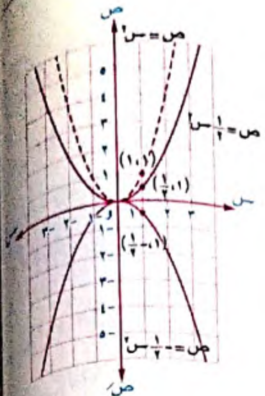
أي أنه لكل (س ، ص) ∈ بيان د يكون (س ، ٢ ص) ∈ بيان ر

- مدى ر = [٠ ، ∞[
- الدالة تناقصية في الفترة]- ∞ ، ٠[وتزايدية في]٠ ، ∞[
- الدالة ر زوجية.

٢ منحنى الدالة ى هو انكماش رأسى لمنحنى الدالة د فيه $ا = \frac{1}{2} < 1$ ثم انعكاس فى محور السينات.

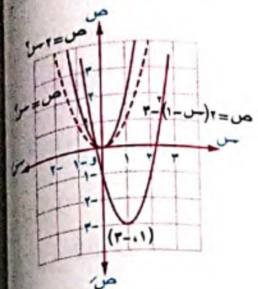
أى أنه لكل (س ، ص) ∈ د يكون (س ، $-\frac{1}{2}$ ص) ∈ ى

- مدى ى =]−∞ ، ٠]
- الدالة تزايدية فى]−∞ ، ٠[وتناقصية فى]٠ ، ∞[
- الدالة ى زوجية.



٣ منحنى الدالة هـ هو تمدد رأسى للدالة د فيه $ا = 2 > 1$ ثم إزاحة أفقية وحدة واحدة فى اتجاه $\overrightarrow{وس}$ يليها إزاحة رأسية ٣ وحدات فى اتجاه $\overleftarrow{وص}$

- مدى هـ = [−٣ ، ∞[
- الدالة تناقصية فى]−∞ ، ١[وتزايدية فى]١ ، ∞[
- الدالة هـ ليست زوجية وليست فردية.



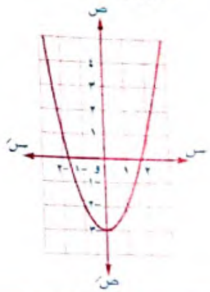
ملاحظتان

لأى دالة د كثيرة حدود :

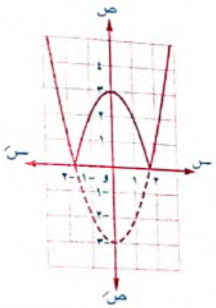
١ المنحنى ص = |د(س)| أى ص = $\begin{cases} د(س) & ، د(س) \geq 0 \\ -د(س) & ، د(س) < 0 \end{cases}$

يمثله بيانيًا المنحنى ص = د(س) مع استبدال الجزء من المنحنى أسفل محور السينات بصورته بالانعكاس فى محور السينات.

فمثلًا : ص = س٢ − ٣ تمثل بيانيًا كالتالى :



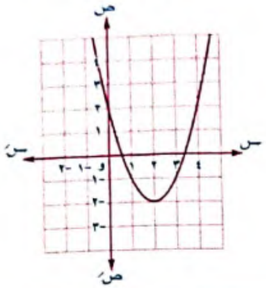
ص = |س٢ − ٣| تمثل بيانيًا كالتالى :



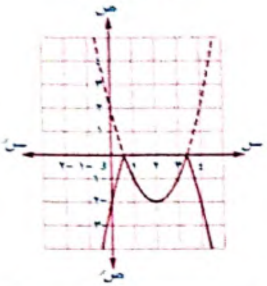
٢ المنحنى ص = −|د(س)| أى ص = $\begin{cases} -د(س) & ، د(س) \geq 0 \\ د(س) & ، د(س) < 0 \end{cases}$

يمثله بيانيًا المنحنى ص = د(س) مع استبدال الجزء من المنحنى أعلى محور السينات بصورته بالانعكاس فى محور السينات.

فمثلًا : ص = (س − ٢)٢ − ٢ تمثل بيانيًا كالتالى :



ص = −|(س − ٢)٢ − ٢| تمثل بيانيًا كالتالى :



مثال ٧

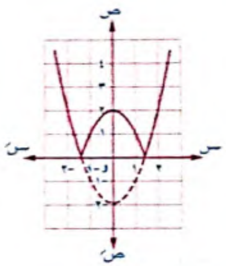
مثل بيانيًا كلًا من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية ومن الرسم أوجد مداها وعين نوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك :

١ د(س) = |س٢ − ٢| ٢ د(س) = −|س٣| ٣ د(س) = |س٣| + ١

الحل

١ بفرض أن : ر(س) = س٢ − ٢

منحنى الدالة د هو نفس منحنى الدالة ر مع استبدال الجزء من المنحنى أسفل محور السينات بصورته بالانعكاس فى محور السينات.



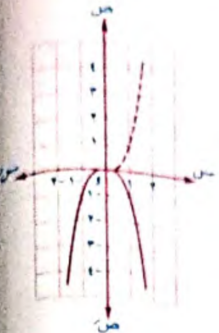
- مدى د = [٠ ، ∞[
- الدالة د زوجية.

٢ بفرض أن ر (س) = $س^٣$

منحنى الدالة د هو نفس منحنى الدالة ر مع استبدال الجزء من المنحنى أعلى محور السينات بصورته بالانعكاس في محور السينات.

• مدى د =]-∞ ، ٠]

• الدالة د زوجية.



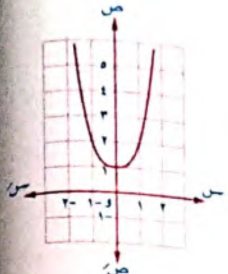
٣ بفرض أن ر (س) = $س^٣$

∴ د (س) = | ر (س) | + ١

منحنى الدالة د هو نفس منحنى الدالة ر مع استبدال الجزء من المنحنى أسفل محور السينات بصورته بالانعكاس في محور السينات ثم إزاحته رأسيًا في اتجاه $\overrightarrow{و ص}$ وحدة واحدة.

• مدى د = [١ ، ∞[

• الدالة د زوجية.



مثال ❽

مثل بيانيًا الدالة د : د (س) = $\frac{1}{|س|}$ ثم استخدمها في التمثيل البياني للدوال المعرفة بالقواعد الآتية :

١ ر (س) = د (س + ١)   ٢ ع (س) = د (س) + ١   ٣ هـ (س) = − د (س) + ٢

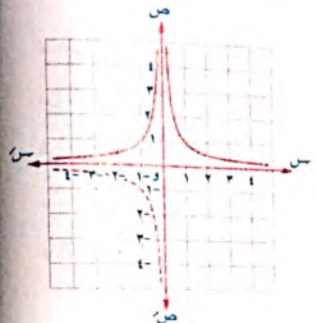
الحل

• بفرض أن

ر (س) = $\frac{1}{س}$

∴ د (س) = | ر (س) |

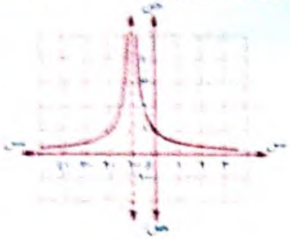
أي أن منحنى الدالة د هو نفس منحنى الدالة ر مع استبدال الجزء أسفل محور السينات بصورته بالانعكاس في محور السينات.



١ ∵ ر (س) = د (س + ١)

∴ ر (س) = $\frac{1}{|س + 1|}$

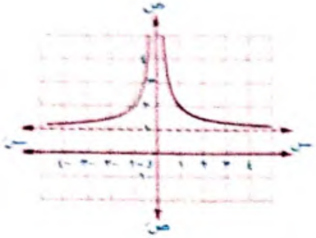
∴ الدالة ر يمثلها بيانيًا منحنى الدالة د مع إزاحة أفقية وحدة واحدة في اتجاه $\overleftarrow{و س}$



٢ ∵ ع (س) = د (س) + ١

∴ ع (س) = $\frac{1}{|س|} + 1$

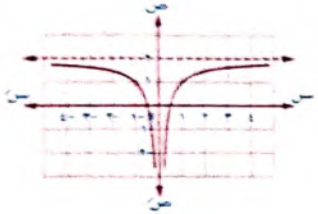
∴ الدالة ع يمثلها بيانيًا منحنى الدالة د مع إزاحة رأسية وحدة واحدة في اتجاه $\overleftarrow{و ص}$



٣ ∵ هـ (س) = − د (س) + ٢

∴ هـ (س) = $\frac{-1}{|س|} + 2$

∴ الدالة هـ يمثلها بيانيًا صورة منحنى الدالة د بالانعكاس في محور السينات مع إزاحة رأسية مقدارها ٢ وحدة في اتجاه $\overleftarrow{و ص}$



مثال ❾

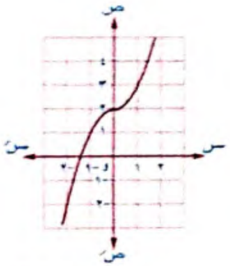
مثل بيانيًا كلًا من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية ومن الرسم أوجد مجال ومدى كل دالة وابحث اطرادها وتماثلها ونوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

١ د (س) = س | س | + ٢   ٢ د (س) = $س^٢$ − | س | − ٣

٣ د (س) = $\sqrt{س^٢ - ٦ س + ٩}$

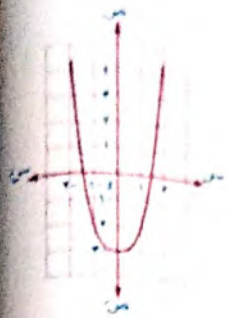
الحل

١ د (س) = $\begin{cases} س (س) + ٢ & ، س \geq ٠ \\ س (-س) + ٢ & ، س < ٠ \end{cases}$ = $\begin{cases} س^٢ + ٢ & ، س \geq ٠ \\ -س^٢ + ٢ & ، س < ٠ \end{cases}$



* مجال د = ح ، مدى د = ح

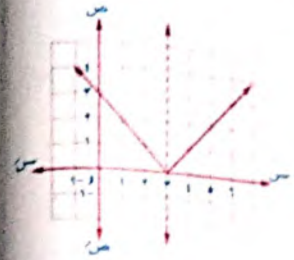
- الدالة تزايدية على مجالها ح
- الدالة متماثلة حول النقطة (٠ ، ٢)
- الدالة ليست زوجية وليست فردية.



٢ د (س) = { س^٢ (س) − ٣ ، س ≥ ٠ ؛ س^٢ (− س) − ٣ ، س < ٠ }

= { س^٢ − ٣ ، س ≥ ٠ ؛ − س^٢ − ٣ ، س < ٠ }

- مجال د = ح ، مدى د = [−٣ ، ∞[
- الدالة تناقصية في]− ∞ ، ٠[وتزايدية في]٠ ، ∞[
- الدالة متماثلة حول محور الصادات
- الدالة زوجية.



٣ د (س) = √(س − ٣)^٢

∴ د (س) = |س − ٣|

∴ الدالة د يمثلها بيانياً المنحنى ص = |س| بإزاحة أفقية ٣ وحدات في اتجاه و س←

- مجال د = ح ، مدى د = [٠ ، ∞[
- الدالة تناقصية في]− ∞ ، ٣[وتزايدية في]٣ ، ∞[
- الدالة متماثلة حول المستقيم س = ٣
- الدالة ليست فردية وليست زوجية

لاحظ أن

√س^٢ = |س| = { س ، س ≥ ٠ ؛ − س ، س < ٠ }

معلومة إثرائية

إذا كانت د (س) دالة حقيقية فإن

صورة منحنى الدالة د (س) بالانعكاس:
- في محور الصادات ← تكون منحنى الدالة ص = د (− س)
- في محور السينات ← تكون منحنى الدالة ص = − د (س)
- في نقطة الأصل ← تكون منحنى الدالة ص = − د (− س)

تمارين 5 على التحويلات الهندسية لمنحنيات الدوال الأساسية

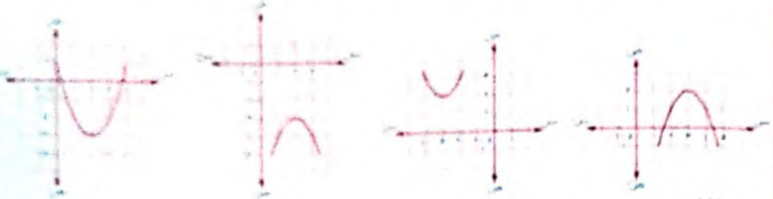
اختبر نفسك

• تذكر • تطبيق • مستويات عليا • من أسئلة الكتاب المدرسي

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

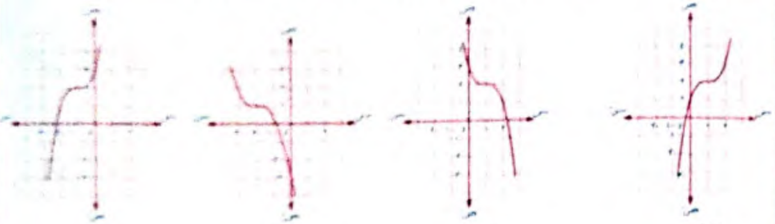
اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت : د (س) = − (س − ٣)^٢ + ٢ فإن الشكل الذى يمثل الدالة د هو ....



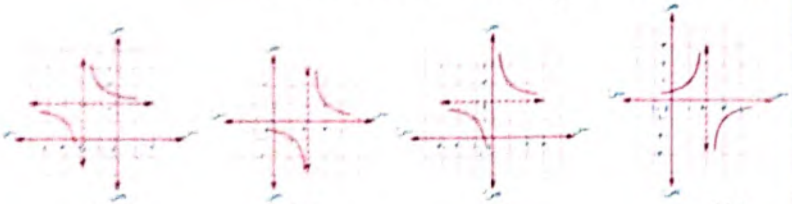
(أ) (ب) (جـ) (د)

② إذا كانت : د (س) = ٢ − (س − ١)^٣ فإن الشكل الذى يمثل الدالة د هو ....



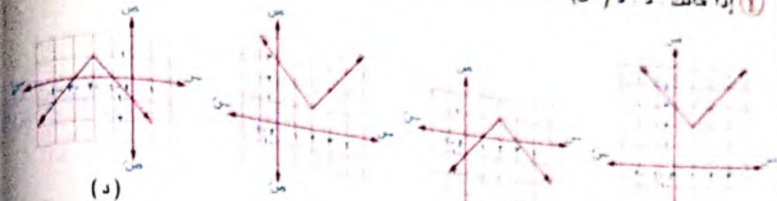
(أ) (ب) (جـ) (د)

③ إذا كانت : د (س) = $\frac{١}{س − ٢}$ فإن الشكل الذى يمثل الدالة د هو ....



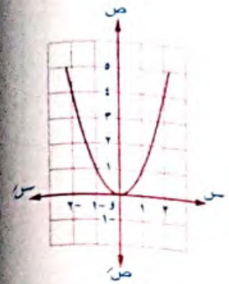
(أ) (ب) (جـ) (د)

٤) إذا كانت : د : د(س) = ١ - |س - ٢| فإن الشكل الذي يمثل الدالة د هو ....



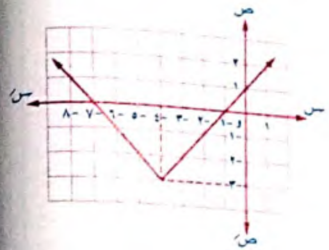
(أ) (ب) (جـ) (د)

٥) أزيح منحنى الدالة في الشكل المقابل بمقدار وحدتين موجبتين في اتجاه كل من المحورين فإنه يمثلها الدالة ....



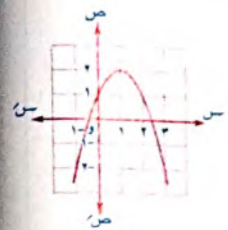
(أ) د(س) = $(س + ٢)^{٢}$ + ٢
(ب) د(س) = $(س + ٢)^{٢}$ - ٢
(جـ) د(س) = $(س - ٢)^{٢}$ - ٢
(د) د(س) = $(س - ٢)^{٢}$ + ٢

٦) أي من الدوال الآتية تمثل المنحنى المرسوم في الشكل المقابل؟



(أ) د(س) = |س - ٤| - ٣
(ب) د(س) = |س - ٤| + ٣
(جـ) د(س) = |س + ٤| - ٣
(د) د(س) = |س + ٤| + ٣

٧) أي من الدوال الآتية تمثل المنحنى المرسوم في الشكل المقابل؟



(أ) د(س) = $(س - ١)^{٢}$ + ٢
(ب) د(س) = ١ - $(س - ٢)^{٢}$
(جـ) د(س) = ٢ - $(س - ١)^{٢}$
(د) د(س) = $(س + ١)^{٢}$ - ٢

٨) نقطة رأس منحنى الدالة د : د(س) = $(٢ - س)^{٢}$ + ٣ هي ....

(أ) (٢ ، ٣) (ب) (٢ ، -٣) (جـ) (-٢ ، ٣) (د) (-٢ ، -٣)

٩) نقطة رأس منحنى الدالة د حيث : د(س) = $(١ + س)^{٢}$ - ٣ هي ....

(أ) (١ ، ٣) (ب) (١ ، -٣) (جـ) (-١ ، ٣) (د) (-١ ، -٣)

١٠) نقطة تماثل الدالة د : د(س) = $س^{٣}$ - ٢ هي ....

(أ) (٠ ، ٢) (ب) (٠ ، -٢) (جـ) (٢ ، ٠) (د) (-٢ ، ٠)

١١) نقطة تماثل منحنى الدالة د : د(س) = ٣ - $(س + ٢)^{٣}$ هو ....

(أ) (٣ ، ٢) (ب) (٢ ، ٣) (جـ) (-٢ ، ٣) (د) (-٢ ، -٣)

١٢) نقطة تماثل الدالة د : د(س) = $\frac{١}{س}$ + ٢ هي ....

(أ) (٢ ، ٠) (ب) (١ ، ٢) (جـ) (٠ ، ٢) (د) (٠ ، ٠)

١٣) نقطة تماثل منحنى الدالة د حيث د(س) = $\frac{١}{س - ٥}$ هي ....

(أ) (٥ ، ٠) (ب) (-٥ ، ٠) (جـ) (٠ ، -٥) (د) (٠ ، ٥)

١٤) نقطة تماثل منحنى الدالة د حيث د(س) = $\frac{١}{س - ٣}$ + ٤ هي ....

(أ) (٣ ، -٤) (ب) (-٣ ، -٤) (جـ) (٣ ، ٤) (د) (-٣ ، ٤)

١٥) نقطة تماثل الدالة د : د(س) = $\frac{س + ١}{س}$ هي ....

(أ) (١ ، ٠) (ب) (٠ ، ١) (جـ) (٠ ، ٠) (د) (١ ، -١)

١٦) إذا كانت الدالة د حيث د(س) = $\frac{١}{س}$ فإن نقطة التماثل للدالة ر : ر(س) = د(س + ١) هي ....

(أ) (١ ، ٠) (ب) (٠ ، ١) (جـ) (-١ ، ٠) (د) (-١ ، ١)

١٧) إذا كانت د(س) = $\frac{أ}{ب - س}$ + حـ حيث أ ، ب ، حـ ∈ ع نقطة تماثلها هي (٣ ، ٢)
فإن : $أ^{ب + حـ}$ = ...

(أ) $أ^{٥}$ (ب) ١ (جـ) $أ^{-١}$ (د) -١

١٨) نقطة رأس منحنى الدالة د : د(س) = |س + ٣| - ٢ هي ....

(أ) (٣ ، ٢) (ب) (-٣ ، -٢) (جـ) (-٣ ، ٢) (د) (٣ ، -٢)

١٩) المنحنى د(س) = |س - ٢| متماثل حول المستقيم ....

(أ) س = ٢ (ب) س = -٢ (جـ) ص = ٢ (د) ص = -٢

٢٠) محور تماثل الدالة د : د(س) = $س^{٢}$ - ١ هو المستقيم ....

(أ) س = ١ (ب) س = ٠ (جـ) ص = ١ (د) ص = ٠

(٢١) إذا كانت د (س) = ١ / |س| فإن معادلة محور تماثل منحنى الدالة د هو ....

(أ) ص = ٠ (ب) س = ٠ (جـ) ص = س (د) ص = -س

(٢٢) د (س) = (س - ١)^{٢} + ٢ تكون متزايدة في الفترة ....

(أ) ح (ب)]١ ، ∞[(جـ)]-∞ ، ١[(د)]-١ ، ١[

(٢٣) الدالة د حيث د (س) = (٢س - ١) / (س - ١) تناقصية في الفترة ....

(أ)]-∞ ، ١] (ب)]-∞ ، ١[،]١ ، ∞[
(جـ) [١ ، ∞[(د)]-∞ ، ٢[،]٢ ، ∞[

(٢٤) المساحة المحصورة بين منحنى الدالة د : د (س) = |س + ٢| - ٢ ، محور السينات تساوى .... وحدة مربعة.

(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) ٥ (د) ٤

(٢٥) مدى الدالة د : د (س) = ١ / |س| هو ....

(أ) ح - {٠} (ب)]٠ ، ∞[(جـ) [٠ ، ∞[(د) {٠}

(٢٦) مدى الدالة د حيث د (س) = (س - ٢)^{٢} + ٤ هو ....

(أ)]-∞ ، ٢[(ب) [-٢ ، ٤] (جـ) [٤ ، ∞[(د)]-∞ ، ٤]

(٢٧) مدى الدالة د (س) = ٣ - (٢ - س)^{٢} هو ....

(أ)]-∞ ، ٢] (ب) [٢ ، ∞[(جـ)]-∞ ، ٣] (د) [٣ ، ∞[

(٢٨) مدى الدالة د : د (س) = (٢س^{٢} - ٢س) / (س - ١) يساوى ....

(أ) ح - {١} (ب) ح - {٢}
(جـ) ح - {١ ، ٢} (د) ح - {٠ ، ١}

(٢٩) مدى الدالة د : د (س) = ٢ - ٣ / (س - ١) هو ....

(أ) ح (ب) ح - {١} (جـ) ح - {٢} (د) ح - {٣}

(٣٠) مدى الدالة د : د (س) = |س - ٢| هو ....

(أ)]٠ ، ∞[(ب) [٢ ، ∞[(جـ) [٠ ، ∞[(د)]٢ ، ∞[

(٣١) مدى الدالة د : د (س) = ٢ - |٣ - ٢س| هو ....

(أ)]-∞ ، ٢] (ب) [-٢ ، ∞[(جـ) [٣/٢ ، ∞[(د)]-∞ ، -٢]

(٣٢) مدى الدالة د حيث : د (س) = -|س^{٢}| هى ....

(أ) ح (ب) [٠ ، ∞[(جـ)]-∞ ، ٠] (د) ح - {٠}

(٣٣) مدى الدالة د : د (س) = س |س| هى ....

(أ) $ح^{+}$ (ب) $ح^{-}$ (جـ) ح (د) [٠ ، ∞[

(٣٤) مدى الدالة د : د (س) = |س| / س هو ....

(أ)]٠ ، ∞[(ب)]-∞ ، ٠[(جـ) ح - {٠} (د) {١ ، -١}

(٣٥) مدى الدالة د : د (س) = { -١/س ، س < -١ ؛ |س| ، -١ ≤ س ≤ ١ ؛ ١/س ، س > ١ } هو ....

(أ)]٠ ، ١] (ب) [٠ ، ١] (جـ)]٠ ، ∞[(د) ح - {٠}

(٣٦) مدى الدالة د : د (س) = { س - ١ ، س < ١ ؛ ٢ ، س > ١ } هو ....

(أ) ح - [٠ ، ١] (ب) ح - {١}
(جـ)]-∞ ، ٠[∪ {٢} (د)]-∞ ، ٠[∩ {٢}

(٣٧) منحنى الدالة د : د (س) = ١ / (س - ٢) + ٤ لا يقطع الخط ....

(أ) س = -٢ (ب) س = ٢ (جـ) ص = -٤ (د) ص = ٢

(٣٨) إذا كان المنحنى ص = د (س) يمثل دالة حقيقية فإن صورته بإزاحة قدرها ٢ وحدات رأسيًا لأعلى هو المنحنى ر (س) = ...

(أ) د (س - ٢) (ب) د (س + ٢) (جـ) د (س) + ٢ (د) د (س) - ٢

(٣٩) إذا كان المنحنى ص = د (س) يمثل دالة حقيقية فإن صورته بإزاحة قدرها ٥ وحدات رأسيا لأسفل هو المنحنى ر (س) = ...

(أ) د (س - ٥) (ب) د (س + ٥) (جـ) د (س) + ٥ (د) د (س) - ٥

(٤٠) منحنى ر (س) = س^{٢} + ٤ هو نفس منحنى د (س) = س^{٢} بإزاحة مقدارها ٤ وحدات في اتجاه ....

(أ) $\overleftarrow{و س}$ (ب) $\overleftarrow{و س}$ (جـ) $\overleftarrow{و ص}$ (د) $\overleftarrow{و ص}$

(٤١) منحنى الدالة ر حيث : ر (س) = |س| - ٢ هو نفس منحنى الدالة د : د (س) = |س|
بإزاحة مقدارها وحدتان فى اتجاه ....

(أ) $\overleftarrow{وس}$ (ب) $\overrightarrow{وس}$ (جـ) $\overleftarrow{وص}$ (د) $\overrightarrow{وص}$

(٤٢) إذا كانت : د دالة حقيقية مجالها [-٣ ، ٤] فإن مجال الدالة ر : ر (س) = د (س) + ٢
هو ....

(أ) [-٣ ، ٤] (ب) [-١ ، ٦] (جـ) [-٥ ، ٢] (د) ع

(٤٣) منحنى الدالة ر : ر (س) = ١/|س| + ٢ هو نفس منحنى الدالة د : د (س) = ١/|س|
بإزاحة مقدارها وحدتين فى اتجاه ....

(أ) $\overleftarrow{وس}$ (ب) $\overrightarrow{وس}$ (جـ) $\overleftarrow{وص}$ (د) $\overrightarrow{وص}$

(٤٤) منحنى الدالة د : د (س) = |س - ٣| هو نفس منحنى الدالة ر : ر (س) = |س|
بإزاحة مقدراها ٣ وحدات فى اتجاه ....

(أ) $\overleftarrow{وس}$ (ب) $\overrightarrow{وس}$ (جـ) $\overleftarrow{وص}$ (د) $\overrightarrow{وص}$

(٤٥) 📖 منحنى ر (س) = |س + ٣| هو نفس منحنى د (س) = |س|
بإزاحة مقدارها ٣ وحدات فى اتجاه ....

(أ) $\overleftarrow{وس}$ (ب) $\overrightarrow{وس}$ (جـ) $\overleftarrow{وص}$ (د) $\overrightarrow{وص}$

(٤٦) إذا كانت : ص = د (س) دالة حقيقية فإن صورتها بإزاحة قدرها ٤ وحدات جهة اليسار
هى ر (س) = ...

(أ) د (س - ٤) (ب) د (س + ٤) (جـ) د (س) + ٤ (د) د (س) - ٤

(٤٧) إذا كانت : د دالة حقيقية مجالها [-٢ ، ٣] فإن مجال الدالة ر : ر (س) = د (س - ٢)
هو ....

(أ) [-٢ ، ٣] (ب) [-٤ ، ١] (جـ) [٠ ، ٥] (د) ع

(٤٨) بفرض أن د (س) = - س^٢ ينتقل ٣ وحدات لليمين ووحدتان لأسفل وكان المنحنى الناتج هو ر (س)
فإن : ر (٤) = ...

(أ) -٣ (ب) -١٦ (جـ) ١٦ (د) -٧

(٤٩) نفرض أن المنحنى : د (س) = - س^٢ ينتقل ٤ وحدات لليسار ووحدتان لأعلى وكان المنحنى الناتج
هو ر (س) فإن : ر (-٢) = ...

(أ) -٢١٨ (ب) ٢١٤ (جـ) ٦ (د) -٦

(٥٠) منحنى الدالة ر : ر (س) = س هو نفس منحنى الدالة د : د (س) = ... بالانعكاس على محور السينات.

(أ) س (ب) - س (جـ) س + ١ (د) - س + ١

(٥١) المستقيمان د (س) = أ س + ب وصورته بالانعكاس فى محور السينات يكون حاصل ضرب ميليهما = ...

(أ) ١ (ب) -١ (جـ) أ (د) - أ^٢

(٥٢) المنحنى ر (س) = ١ - |س| هو نفس المنحنى د (س) = |س| بالانعكاس فى محور السينات ثم إزاحة مقدارها وحدة واحدة فى اتجاه ....

(أ) $\overleftarrow{وس}$ (ب) $\overrightarrow{وس}$ (جـ) $\overleftarrow{وص}$ (د) $\overrightarrow{وص}$

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ استخدم منحنى الدالة د حيث د (س) = س^٢ لتمثيل كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية ومن الرسم أوجد مجال ومدى الدالة وابحث اطرادها ونوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك واكتب معادلة محور تماثلها :

① 📖 ر (س) = س^٢ - ٣
② 📖 ر (س) = س^٢ + ١
③ 📖 ر (س) = ٢ - س^٢
④ 📖 ر (س) = (س - ٢)^٢
⑤ 📖 ر (س) = - (س - ٣)^٢
⑥ 📖 ر (س) = (س + ٢)^٢ - ٤
⑦ 📖 ر (س) = ٢ - (س + ٣)^٢
⑧ ر (س) = (٢ - س)^٢ - ١
⑨ 📖 ر (س) = (س + ٣/٢)^٢ - ١/٢
⑩ 📖 ر (س) = ١/٢ س^٢
⑪ ر (س) = س^٢ + ٤ س + ٤
⑫ 📖 ر (س) = س^٢ + ٤ س + ١

---

٢ استخدم منحنى الدالة د حيث د (س) = س^٣ لتمثيل كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية ومن الرسم عين مجالها ومداها وابحث اطرادها ونوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك واكتب نقطة تماثلها :

① 📖 ر (س) = س^٣ + ٤
② ر (س) = ٤ - س^٣
③ 📖 ر (س) = (س - ٣)^٣
④ ر (س) = (٢ - س)^٣
⑤ ر (س) = (س - ٢)^٣ + ١
⑥ ر (س) = ٢ - (س - ١)^٣
⑦ ر (س) = (٣ - س)^٣ + ١
⑧ ر (س) = ٢ س^٣ - ١

3 استخدم منحنى الدالة د حيث $\text{د}(\text{س}) = |\text{س}|$ لتمثيل كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية ومن الرسم عين مجالها ومداها وابحث اطرادها ونوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك و اكتب معادلة محور تماثلها:

(1) $\text{ر}(\text{س}) = |\text{س}| + 1$

(2) $\text{ر}(\text{س}) = |\text{س}| - 3$

(3) $\text{ر}(\text{س}) = 2 - |\text{س}|$

(4) $\text{ر}(\text{س}) = |\text{س} + 1|$

(5) $\text{ر}(\text{س}) = -|\text{س} + 5|$

(6) $\text{ر}(\text{س}) = |\text{س} - 2| + 1$

(7) $\text{ر}(\text{س}) = 4 - |\text{س} - 2|$

(8) $\text{ر}(\text{س}) = 2|\text{س}|$

(9) $\text{ر}(\text{س}) = 2|\text{س} - 7| + 2$

(10) $\text{ر}(\text{س}) = 5 - 2|\text{س} + 2|$

(11) $\text{ر}(\text{س}) = 1 - |\frac{1}{2}\text{س} - 1|$

(12) $\text{ر}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}^2 - 8\text{س} + 16}$

4 استخدم منحنى الدالة د حيث $\text{د}(\text{س}) = \frac{1}{\text{س}}$ لتمثيل كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية ومن الرسم عين مجالها ومداها وابحث اطرادها وبين نوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك واكتب نقطة تماثلها:

(1) $\text{ر}(\text{س}) = \frac{1}{\text{س}} + 2$

(2) $\text{ر}(\text{س}) = \frac{-1}{\text{س} + 2}$

(3) $\text{ر}(\text{س}) = \frac{1}{\text{س} - 2} + 3$

(4) $\text{ر}(\text{س}) = 3 - \frac{1}{\text{س} + 2}$

(5) $\text{ر}(\text{س}) = \frac{1}{\text{س} - 4} - 3$

(6) $\text{ر}(\text{س}) = \frac{\text{س} + 1}{\text{س}}$

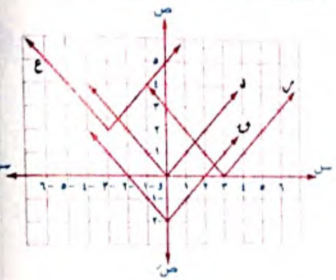
(7) $\text{ر}(\text{س}) = \frac{\text{س} - 3}{\text{س} - 2}$

(8) $\text{ر}(\text{س}) = \frac{2\text{س}}{\text{س} + 1}$

(9) $\text{ر}(\text{س}) = \frac{3\text{س} - 5}{\text{س} - 2}$

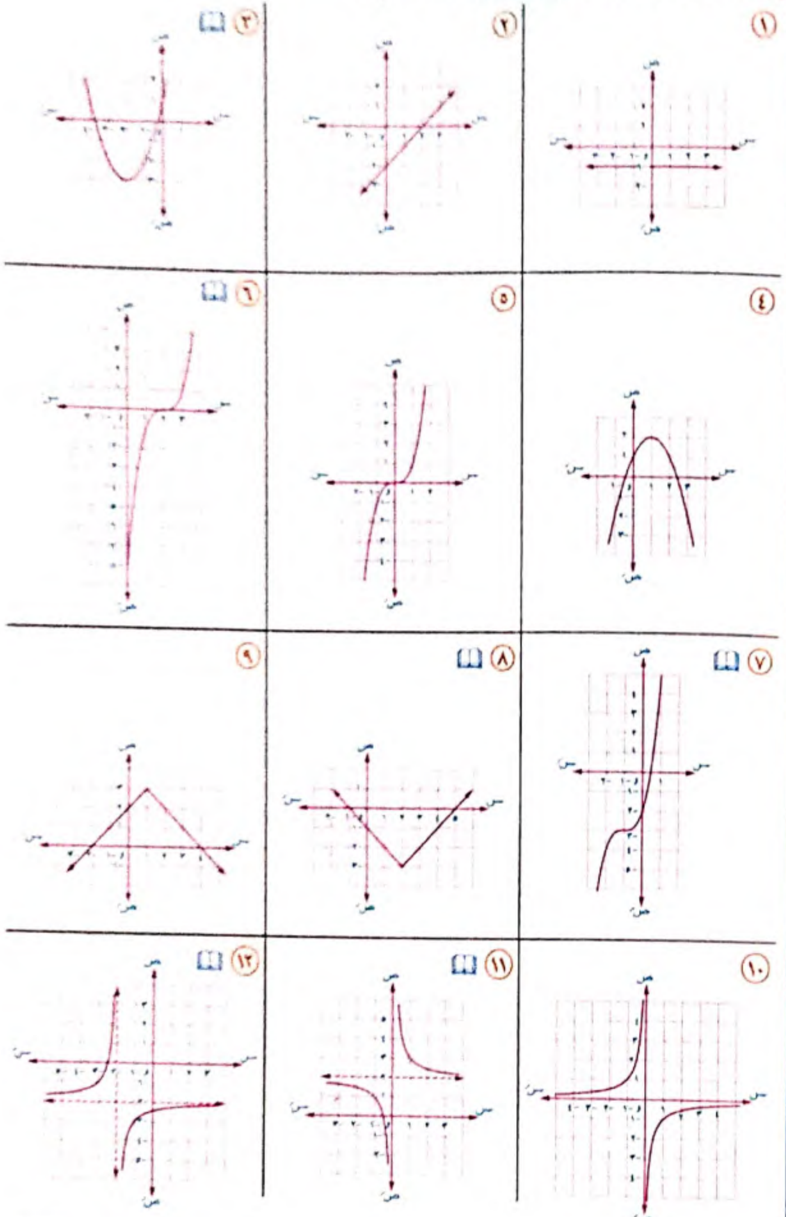
(10) $\text{ر}(\text{س}) = \frac{\text{س} - 1}{\text{س}^2 - 1}$

5 رسم منحنى الدالة د حيث $\text{د}(\text{س}) = |\text{س}|$ ثم أزيح في اتجاه محوري الإحداثيات كما في الشكل المقابل.



اكتب قاعدة لكل من الدوال الآتية: ر ، ن ، ع

1 اكتب قاعدة الدالة د الممثلة بيانيًا بكل من الأشكال الآتية:



7 إذا كانت د ، ر ، ق ، هـ دوال حقيقية حيث $د(س) = س^{٢}$ ، $ر(س) = س^{٣}$ ، $ق(س) = |س|$ ، $هـ(س) = \frac{١}{س}$ فمثل كلًا من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية موضحًا مجالها ومداها :

① $د_{١}(س) = د(س + ١)$
② $د_{٢}(س) = د(س) - ١$
③ $د_{٣}(س) = ٢ - د(س - ١)$
④ $ر_{١}(س) = ر(س - ١)$
⑤ $ر_{٢}(س) = ر(س) - \frac{١}{٢}$
⑥ $ر_{٣}(س) = ر(س - ١) + ٢$
⑦ $ق_{١}(س) = ٢ق(س)$
⑧ $ق_{٢}(س) = \frac{١}{٢}ق(س) - ٣$
⑨ $ق_{٣}(س) = ٢ق(س - ١)$
⑩ $هـ_{١}(س) = هـ(س - ٢)$
⑪ $هـ_{٢}(س) = هـ(س) - ١$
⑫ $هـ_{٣}(س) = ٢ - هـ(س + ١)$

8 ارسم منحنى الدالة د في كل مما يأتي وعين مداها وابحث اطرادها :

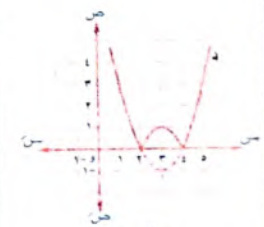
① $د(س) = \begin{cases} س^{٢} + ١ & ، س > ٠ \\ -س^{٢} - ١ & ، س < ٠ \end{cases}$

② 📖 $د(س) = \begin{cases} س^{٢} + ١ & ، -٤ \leq س < ٠ \\ -س^{٢} - ١ & ، ٠ \leq س \leq ٤ \end{cases}$

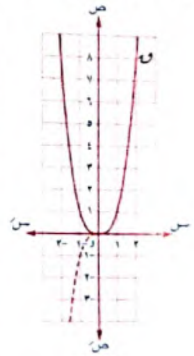
③ $د(س) = \begin{cases} (س - ١)^{٣} & ، س \geq ٠ \\ -١ & ، س < ٠ \end{cases}$

④ $د(س) = \begin{cases} (س + ١)^{٢} + ٢ & ، س \leq -١ \\ \frac{١}{س + ١} + ١ & ، س > -١ \end{cases}$

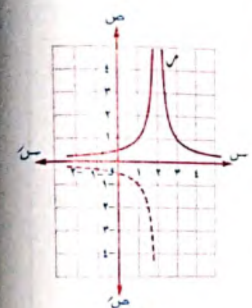
9 📖 تبين الأشكال التالية منحنيات الدوال د ، ق ، ر على الترتيب. اكتب قاعدة الدالة في كل شكل :



شكل(١)



شكل(٢)



شكل(٣)

10 إذا كانت : $د(س) = \frac{١}{س}$ فارسم الشكل البياني للدالة ر في كل من الحالات الآتية :

① 📖 $ر(س) = |د(س)|$
② $ر(س) = -|د(س)|$
③ 📖 $ر(س) = ٢ + |د(س)|$
④ 📖 $ر(س) = |د(س - ٢)|$
⑤ $ر(س) = |د(س + ١)| - ٢$

11 ارسم منحنى الدالة د في كل مما يأتي :

① $د(س) = س|س|$
② 📖 $د(س) = س|س| - ١$
③ $د(س) = |س^{٣}|$
④ $د(س) = -|س^{٣}|$
⑤ $د(س) = \frac{س^{٤}}{|س|}$
⑥ $د(س) = |س^{٣}| + ٢$
⑦ $د(س) = س^{٢}|س| + ٢$
⑧ $د(س) = \frac{س^{٣}}{|س|} - ٣$
⑨ 📖 $د(س) = (س - ٢)|س|$

12 ارسم منحنى الدالة د وحدد مداها وابحث اطرادها إذا كانت :

① $د(س) = |٤ - س^{٢}|$
② 📖 $د(س) = |س^{٢} - ٢س - ٣|$ ، $س \in [-١ ، ٤]$

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

1 اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت د دالة كثيرة حدود وكانت $د(س) = ٠$ عندما $س \in \{-٣ ، ١ ، ٠\}$

فإن المنحنى $ر(س) = د(س - ٣)$ يقطع محور السينات عندما $س \in$ ....

(أ) $\{-٣ ، ١ ، ٠\}$ (ب) $\{٣ ، ٠ ، -٢\}$ (جـ) $\{٠ ، ٢ ، ٤\}$ (د) $\{-٦ ، ٢ ، ٠\}$

② إذا كانت د : $د(س) = (س - أ + ١)^{٢} + ب - ٢$ دالة تربيعية مداها $= [١ ، \infty[$ ، ومنحنى د يمر بالنقطة (٣ ، ٢) فإن : أ = ...

(أ) ± ٤ (ب) ٣أ ، ٥ (جـ) ٣أ ، -٥ (د) -٣أ ، ٥

③ إذا كانت : ر(س) تناقصية في $]-\infty ، ٠[$ ، وتزايدية في $]٠ ، \infty[$

فإن : $د(س) = ر(س + ١)$ تكون متزايدة في ....

(أ) $]-١ ، \infty[$ (ب) $]-\infty ، -١[$ (جـ) $]٠ ، \infty[$ (د) $]-\infty ، ٠[$

④ المنحنى : ص = ٣ (س − ٥)^{٢} + ٧ تحت تأثير انتقال ٣ وحدات فى الاتجاه الموجب للمحور السينى وحدة فى الاتجاه السالب للمحور الصادى هو ....

(أ) ص = ٣ (س + ٨)^{٢} + ٦ (ب) ص = ٣ (س − ٨)^{٢} − ٦

(جـ) ص = ٣ (س − ٨)^{٢} + ٦ (د) ص = ٣ (س + ٨)^{٢} − ٦

⑤ إذا كانت : د (س) = |س| + ٢ فإن مدى الدالة (د ∘ د) = ...

(أ)]−∞ ، ٤] (ب) [٤ ، ∞[(جـ) [−٤ ، ٤] (د) [٠ ، ٤]

⑥ إذا كانت : ر (س) = $\frac{١}{٢}$ س^{٢} − ٨ ، د (س) = |س| فإن مدى الدالة (د ∘ ر) = ...

(أ) [−٨ ، ∞[(ب) [٠ ، ∞[(جـ) [٨ ، ∞[(د) ح

⑦ إذا كانت : د دالة فردية فإن : |د (س)| تكون ....

(أ) فردية. (ب) زوجية.

(جـ) زوجية وفردية معًا. (د) ليست زوجية وليست فردية.

⑧ إذا كانت د : د (س) = { س^{٢} + ٢ ، س > ٠ ؛ ر (س) ، س < ٠ } متماثلة حول نقطة الأصل فإن : ر ....

(أ) تناقصية. (ب) تزايدية. (جـ) ليست أحادية. (د) زوجية.

⑨ إذا كانت د : د (س) = { س^{٢} + ٢ ، س ≥ ٠ ؛ ر (س) ، س < ٠ } متماثلة حول محور الصادات

فإن : ر (س) = ...

(أ) س^{٢} − ٢ (ب) س^{٢} + ٢ (جـ) − س^{٢} + ٢ (د) − س^{٢} − ٢

٢ ارسم منحنى الدالة د فى كل مما يأتى ومن الرسم حدد المجال والمدى وابحث الاطراد وبيّن هل الدالة زوجية أم فردية أم غير ذلك :

① د (س) = س^{٣} + س^{٢} |س| + ٢

② د (س) = (|س| − ١)^{٢}

③ د (س) = $\frac{|س + ١|}{س^{٢} + ٢ س + ٢}$

④ د (س) = { |س + ٢| ، س ≤ −١ ؛ ١ ، −١ < س < ١ ؛ |س − ٢| ، س ≥ ١ }

⑤ د (س) = |س + ١| − |س − ١|

الدرس 6 حل معادلات ومتباينات القيمة المطلقة

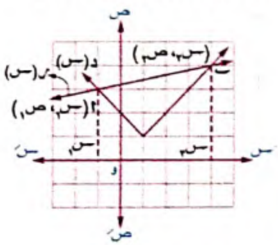
أولًا حـل معادلات القيمة المطلقة

توجد طريقتان لحل معادلات القيمة المطلقة (المقياس).

١ الطريقة البيانية :

وفيها نستخدم التمثيل البيانى للدوال الحقيقية فى حل المعادلات مع ملاحظة أنه : لأى دالتين د ، ر تكون مجموعة حل المعادلة : د (س) = ر (س) هى مجموعة الإحداثيات السينية لنقط تقاطع منحنيى الدالتين د ، ر

ففى الشكل المقابل :



إذا كان منحنيا الدالتين د ، ر يتقاطعان فى النقطتين

أ (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) ، ب (س$_{٢}$ ، ص$_{٢}$)

فإن مجموعة حل المعادلة :

د (س) = ر (س) فى ح هى {س$_{١}$ ، س$_{٢}$}

٢ الطريقة الجبرية :

وفيها نستخدم تعريف المقياس وبعض خواص مقياس العدد الحقيقى فى حل المعادلات كما يلى.

تعريف المقياس

إذا كانت : س ∈ ح ، أ ، ب عددين حقيقيين فإن : |س| = { س ، س ≥ ٠ ؛ −س ، س < ٠ }

ومنها |س + أ| = { س + أ ، س ≥ −أ ؛ −س − أ ، س < −أ }

، |أ س + ب| = { أ س + ب ، س ≥ −$\frac{ب}{أ}$ ؛ −أ س − ب ، س < −$\frac{ب}{أ}$ }

خواص مقياس العدد الحقيقي

١ |أ| ≥ ٠

٢ |أ ب| = |أ| × |ب|

٣ |أ + ب| ≤ |أ| + |ب|

أى أن مقياس مجموع عددين أصغر من أو يساوى مجموع مقياسيهما ويحدث التساوى إذا كان أ ، ب سالبين معًا أو موجبين معًا أو كليهما يساوى الصفر

فمثلًا : |٤ + (-٧)| < |٤| + |-٧| ، |-٤ + (-٧)| = |-٤| + |-٧|

ملاحظات

١ لأى عدد حقيقى أ يكون |أ| = |-أ| **فمثلًا :** |٣| = |-٣|

٢ |أ - س| = |س - أ| **فمثلًا :** |٢ - س| = |س - ٢|

٣ |س| = حـ ، حـ > ٠ ⟺ س = ± حـ

فمثلًا : إذا كان : |س| = ٣ فإن : س = ± ٣

وإذا كان : أ = ± ٥ فإن : |أ| = ٥

٤ إذا كان : أ ، ب عددين حقيقيين فإن : |أ| = |ب| ⟺ أ = ± ب

٥ لأى عدد حقيقى أ يكون (|أ|)² = أ² **فمثلًا :** (|-٢|)² = ٤ ، (|-½|)² = ¼

٦ لأى عدد حقيقى أ يكون √أ² = |أ| **فمثلًا :** √(٥)² = |٥| = ٥ ، √(-٣)² = |-٣| = ٣

٧ إذا كان : |س| = س فإن : س ∈ [٠ ، ∞[

٨ إذا كان : |س| = -س فإن : س ∈]-∞ ، ٠]

١ حل المعادلة على الصورة : |أ س + ب| = حـ ، حـ ∈ [٠ ، ∞[

«أى مقياس مقدار من الدرجة الأولى = عدد حقيقى غير سالب»

الحل البيانى

الاحداثيات السينية لنقط تقاطع المنحنين

د (س) = |أ س + ب|

، ر (س) = حـ

الحل الجبرى

(١) باستخدام تعريف المقياس.

(٢) ما بداخل المقياس = ± العدد الحقيقى

ملاحظة

إذا كان |أ س + ب| = حـ ، حـ ∈]-∞ ، ٠[فإن مجموعة الحل فى ح = ∅

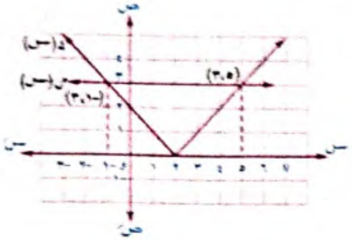
فمثلًا : مجموعة حل المعادلة : |٢ س - ٤| = -٥ فى ح هى ∅

مثال ١

أوجد بيانيًا ثم جبريًا مجموعة حل المعادلة : |س - ٢| = ٣

الحل

الحل البيانى : بوضع د (س) = |س - ٢| ، ر (س) = ٣



- نرسم منحنى الدالة

∴ د (س) = |س - ٢|

وهو نفس المنحنى ص = |س|

بإزاحة أفقية وحدتين فى اتجاه و س→

- نرسم منحنى الدالة ر : ر (س) = ٣

وهى دالة ثابتة يمثلها بيانيًا خط مستقيم يوازى محور السينات ويقطع محور الصادات فى النقطة (٠ ، ٣)

- نوجد نقطتى تقاطع المنحنين وهما (-١ ، ٣) ، (٥ ، ٣)

∴ مجموعة الحل فى ح = {-١ ، ٥}

الحل الجبرى : **أولًا : باستخدام تعريف دالة المقياس :**

د (س) = |س - ٢| = { س - ٢ ، س - ٢ ≥ ٠ ؛ -س + ٢ ، س - ٢ < ٠ } ∴ د (س) = { س - ٢ ، س ≥ ٢ ؛ -س + ٢ ، س < ٢ }

عندما س ≥ ٢ : س - ٢ = ٣ ومنها س = ٥ ∈ [٢ ، ∞[

عندما س < ٢ : -س + ٢ = ٣ ومنها س = -١ ∈]-∞ ، ٢[

∴ مجموعة الحل فى ح = {-١ ، ٥}

ثانيًا : باستخدام الخاصية «ما بداخل المقياس = ± العدد الحقيقى»

∵ |س - ٢| = ٣ ∴ س - ٢ = ± ٣

∴ س - ٢ = ٣ ومنها س = ٥ أ، س - ٢ = -٣ ومنها س = -١

∴ مجموعة الحل = {٥ ، -١}

٤ حل المعادلة على الصورة : |أ س + ب| = |حـ س + ء|

"أى أن : مقياس مقدار من الدرجة الأولى فى س = مقياس مقدار آخر من الدرجة الأولى فى س"

الحل البيانى

الإحداثيات السينية لنقط تقاطع المنحنيين
د(س) = |أ س + ب|
، ر(س) = |حـ س + ء|

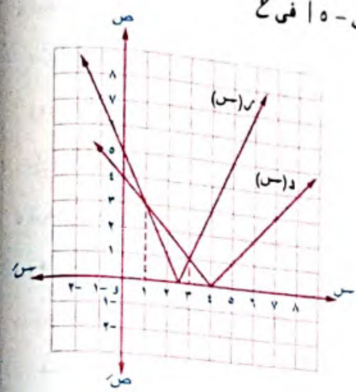
الحل الجبرى

① أحد المقدارين = ± المقدار الآخر.
② بتربيع طرفى المعادلة.

مثال ٤

أوجد بيانيًا ثم جبريًا مجموعة حل المعادلة : |س − ٤| = |٢ س − ٥| فى ح

الحل



بوضع د(س) = |س − ٤|
، ر(س) = |٢ س − ٥| = ٢ |س − $\frac{1}{2}$٢|

الحل البيانى : الدالة د يمثلها بيانيًا المنحنى : ص = |س|
بإزاحة أفقية ٤ وحدات فى اتجاه و س→
، الدالة ر يمثلها بيانيًا المنحنى : ص = ٢ |س|
بإزاحة أفقية $\frac{1}{2}$٢ وحدة فى اتجاه و س→
، ∵ المنحنيين يتقاطعان فى النقطتين (١ ، ٣) ، (٣ ، ١)
∴ مجموعة الحل = {١ ، ٣}

الحل الجبرى : أولاً : باستخدام الخاصية : أحد المقدارين = ± المقدار الآخر
∵ |س − ٤| = |٢ س − ٥| ∴ س − ٤ = ± (٢ س − ٥) (من خواص المقياس)
∴ س − ٤ = ٢ س − ٥ ومنها س = ١
أ، س − ٤ = −٢ س + ٥ ∴ ٣ س = ٩ ومنها س = ٣
∴ مجموعة الحل = {١ ، ٣}

ثانيًا : بتربيع طرفى المعادلة :
∵ (س − ٤)² = (٢ س − ٥)² ∴ س² − ٨ س + ١٦ = ٤ س² − ٢٠ س + ٢٥
∴ ٣ س² − ١٢ س + ٩ = ٠ ∴ س² − ٤ س + ٣ = ٠
∴ (س − ٣) (س − ١) = ٠ ∴ س = ٣ أ، س = ١
∴ مجموعة الحل = {٣ ، ١}

٣ حل المعادلة على الصورة : |أ س + ب| = حـ س + ء

"أى أن : مقياس مقدار من الدرجة الأولى فى س = مقدار من الدرجة الأولى فى س"

الحل البيانى

الإحداثيات السينية لنقط تقاطع المنحنيين
د(س) = |أ س + ب|
، ر(س) = حـ س + ء

الحل الجبرى

نستخدم إعادة تعريف المقياس فنحصل على المعادلتين
أ س + ب = حـ س + ء عند س ≥ $\frac{-ب}{أ}$
، أ س + ب = −حـ س − ء عند س < $\frac{-ب}{أ}$

مثال ٣

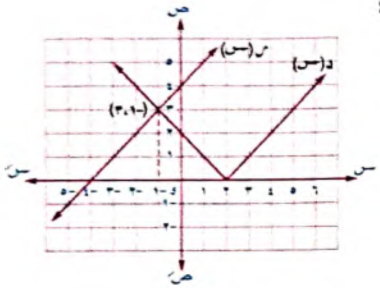
أوجد بيانيًا ثم جبريًا مجموعة الحل فى ح لكل من المعادلات الآتية :

١ |س − ٢| = س + ٤ ٢ |س + ٣| − $\frac{1}{2}$ س = ٣
٣ |س − ٣| = ٢ − س

الحل

١ بوضع د(س) = |س − ٢| ، ر(س) = س + ٤

الحل البيانى :

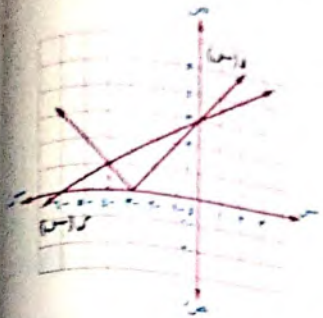


∵ الدالة د يمثلها بيانيًا المنحنى ص = |س|
بإزاحة أفقية وحدتين فى اتجاه و س→
، الدالة ر يمثلها بيانيًا المنحنى
ص = س بإزاحة رأسية ٤
وحدات فى اتجاه و ص→
∴ المنحنيان يتقاطعان فى نقطة واحدة (−١ ، ٣)
∴ مجموعة الحل = {−١}

الحل الجبرى : د(س) = |س − ٢| = { س − ٢ ، س ≥ ٢ ؛ −س + ٢ ، س < ٢ }

• عندما س ≥ ٢ : س − ٢ = س + ٤ ومنها −٢ = ٤ (غير ممكن) ∴ لا يوجد حل
• عندما س < ٢ : −س + ٢ = س + ٤ ومنها س = −١ ∈]−∞ ، ٢[
∴ مجموعة الحل = {−١}

٢ | س + ٢ | = ½ س + ٢ بوضع د (س) = | س + ٢ | ، ر (س) = ½ س + ٢



الحل البياني :

د يمثلها المنحنى ص = | س | بإزاحة أفقية ٢ وحدات في اتجاه و س ، ر يمثلها المنحنى ص = س مع انكماش رأسي فيه ½ وإزاحة رأسية ٢ وحدات في اتجاه و ص (أي مستقيم ميله = ½ ويمر بالنقطة (٠ ، ٢))

∴ المنحنيان يتقاطعان في (٠ ، ٢) ، (–٤ ، ١)

∴ مجموعة الحل = {٠ ، –٤}

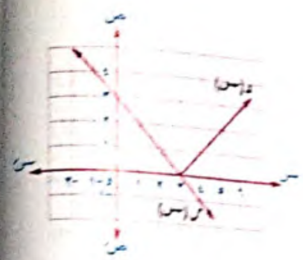
الحل الجبري : د (س) = | س + ٢ | = { س + ٢ ، س ≥ –٢ ؛ –س – ٢ ، س < –٢ }

عندما س ≥ –٢ : س + ٢ = ½ س + ٢ ومنها س = ٠ ∈ [–٢ ، ∞[

عندما س < –٢ : –س – ٢ = ½ س + ٢ ومنها س = –٤ ∈]–∞ ، –٢[

∴ مجموعة الحل = {٠ ، –٤}

٣ بفرض أن : د (س) = | س – ٢ | ، ر (س) = ٢ – س = –س + ٢



الحل البياني :

د يمثلها بيانيًا المنحنى ص = | س | بإزاحة أفقية ٢ وحدات في اتجاه و س ، ر يمثلها بيانيًا المنحنى ص = س بالانعكاس في محور الصادات ثم إزاحة رأسية ٢ وحدات في اتجاه و ص

∴ المنحنيان يتقاطعان في عدد لا نهائي من النقط (س ، ص) بحيث إن س ∈]–∞ ، ٢]

∴ مجموعة الحل =]–∞ ، ٢]

الحل الجبري : د (س) = | س – ٢ | = { س – ٢ ، س ≥ ٢ ؛ –س + ٢ ، س < ٢ }

عندما س ≥ ٢ ∴ س – ٢ = ٢ – س ∴ ٢س = ٤

∴ س = ٢ ∈ [٢ ، ∞[

عندما س < ٢ ∴ –س + ٢ = ٢ – س

وهذه العلاقة تتحقق لجميع قيم س ∈]–∞ ، ٢[

∴ مجموعة الحل = {٢} ∪]–∞ ، ٢[=]–∞ ، ٢]

مثال ٤

أوجد جبريًا مجموعة الحل في ح لكل من المعادلات الآتية :

١ ٢ | س – ٩ | – | ٣ – س | = ١٠   ٢ √(س² – ٤س + ٤) + س = ١٠

٣ س² – ٣ | س | – ٢٨ = ٠

الحل

١ ∵ ٢ | س – ٩ | – | ٣ – س | = ١٠ ∴ ٢ | س – ٣ | – | س – ٣ | = ١٠

(لاحظ أن : | س – ٣ | = | ٣ – س |)

∴ ٢ | س – ٣ | = ١٠ ∴ | س – ٣ | = ٥ ∴ س – ٣ = ± ٥

∴ س – ٣ = ٥ ومنها س = ٨

أو س – ٣ = –٥ ومنها س = –٢ ∴ مجموعة الحل = {٨ ، –٢}

٢ ∵ √(س² – ٤س + ٤) + س = ١٠ ∴ √((س – ٢)²) = ١٠ – س

∴ | س – ٢ | = ١٠ – س

، ∵ | س – ٢ | = { س – ٢ ، س ≥ ٢ ؛ –س + ٢ ، س < ٢ }

عندما س ≥ ٢ : س – ٢ = ١٠ – س ومنها س = ٦ ∈ [٢ ، ∞[

، عندما س < ٢ : –س + ٢ = ١٠ – س

∴ ٢ = ١٠ (وهذا مستحيل) ∴ مجموعة الحل = {٦}

٣ ∵ | س | = { س ، س ≥ ٠ ؛ –س ، س < ٠ }

∴ س² – ٣ | س | – ٢٨ = { س² – ٣س – ٢٨ ، س ≥ ٠ ؛ س² + ٣س – ٢٨ ، س < ٠ }

، عندما س ≥ ٠ : س² – ٣س – ٢٨ = ٠

∴ (س – ٧) (س + ٤) = ٠ ومنها س = ٧ ∈ [٠ ، ∞[أو س = –٤ ∉ [٠ ، ∞[

، عندما س < ٠ : س² + ٣س – ٢٨ = ٠

∴ (س + ٧) (س – ٤) = ٠ ومنها س = –٧ ∈]–∞ ، ٠[

أو س = ٤ ∉]–∞ ، ٠[∴ مجموعة الحل = {٧ ، –٧}

حل آخر : ∵ |س|² = |س²| = س²

∴ |س|² − ٣ |س| − ٢٨ = ٠ ∴ (|س| − ٧) (|س| + ٤) = ٠

∴ |س| = ٧ ومنها س = ± ٧ أو |س| = −٤ (مرفوض)

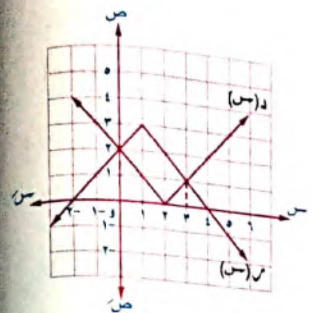
∴ مجموعة الحل = {٧ ، −٧}

مثال ⑤

أوجد مجموعة حل كل من المعادلتين الآتيتين بيانيًا فى ح :

١ |س − ٢| + |س − ١| = ٣   ٢ |س − ٣| = ٣ − |س|

الحل



١ |س − ٢| = −|س − ١| + ٣

بوضع د (س) = |س − ٢|

، ر (س) = −|س − ١| + ٣

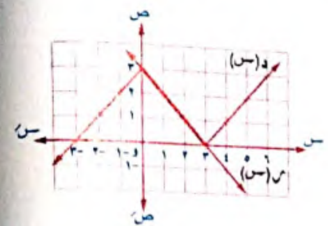
∵ د يمثلها المنحنى ص = |س|

بإزاحة أفقية وحدتين فى اتجاه و س←

، ر يمثلها المنحنى ص = |س|

بالانعكاس فى محور السينات ثم إزاحة أفقية وحدة واحدة فى اتجاه و س← وإزاحة رأسية ٣ وحدات فى اتجاه و ص←

∴ المنحنيان يتقاطعان فى (٠ ، ٢) ، (٣ ، ١) ∴ مجموعة الحل = {٠ ، ٣}



٢ بوضع د (س) = |س − ٣| ، ر (س) = ٣ − |س|

∴ د يمثلها المنحنى ص = |س|

بإزاحة أفقية ٣ وحدات فى اتجاه و س←

، ر يمثلها صورة المنحنى ص = |س|

بالانعكاس فى محور السينات ثم إزاحة رأسية ٣ وحدات فى اتجاه و ص←

∴ المنحنيان يتقاطعان فى عدد لا نهائى من النقط (س ، ص) بحيث س ∈ [٠ ، ٣]

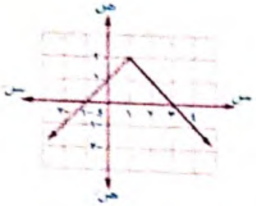
∴ مجموعة الحل = [٠ ، ٣]

مثال ⑥

ارسم الشكل البيانى للدالة د : د (س) = ٢ − |س − ١|

ومن الرسم استنتج مجموعة الحل للمعادلة : د (س) = ٠

الحل



∵ د (س) = −|س − ١| + ٢

∴ د يمثلها بيانيًا صورة المنحنى ص = |س| بالانعكاس فى محور السينات ثم إزاحة أفقية وحدة واحدة فى اتجاه و س← ثم إزاحة رأسية وحدتان فى اتجاه و ص←

∴ مجموعة الحل للمعادلة : د (س) = ٠

هى مجموعة الإحداثيات السينية لنقط تقاطع الخط البيانى للدالة د مع محور السينات

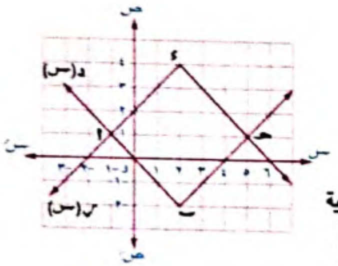
أى مع المستقيم ص = ٠ فنجدها ٣ ، −١ ∴ مجموعة الحل للمعادلة = {٣ ، −١}

مثال ⑦

أوجد بالوحدات المربعة المساحة المحصورة بين المنحنيين د ، ر حيث :

د (س) = |س − ٢| − ٢ ، ر (س) = ٤ − |س − ٢|

الحل



د يمثلها المنحنى ص = |س| بإزاحة أفقية وحدتين فى اتجاه و س← وإزاحة رأسية وحدتين فى اتجاه و ص← ، ر يمثلها صورة المنحنى ص = |س| بالانعكاس فى محور السينات ثم إزاحة أفقية وحدتين فى اتجاه و س← وإزاحة رأسية ٤ وحدات فى اتجاه و ص←

من الرسم :

المساحة المحصورة بين منحنيى الدالتين د ، ر

هى سطح مربع رؤوسه النقط أ (−١ ، ١) ، ب (٢ ، −٢)

، جـ (٥ ، ١) ، ء (٢ ، ٤)

وطول قطره أ جـ = ٥ − (−١) = ٦ وحدة طول

∴ مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين د ، ر

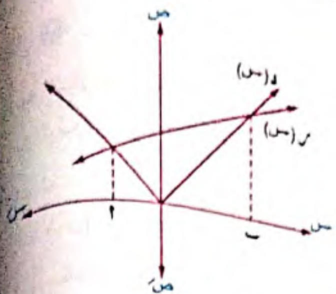
= مساحة سطح المربع أ ب جـ ء = ½ (أ جـ)²

= ½ × ٣٦ = ١٨ وحدة مربعة.

> **لاحظ أن**
>
> القطرين أ جـ ، ب ء ينصف كل منهما الآخر ومتعامدان ومتساويان فى الطول
>
> ∴ الشكل يمثل مربعًا.

ثانيًا حل متباينات القيمة المطلقة

١ الحل البيانى لمتباينات القيمة المطلقة



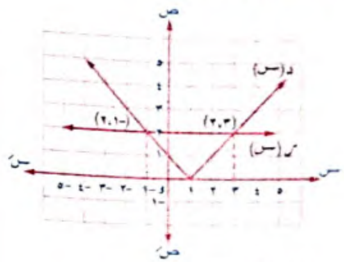
فى الشكل المقابل : لأى دالتين د ، ر

- مجموعة حل المتباينة د(س) < ر(س) هى]أ ، ب[
وهى مجموعة قيم س التى يكون عندها منحنى الدالة د أسفل منحنى الدالة ر
- مجموعة حل المتباينة : د(س) > ر(س) هى]-∞ ، أ[∪]ب ، ∞[= ح - [أ ، ب]
وهى مجموعة قيم س التى يكون عندها منحنى الدالة د أعلى منحنى الدالة ر

لاحظ من الشكل أن : مجموعة حل المعادلة د(س) = ر(س) هى {أ ، ب} ولذلك فإن :

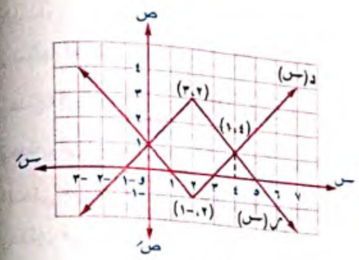
- مجموعة حل المتباينة : د(س) ≤ ر(س) هى [أ ، ب]
- مجموعة حل المتباينة : د(س) ≥ ر(س) هى]-∞ ، أ] ∪ [ب ، ∞[= ح -]أ ، ب[

فمثلًا فى : الشكل ①



مجموعة حل المتباينة
د(س) < ر(س) هى]-١ ، ٣[
مجموعة حل المتباينة
د(س) > ر(س) هى ح - [-١ ، ٣]
مجموعة حل المعادلة
د(س) = ر(س) هى {-١ ، ٣}

الشكل ②



مجموعة حل المتباينة :
د(س) < ر(س) هى]٠ ، ٤[
مجموعة حل المتباينة :
د(س) > ر(س) هى ح - [٠ ، ٤]
مجموعة حل المعادلة :
د(س) = ر(س) هى {٠ ، ٤}

مثال ٨

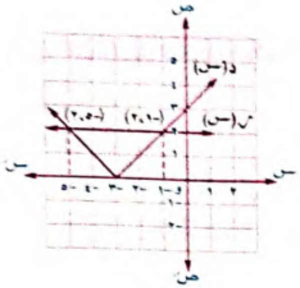
أوجد بيانيًا فى ح مجموعة حل كل من المتباينات الآتية :

١ |س + ٣| < ٢ ٢ |٢س - ٨| ≤ ٦

٣ |س - ٣| > ½ س ٤ |س - ٢| ≤ ٣ - |س - ٣|

الحـل

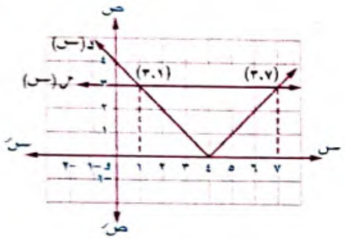
١ بوضع د(س) = |س + ٣| ، ر(س) = ٢



من التمثيل البيانى للدالتين د ، ر
فى الشكل المقابل ينتج أن :
د(س) < ر(س) أى |س + ٣| < ٢
فى الفترة]-٥ ، -١[
∴ مجموعة حل المتباينة =]-٥ ، -١[

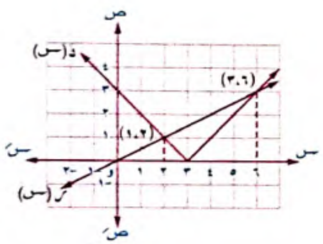
٢ ∵ |٢(س - ٤)| ≤ ٦
∴ ٢|س - ٤| ≤ ٦
∴ |س - ٤| ≤ ٣

بوضع د(س) = |س - ٤| ، ر(س) = ٣



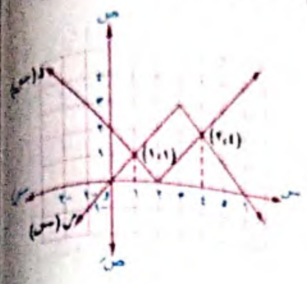
من التمثيل البيانى للدالتين د ، ر
فى الشكل المقابل ينتج أن :
د(س) ≤ ر(س)
أى |س - ٤| ≤ ٣ فى الفترة [١ ، ٧]
∴ مجموعة حل المتباينة = [١ ، ٧]

٣ بوضع د(س) = |س - ٣| ، ر(س) = ½ س



من التمثيل البيانى للدالتين د ، ر
فى الشكل المقابل ينتج أن : د(س) > ر(س)
أى |س - ٣| > ½ س فى الفترة
]-∞ ، ٢[∪]٦ ، ∞[= ح - [٢ ، ٦]
∴ مجموعة حل المتباينة = ح - [٢ ، ٦]

٤ بوضع د (س) = |س - ٢| ، ر (س) = ٢ - |س - ٢| - |س - ٣| = - |س - ٣| + ٢



من التمثيل البياني للدالتين د ، ر

في الشكل المقابل يتضح أن : د (س) ≤ ر (س) أي :

|س - ٢| ≤ ٣ - |س - ٣| في الفترة

]- ∞ ، ١[∪]٤ ، ∞[= ح - [١ ، ٤]

∴ مجموعة حل المتباينة = ح -]١ ، ٤[

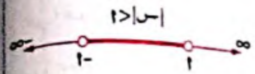
٢ الحل الجبري لمتباينات القيمة المطلقة

نتائج

• لكل أ ∈ ح⁺

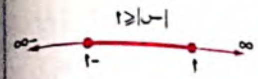
١ إذا كان : |س| < أ فإن : -أ < س < أ

أي أن س ∈]-أ ، أ[



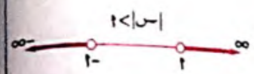
٢ إذا كان : |س| ≤ أ فإن : -أ ≤ س ≤ أ

أي أن س ∈ [-أ ، أ]



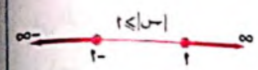
٣ إذا كان : |س| > أ فإن : س > أ أو س < -أ

أي أن س ∈ ح - [-أ ، أ]



٤ إذا كان : |س| ≥ أ فإن : س ≥ أ أو س ≤ -أ

أي أن س ∈ ح -]-أ ، أ[



• لكل أ ∈ ح⁻

١ مجموعة حل المتباينة |س| < أ ، |س| ≤ أ في ح تساوي ∅

٢ مجموعة حل المتباينة |س| > أ ، |س| ≥ أ في ح تساوي ح

مثال ٥

أوجد في ح مجموعة الحل لكل من المتباينات الآتية :

١ |٢ س - ٥| < ١

٢ |س + ٢| > ٣

٣ $\sqrt{4س^2 + 12س + 9} \le 1$

٤ $\frac{1}{|2س - 1|} \ge 5$

٥ |٢ س - ٥| + |٥ - ٢ س| < ١٤

الحل

١ ∵ |٢ س - ٥| < ١ ∴ -١ < ٢ س - ٥ < ١

∴ -١ + ٥ < ٢ س < ١ + ٥ ∴ ٤ < ٢ س < ٦ بالقسمة على ٢

∴ ٢ < س < ٣ ∴ مجموعة الحل =]٢ ، ٣[

٢ ∵ |س + ٢| > ٣

∴ س + ٢ > ٣ أ، س + ٢ < -٣

∴ س > ١ | ∴ س < -٥

∴ مجموعة الحل = ح - [-٥ ، ١]

لاحظ أنه

عند حل المتباينة |س + ٢| > ٣
يمكن أن نحل أولاً المتباينة
|س + ٢| ≤ ٣ كالتالي
∴ -٣ ≤ س + ٢ ≤ ٣
∴ -٥ ≤ س ≤ ١ ∴ م.ح = [-٥ ، ١]
∴ م.ح المتباينة المطلوبة |س + ٢| > ٣
هي ح - [-٥ ، ١]

٣ ∵ $\sqrt{4س^2 + 12س + 9} \le 1$

∴ $\sqrt{(2س + 3)^2} \le 1$

∴ |٢ س + ٣| ≤ ١ ∴ -١ ≤ ٢ س + ٣ ≤ ١

∴ -٤ ≤ ٢ س ≤ -٢ ∴ -٢ ≤ س ≤ -١

∴ مجموعة الحل = [-٢ ، -١]

٤ ∵ $\frac{1}{|2س - 1|} \ge 5$

∴ $|2س - 1| \le \frac{1}{5}$

∴ $-\frac{1}{5} \le 2س - 1 \le \frac{1}{5}$

∴ $\frac{4}{5} \le 2س \le \frac{6}{5}$

∴ $\frac{4}{10} \le س \le \frac{3}{5}$

، ∵ |٢ س - ١| = ٠ عندما س = $\frac{1}{2}$

∴ مجموعة الحل = $[\frac{4}{10} ، \frac{3}{5}] - \{\frac{1}{2}\}$

لاحظ أنه

• إذا كان أ ، ب ∈ ح⁺
، أ > ب فإن $\frac{1}{أ} < \frac{1}{ب}$
• عند إيجاد مجموعة حل المتباينة يجب استبعاد مجموعة أصفار المقام من مجموعة الحل.

٥ ∵ |٢ س - ٥| + |٥ - ٢ س| < ١٤ ∴ |٢ س - ٥| + |٢ س - ٥| < ١٤

∴ ٢ |٢ س - ٥| < ١٤ وبالقسمة على ٢

∴ |٢ س - ٥| < ٧ ∴ -٧ < ٢ س - ٥ < ٧

∴ -٢ < ٢ س < ١٢ ∴ -١ < س < ٦

∴ مجموعة الحل =]-١ ، ٦[

ثالثًا تطبيقات على خواص معادلات ومتباينات القيمة المطلقة

مثال ⑩

عين مجال كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية :

١ $د(س) = \frac{٢س}{|س| - ٣}$

٢ $د(س) = \frac{س^٢}{|س - ١| + ٢}$

٣ $د(س) = \sqrt{٤ - |س|}$

٤ $د(س) = \sqrt{|س| - ٢}$

٥ $د(س) = \frac{٢س}{\sqrt{|س - ٣| - ٢}}$

٦ $د(س) = \frac{س^٢}{\sqrt{٣ - |س + ٢|}}$

الحل

١ نوجد أصفار المقام : $|س| - ٣ = ٠$ ∴ $|س| = ٣$

∴ $س = \pm ٣$ ∴ المجال $= ح - \{٣ ، -٣\}$

٢ نوجد أصفار المقام $|س - ١| + ٢ = ٠$ ∴ $|س - ١| = -٢$

، ∵ $-٢ <$ صفر وهذا يتعارض مع تعريف القيمة المطلقة

∴ لا يوجد أصفار للمقام ∴ المجال $= ح$

٣ تكون الدالة د معرفة بشرط : $٤ - |س| \geq ٠$ ∴ $|س| \leq ٤$

∴ $-٤ \leq س \leq ٤$ ∴ المجال $= [-٤ ، ٤]$

٤ تكون الدالة د معرفة بشرط : $|س| - ٢ \geq ٠$ ∴ $|س| \geq ٢$

∴ $س \geq ٢$ أو $س \leq -٢$

∴ المجال $= ح -]-٢ ، ٢[$

٥ تكون الدالة د معرفة بشرط : $|س - ٣| - ٢ > ٠$ ∴ $|س - ٣| > ٢$

∴ $س - ٣ > ٢$ أو $س - ٣ < -٢$

∴ $س > ٥$ | $س < ١$

∴ المجال $= ح - [١ ، ٥]$

٦ تكون الدالة د معرفة بشرط $٣ - |س + ٢| > ٠$ ∴ $|س + ٢| < ٣$

∴ $-٣ < س + ٢ < ٣$ ∴ $-٥ < س < ١$

∴ المجال $=]-٥ ، ١[$

مثال ⑪

اكتب متباينة القيمة المطلقة التى تعبر عن :

١ درجة طالب فى أحد الاختبارات تتراوح من ٧٠ إلى ٩٠ درجة

٢ العمق الذى تعيش فيه بعض الأسماك تحت سطح الماء فى حوض سمك ارتفاعه الداخلى ٤٠ سم

الحل

١ بفرض أن درجة الطالب = س درجة

∴ $٧٠ \leq س \leq ٩٠$

(بإضافة -٨٠ إلى أطراف المتباينة)

∴ $٧٠ - ٨٠ \leq س - ٨٠ \leq ٩٠ - ٨٠$

∴ $-١٠ \leq س - ٨٠ \leq ١٠$

∴ متباينة القيمة المطلقة هى $|س - ٨٠| \leq ١٠$

> **لاحظ أن**
> ٨٠ هو الوسط الحسابى للعددين ٧٠ ، ٩٠

٢ بفرض أن العمق الذى تعيش فيه هذه الأسماك = س سم

∴ $٠ < س < ٤٠$ (بإضافة -٢٠ إلى أطراف المتباينة)

∴ $٠ - ٢٠ < س - ٢٠ < ٤٠ - ٢٠$

∴ $-٢٠ < س - ٢٠ < ٢٠$

∴ متباينة القيمة المطلقة هى $|س - ٢٠| < ٢٠$

> **لاحظ أن**
> ٢٠ هو الوسط الحسابى للعددين ٠ ، ٤٠

مثال ⑫

ابحث نوع كل من الدالتين المعرفتين بالقاعدتين الآتيتين من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

١ $د(س) = \frac{جتا س}{|س| - ٣}$

٢ $د(س) = \frac{|س + ٢| - |س - ٢|}{|س + ٢| + |س - ٢|}$

الحل

١ ∵ $د(-س) = \frac{جتا (-س)}{|-س| - ٣} = \frac{جتا س}{|س| - ٣} = د(س)$

∴ الدالة د زوجية.

> **لاحظ أن**
> $|س| = |-س|$

٢ ∵ $د(-س) = \frac{|-س + ٢| - |-س - ٢|}{|-س + ٢| + |-س - ٢|}$

$= \frac{-(|س + ٢| - |س - ٢|)}{|س + ٢| + |س - ٢|} = -د(س)$

∴ الدالة د فردية.

تمارين 6 على حل معادلات ومتباينات القيمة المطلقة

اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسي • مستويات عليا

أولاً: أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١) مجموعة حل المعادلة | س - ٢ | = ٣ هي ....

(أ) {٣ ، ٢} (ب) {-١ ، ٥} (جـ)]-١ ، ٥[(د) {٥ ، -٥}

(٢) مجموعة حل المعادلة | ٥ س - ١ | + ٤ = ١ في ح هي ....

(أ) {٤/٥} (ب) {٣/٥ ، ٤/٥} (جـ) ∅ (د) {٣/٥}

(٣) مجموعة حل المعادلة | س - ٣ | = | ٣ - س | في ح هي ....

(أ) {٣} (ب) {٣ ، -٣} (جـ) ح (د) ∅

(٤) مجموعة حل المعادلة | ٢ س - ٤ | = | س + ١ | هي ....

(أ) {٥ ، ١} (ب) {٥ ، -١} (جـ) {١ ، -٥} (د) {-٥ ، -١}

(٥) مجموعة حل المعادلة | ٢ س - ١ | = س + ٢ هي ....

(أ) {٣} (ب) {٣ ، ١/٣} (جـ) {٣ ، -١/٣} (د) ∅

(٦) مجموعة حل المعادلة | س - ٢ | = س - ٢ هي ....

(أ) ∅ (ب) {٢} (جـ) [٢ ، ∞[(د) ح

(٧) مجموعة حل المعادلة ١ / | س - ٣ | = ١/٢ هي .... حيث س ≠ ٣

(أ) {٥} (ب) {١} (جـ) {٥ ، ١} (د) ∅

(٨) مجموعة حل المعادلة | س | + س = ٠ هي ....

(أ) {٠} (ب)]-∞ ، ٠] (جـ)]-∞ ، ٠[(د) ∅

(٩) مجموعة حل المعادلة | س | / س = ١ في ح هي ....

(أ) {٠} (ب) ح* (جـ) ح (د)]٠ ، ∞[

(١٠) مجموعة حل المعادلة √(س²) - ٣ س = ٨ هي ....

(أ) ∅ (ب) {-٢ ، -٤} (جـ) {-٤} (د) {-٢}

(١١) مجموعة حل المعادلة س² = ٢ - | س | هي ....

(أ) {١ ، -١} (ب) {٢ ، -٢} (جـ) {١ ، -٢} (د) {-١ ، ٢}

(١٢) إذا كانت د (س) = √(س²) + | س | فإن مجموعة حل المعادلة د (س) = ٢ في ح ....

(أ) {٢ ، -٢} (ب) {١ ، -١} (جـ) {٢ ، ٠} (د) {-١ ، ٠}

(١٣) إذا كان د (س) = | س - ٢ | + ٤ فإن مجموعة حل المعادلة د (س + ٢) = ٣ هي ....

(أ) {١ ، ٣} (ب) ح (جـ) ∅ (د) {-١ ، ٣}

(١٤) إذا كان د (س) = | س - ٢ | + ٤ فإن مجموعة حل المعادلة د (س + ٢) = ٦ هي ....

(أ) {٠ ، ٤} (ب) {٢ ، -٢} (جـ) {٢ ، ٤} (د) {٢ ، -٤}

(١٥) مجموعة حل المعادلة √(٤ س² - ١٢ س + ٩) = ٥ هي ....

(أ) {٤} (ب) {-١} (جـ) {٤ ، -١} (د) ح

(١٦) أي مما يأتي لا ينتمي لمجموعة حل المعادلة | س + ٢ | + | س - ١ | = ٣

(أ) -٢ (ب) صفر (جـ) -٣ (د) ١

(١٧) مجال الدالة د : د (س) = ٢ / (| س | - ٢) هو ....

(أ) ح - {٢} (ب) ح - {-٢} (جـ) ح (د) ح - {٢ ، -٢}

(١٨) مجال الدالة د : د (س) = ١ / (| س | + ٢) هو ....

(أ) ح (ب) {٢ ، -٢} (جـ) ح - {٢ ، -٢} (د) ح - {٢}

(١٩) إذا كان مجال الدالة د : د (س) = س / (| س | + أ) هو ح - {-٢ ، ٢} فإن أ = ...

(أ) ٢ (ب) -٢ (جـ) ±٢ (د) صفر

(٢٠) الدالة د : د (س) = س طا س / | س | من حيث نوعها تكون ....

(أ) فردية. (ب) زوجية.

(جـ) ليست فردية وليست زوجية. (د) أحادية.

(٢١) العبارة الخطأ فيما يلي هي ....

(أ) | س ص | = | س | × | ص | (ب) | س | = | - س |

(جـ) | س + ص | = | س | + | ص | (د) √(س²) = | س |

(٢٢) إذا كان : أ > ٠ ، ب < ٠ فإن أي مما يأتي يكون دائمًا سالبًا ؟

(أ) | أ ب | (ب) أ | ب | (جـ) | أ | ب (د) أ + | ب |

(٢٣) إذا كان: أ − ب < ٠ ، فإن أي مما يأتي يجب أن يساوي |أ − ب| ؟

(١) أ − ب (٢) ب − أ (٣) |ب − أ|

(أ) (٣) فقط (ب) (١) ، (٣) فقط (ج) (٢) ، (٣) فقط (د) (١) ، (٢) ، (٣)

(٢٤) إذا كان: أ/|أ| = −١ ، ب/|ب| = ١ فإن كل العبارات الآتية خطأ ما عدا ......

(أ) أ × ب > ٠ (ب) أ − ب > ٠ (ج) أ − ب = ٠ (د) أ² + ب > ٠

(٢٥) إذا كان: أ < ٠ < ب فإن: |أ| + |ب| + |ب − أ| − |أ − ب| = ...

(أ) ٢أ (ب) ٢ب (ج) أ − ب (د) ب − أ

(٢٦) عدد نقط تقاطع المنحنيين: ص = |س + ٢| ، ص = ٢ − |س| هو ......

(أ) صفر (ب) ١ (ج) ٢ (د) عدد لا نهائي.

(٢٧) مجموعة حل المتباينة: |س| > −١ هي ......

(أ)]٠ ، ∞[(ب) ح (ج) ∅ (د) ح − {٠}

(٢٨) مجموعة حل المتباينة: ١/|س| ≤ ١ هي ......

(أ) [−١ ، ١] (ب)]−١ ، ١[

(ج) [−١ ، ١] − {٠} (د)]−١ ، ١[− {٠}

(٢٩) مجموعة حل المتباينة: |٣ − س| > ٠ هي ......

(أ)]−٣ ، ٣[(ب) ح − [−٣ ، ٣] (ج) ح − {٣} (د) ح

(٣٠) مجموعة حل المتباينة: ١/|س − ٢| ≤ ١/٢ هي ......

(أ)]٠ ، ٤[− {٢} (ب) [٠ ، ٤] − {٢} (ج) [٠ ، ٤] (د)]٠ ، ٤[

(٣١) مجموعة حل المتباينة: |س + ٢| ≥ ٠ هي ......

(أ) ∅ (ب)]−∞ ، −٢] (ج) [−٢ ، ∞[(د) {−٢}

(٣٢) إذا كان: |س| < أ ، أ ∈ ح⁺ فإن: س ∈ ......

(أ) ح − [−أ ، أ] (ب) [−أ ، أ] (ج) ح −]−أ ، أ[(د)]−أ ، أ[

(٣٣) مجموعة حل المتباينة: |س − ٢| ≥ −٤ في ح هي ......

(أ)]−٢ ، ٦[(ب) [−٢ ، ٦] (ج) ح (د) ∅

(٣٤) مجموعة حل المتباينة: |٢س − ٥| ≥ ٩ في ح هي ......

(أ)]−∞ ، ٧] (ب) [−٢ ، ٧] (ج) ح −]−٢ ، ٧[(د) ح − [−٢ ، ٧]

(٣٥) مجموعة حل المتباينة: |س + ٢| > −١ في ح هي ......

(أ)]−٢ ، −١[(ب) ح (ج) ح − [−٢ ، −١] (د) ∅

(٣٦) مجموعة حل المتباينة: |٤ − ٦س| ≤ ١٤ في ح هي ......

(أ)]−٥/٣ ، ٣[(ب) [−٥/٣ ، ٣]

(ج) ح −]−٥/٣ ، ٣[(د) ح − [−٥/٣ ، ٣]

(٣٧) إذا كانت: س ∈ [−١ ، ٤] فإن: |٢س − ٣| ≥ ......

(أ) ٣ (ب) ٤ (ج) ٥ (د) −٥

(٣٨) مجموعة حل المتباينة: √(س² − ٤س + ٤) > ٠ في ح هي ......

(أ) ح − {٢} (ب) ح − {−٢} (ج) ح (د) ∅

(٣٩) مجموعة حل المتباينة: √(س² − ٢س + ١) ≤ ٤ هي ......

(أ) [−٣ ، ٥] (ب) ح −]−٣ ، ٥[(ج)]−٣ ، ٥[(د) ح − [−٣ ، ٥]

(٤٠) مجموعة حل المتباينة: √(٤س² − ١٢س + ٩) ≤ ٩ هي ......

(أ) [−٦ ، ١٢] (ب) [−٣ ، ٦] (ج) ح − [−٣ ، ٦] (د) ح −]−٣ ، ٦[

(٤١) مجموعة حل المتباينة: |٢س − ٢| + |٦ − ٤س| ≤ ٢١ هي ......

(أ) [−٢ ، ٥] (ب) ح −]−٢ ، ٥[(ج)]−٢ ، ٥[(د) {−٢ ، ٥}

(٤٢) مجموعة حل المتباينة: √((س + ٢)²) + |٢س + ٤| > ٦ في ح هي ......

(أ) [−٤ ، ٠] (ب) ح − [−٤ ، ٠] (ج)]−٤ ، ٠[(د) ح −]−٤ ، ٠[

(٤٣) إذا كان: ١ < س < ٢ فإن: √(س² − ٢س + ١) + √(س² − ٤س + ٤) = ...

(أ) ٢س − ٣ (ب) ٢س − ١ (ج) ١ (د) ٣

(٤٤) متباينة القيمة المطلقة التي تعبر عن أن درجة الطالب في أحد الاختبارات (س) تتراوح من ٧٠ إلى ٩٠ درجة هي ......

(أ) |س| ≤ ٩٠ (ب) |س| ≥ ٧٠ (ج) |س − ٨٠| ≤ ١٠ (د) |س − ٧٠| ≤ ٩٠

(٤٥) عدد الحلول التي تنتمي لمجموعة الأعداد الصحيحة للمتباينة |س − ٢| ≤ ٥ هي ......

(أ) صفر (ب) ٧ (ج) ٩ (د) ١١

(٤٦) مجال الدالة د : د(س) = √(√(س²) − ١) هو ......

(أ) [−١ ، ١] (ب)]−١ ، ١[(ج) ح − [−١ ، ١] (د) ح −]−١ ، ١[

ثانيًا الأسئلة المقالية

تمارين على حل معادلات القيمة المطلقة

1 أوجد جبريًا في ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

(١) ٤ |س| - ٢٠ = ٠ ‏ {٥ ، -٥}

(٢) |٣ - ٢ س| = ٧ ‏ {٥ ، -٢}

(٣) ٣ |س + ٢| = ٢ ‏ {-١ ، -٣}

(٤) ٢ |س| = ٣ - |س| ‏ {١ ، -١}

(٥) |س - ٢| = ٣ س - ٤ ‏ {٣/٢}

(٦) |س + ٢| - س + ١ = ٠ ‏ ∅

(٧) |س + ٢| + س - ٢ = ٠ ‏ {٠}

(٨) ٥ س - ٢ |س| = ٢١ ‏ {٧}

(٩) |س + ٥| = |س - ٣| ‏ {-١}

(١٠) |٢ س - ٦| = |س - ٣| ‏ {٣}

(١١) |س - ١| - ٢ |٢ - س| = ٠ ‏ {٣ ، ٥/٣}

(١٢) س^٢ - ٥ |س| + ٦ = ٠ ‏ {٣ ، -٣ ، ٢ ، -٢}

(١٣) √(س^٢) - ٢ س = ٦ ‏ {-٢}

(١٤) √(س^٢ - ٤ س + ٤) = ٤ ‏ {-٢ ، ٦}

(١٥) |س| + س = ٠ ‏]-∞ ، ٠]

(١٦) |س + ٣| + ٢ س = ٠ ‏ {-١}

(١٧) √(س^٢ - ٦ س + ٩) + ٢ س = ٩ ‏ {٤}

(١٨) |س - ٣|^٢ - |س - ٣| = صفر ‏ {٣ ، ٢ ، ٤}

(١٩) ٥ |٣ - س| - ٢ √(س^٢ - ٦ س + ٩) = ١٢ ‏ {٧ ، -١}

(٢٠) |س^٢ - ١| = |س - ١| ‏ {١ ، ٠ ، -٢}

(٢١) |س + ١| |س - ١| = ٢٦ ‏ {٣√٣ ، -٣√٣}

(٢٢) |س + ١|^٢ - ٣ |س + ١| - ١٠ = ٠ ‏ {٤ ، -٦}

(٢٣) (س - ٥)^٢ = |٢ س - ١٠| ‏ {٥ ، ٧ ، ٣}

(٢٤) س |س| - س = ٠ ‏ {٠ ، ١ ، -١}

(٢٥) س |٥ - س| = ٦ ‏ {٢ ، ٣ ، ٦}

(٢٦) |س^٢ + س - ١٠| = ١٠ ‏ {٠ ، -١ ، -٥ ، ٤}

(٢٧) (٤ س - ٨) / |س - ٢| = س ‏ {٤ ، -٤}

(٢٨) س^٢ |س| = ٨ س ‏ {-٢ ، ٠ ، ٢}

2 أوجد بيانيًا في ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية ، وحقق الناتج جبريًا :

(١) |س| - ٤ = ٠ ‏ {٤ ، -٤}

(٢) |س| + ٢ = ٠ ‏ ∅

(٣) ٢ - |س + ٢| = ٠ ‏ {٠ ، -٤}

(٤) √(س^٢ - ٤ س + ٤) = ٣ ‏ {٥ ، -١}

(٥) |س + ٢| + س = ٥ ‏ {١}

(٦) |س - ٢| = ٣ س - ٤ ‏ {١ ١/٢}

(٧) |٢ س + ٤| = ١ - س ‏ {-١ ، -٥}

(٨) |٢ س + ٥| = س - ٤ ‏ ∅

(٩) |س + ٢| = |س - ٣| ‏ {١/٢}

(١٠) |س - ٢| + |س - ١| = صفر ‏ ∅

(١١) |س - ٣| = |٢ س + ١| ‏ {-٤ ، ٢/٣}

(١٢) |س - ٤| = ٤ - س ‏]-∞ ، ٤]

(١٣) |س + ٢| = س + ٢ ‏ [-٢ ، ∞[

(١٤) |س - ٣| - |س + ٢| = ٥ ‏]-∞ ، -٢]

(١٥) |س - ٣| = ٤ - |س + ١| ‏ [-١ ، ٣]

(١٦) |س + ٢| = س^٢ + ٢ ‏ {٠ ، ١}

---

3 أثبت أن الدالة د حيث د (س) = ١٢ / (|س| + ٢) زوجية ، ثم أوجد جبريًا مجموعة حل المعادلة د (س) = ٢ ‏ {٤ ، -٤}

---

4 ارسم الشكل البياني للدالة د حيث د (س) = |٢ س + ٥| - ٣ وعين مدى الدالة وادرس اطرادها ومن الرسم استنتج مجموعة حل المعادلة : |٢ س + ٥| - ٣ = ٠ وحقق ذلك جبريًا. ‏ {-١ ، -٤}

---

5 ارسم منحنى الدالة د : د (س) = ١ - |٢ س| واستنتج من الرسم مدى الدالة واطرادها ، وأثبت أنها زوجية ، ثم من الرسم أو بأى طريقة أخرى أوجد مجموعة حل المعادلة : ١ - |٢ س| = -٣ ‏ {-٢ ، ٢}

---

6 أثبت أن الدالة د : د (س) = (١ - |س|) / |س| زوجية ثم ارسم منحنى د ثم أوجد بيانيًا أو جبريًا مجموعة حل المعادلة د (س) = ٠ ، وتحقق من صحة الناتج. ‏ {-١ ، ١}

---

7 ارسم الشكل البياني للدالة د حيث د (س) = |س - ١| + س + ١ موضحًا مدى الدالة ودارسًا الاطراد ثم أوجد مجموعة حل المعادلة : د (س) = ٣ ‏ {٣/٢}

---

8 ارسم فى شكل واحد الدالتين د ، ر حيث د (س) = س^٢ |س| ، ر (س) = ٢ - |س| ومن الرسم أوجد مجموعة حل المعادلة د (س) = ر (س) ‏ {-١ ، ١}

تمارين على حل متباينات القيمة المطلقة

٩ أوجد فى ح مجموعة حل كل من المتباينات الآتية جبريًا :

① |س − ٢| ≤ ٥ ② |س − ٢| ≥ ٥

③ |٢س + ٥| > ٣ ④ |٢ − س| < ٧

⑤ |(س − ٢)/٤| ≤ ١ ⑥ |٢س + ٢| + ٥ < ٤

⑦ ١/|٢س − ٥| ≥ ٣

⑧ ١/|٢س| ≥ ٥

⑨ ١/|٢س − ٣| > ٢

⑩ |٢س − ٣| + ٢ > ٧

⑪ √(س² − ٢س + ١) ≥ ٤

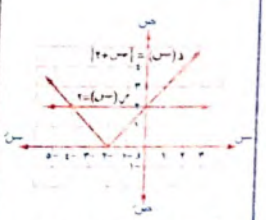
⑫ √(٤س² − ١٢س + ٩) ≤ ٩

⑬ |س − ٢| + |٢ − س| < ٦

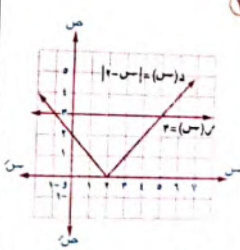
⑭ |٣س − ٢| + ٢|٦س − ٤| ≥ ٢٠

⑮ √((س + ٢)²) + |٢س + ٤| ≥ ٦

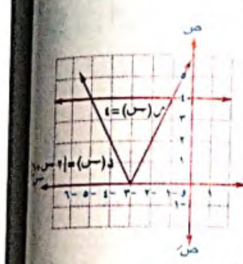
١٠ باستخدام الأشكال البيانية الآتية :

① 

أوجد : مجموعة حل المتباينة
د (س) > ر (س) فى ح

② 

أوجد : مجموعة حل المتباينة
د (س) > ر (س) فى ح

③ 

أوجد : مجموعة حل المتباينة
د (س) ≤ ر (س) فى ح

١١ أوجد فى ح مجموعة الحل لكل من المتباينات الآتية بيانيًا ثم حقق الناتج جبريًا :

① |س − ١| < ٢ ② |٢س − ٥| ≥ ٢

③ √(٤س² − ١٢س + ٩) > ٥ ④ |س + ٢| < − س

⑤ |س − ٢| < ½ س + ٦ ⑥ |س − ٣| + |س − ٤| > ٥

١٢ اكتب على صورة متباينة القيمة المطلقة كلًا مما يأتى :

① −٤ ≤ س ≤ ٤ ② ٠ < س < ٦

③ س ≤ −٢ أ، س ≥ ٢ ④ س ∈ ح − [−٢ ، ٦]

١٣ اكتب متباينة القيمة المطلقة التى تعبر عن :

① درجة طالب فى اختبار ما تقع بين ٦٠ إلى ١٠٠ درجة

② درجة حرارة مقيسة بالترمومتر الطبى تقع بين ٣٥° C ، ٤٢° C

③ توجد الطحالب الخضراء فى المحيطات على عمق يصل إلى ٣٠ مترًا.

تمارين متنوعة

١٤ أوجد مجال كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية :

① د (س) = ٢/(|س| − ١) ② د (س) = ٣/(|س| + ١)

③ د (س) = ٣س/(|س − ٢| − ٥) ④ د (س) = √(٥ − |س|)

⑤ د (س) = √(|س| − ٥) ⑥ د (س) = ١/√(٥ − |س|)

١٥ ابحث نوع كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

① د (س) = س |س| ② د (س) = س² |س| − ١

③ د (س) = (|س + ١| + |س − ١|)/(|س + ١| − |س − ١|) ④ د (س) = (س² جا ٢س)/(٥ + |٢س|)

⑤ د (س) = ٢ |س| طاس + ٢س |طاس| ⑥ د (س) = √(|س| + س)

١٦ أوجد بالوحدات المربعة المساحة المحصورة بين منحنيى الدالتين د ، ر حيث :

① د (س) = |س + ٣| + ٢ ، ر (س) = ٤

② د (س) = −|س − ٢| + ٣ ، ر (س) = صفر

③ د (س) = |س − ٢| − ١ ، ر (س) = ٥ − |س − ٢|

١٧ أثبت أن الدالة د حيث د (س) = $\frac{|س| + ١}{|س|}$ زوجية ، وارسم منحنى د ، ثم أوجد بيانيًا وجبريًا مجموعة حل المعادلة د (س) = ٢ س − ٢ ، وتحقق من صحة الحل.

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① مجموعة حل المعادلة : |س + ١| + |٢ س + ٣| = ٠ في ح هي ....
(أ) {−١ ، $\frac{-٣}{٢}$} (ب) ح (جـ) {١ ، $\frac{٣}{٢}$} (د) ∅

② مجموعة حل المعادلة : |س² − ٤ س + ٣| = |س − ٣| في ح هي ....
(أ) {٠ ، ٢} (ب) {٢ ، ٣} (جـ) {٠ ، ٣} (د) {٠ ، ٢ ، ٣}

③ أصغر قيمة للمقدار $\frac{|س| + |ص|}{|س + ص|}$ هي ....
(أ) −١ (ب) صفر (جـ) ١ (د) ٢

④ إذا كان ٢^س = ٦٤ فإن |س − ٦| + |س − ٥| = ...
(أ) −١١ (ب) −١ (جـ) ١ (د) ١١

⑤ إذا كان أ ب > ٠ ، $\frac{أ}{ب}$ < ٠ فإن $\sqrt{أ^٢}$ + $\sqrt{ب^٢}$ − (ب − أ) = ...
(أ) ٢ أ (ب) −٢ ب (جـ) −٢ أ + ٢ ب (د) صفر

⑥ إذا كان −٤ ≤ س ≤ ٦ وكان أ ≤ |٤ س − ٨| ≤ ب فإن أ + ب = ...
(أ) ٢٤ (ب) ٢٠ (جـ) ١٨ (د) ١٦

⑦ حاصل ضرب جذرى المعادلة : س² − ٢ |س| − ١٠ = ٠ يساوى ....
(أ) −٢٥ (ب) −١٠ (جـ) ١٠ (د) ٢٥

⑧ عدد قيم س الصحيحة التى تحقق أن ٢ < |س| < ٨ يساوى ....
(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ١٠

⑨ إذا كانت د (س) = |٢ س − ٥| ، ر (س) = |س + ١|
فإن مجموعة حل المعادلة : (ر ∘ د) (س) = ٢ في ح هي ....
(أ) {٢ ، −٤} (ب) {$\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٧}{٢}$} (جـ) {٣ ، ٧} (د) {$\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٩}{٢}$}

٢ أوجد جبريًا فى ح مجموعة حل كل مما يأتى :

① (س + ١) (|س| − ١) + $\frac{١}{٢}$ = صفر [illegible]

② ||٢ س + ٣| − ٨| = ٤ [illegible]

③ $\frac{٢}{|س|}$ + |س| = ٣ [illegible]

④ $\sqrt{(س - \frac{١}{س})^٢ + ٤}$ = ٢ [illegible]

⑤ |س² − ٣| + $\frac{٢}{|س^٢ - ٣|}$ = ٣ [illegible]

⑥ |٤ − س| + |س − ٢| = ١٠ [illegible]

⑦ (|٢ س − ٣| − ٥) (|٢ س − ٣| + ٤) < ١١ [illegible]

تطبيقات حياتية على الوحدة الأولى

📖 من أسئلة الكتاب المدرسي

١ 📖 **الربط بالميكانيكا :**
إذا كانت سرعة دراجة بخارية ع (ن) بالسنتيمتر/ثانية تعطى بالدالة ع حيث

ع (ن) = { ٨ ن ، ٠ ≤ ن ≤ ١٠ ؛ ٨٠ ، ١٠ < ن < ٢٠٠ ؛ −٤ ن + ٨٨٠ ، ٢٠٠ ≤ ن < ٢٢٠ }   حيث ن الزمن بالثانية

أوجد : (١) ع (١٠)   (٢) ع (١٥٠)   (٣) ع (٢١٠)

---

٢ 📖 **الربط بالهندسة :** إذا كان ح محيط مربع طول ضلعه ل اكتب محيط المربع كدالة فى طول ضلعه ح (ل)

ثم أوجد : (١) ح (٣)   (٢) ح ($\frac{١٥}{٤}$)

---

٣ 📖 **الربط بالهندسة :** إذا كانت م مساحة دائرة طول نصف قطرها نق. اكتب المساحة كدالة فى طول نصف القطر م (نق)

ثم أوجد : (١) م ($\frac{١}{٢}$)   (٢) م (٥)

---

٤ 📖 **الربط بالصناعة :** يعمل سعيد فى مصنع لإنتاج المصابيح الموفرة للطاقة ، فإذا كان يتقاضى ٨ جنيهات أجرًا عن كل ساعة عمل بالإضافة إلى ٠.٣ جنيهًا عن كل مصباح ينتج يوميًا.

(١) اكتب قاعدة الدالة د التى تعبر عن أجر سعيد إذا كان يعمل ٧ ساعات يوميًا.

(٢) هل الدالة د أحادية ؟ فسر إجابتك.

---

٥ 📖 **الربـط بالتجـارة :** يدفع تاجر غلال ٥٠ جنيهًا عن كل طن يدخل أو يخرج من مستودعه كأجر تحميل أو تنزيل ، اكتب الدالة التى تمثل تكاليف التحميل أو التنزيل ومثلها بيانيًا.

---

٦ 📖 **الربط بالميكانيكا :** يقطع جسم مسافة ف مترًا فى ٣ دقائق. إذا تحرك الجسم بسرعة ثابتة مقدارها ٣٠ مترًا / دقيقة ، بين أن سرعة الجسم ع تتغير عكسيًا بتغير الزمن (ر) لقطع هذه المسافة ، واكتب الدالة التى تمثل السرعة والزمن ومثلها بيانيًا ثم أوجد زمن قطع هذه المسافة إذا تحرك الجسم بسرعة ٤٥ مترًا / دقيقة.

٧ 📖 **الربط بالصناعة :** صممت بوابة حديدية ارتفاع جانبيها ٣ أمتار وقوسها على شكل جزء من منحنى الدالة د : د (س) = أ (س − ٢)^٢ + ٤ كما فى الشكل المقابل.

أوجد : (١) قيمة أ

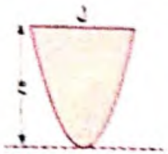
(٢) أقصى ارتفاع للبوابة.

(٣) عرض البوابة.

أ = −$\frac{١}{٤}$ ، ٤ أمتار ، ٤ أمتار

---

٨ 📖 **الربط بالهندسة :** إذا علمت أن مساحة الشكل المحصور بين منحنى الدالة التربيعية والقطعة المستقيمة الأفقية المرسومة بين أى نقطتين عليه والموضحة فى الشكل المقابل تعطى بالعلاقة م = $\frac{٢}{٣}$ ل ع



(١) أوجد مساحة الشكل المحصور بين محور السينات ومنحنى الدالة د : د (س) = س^٢ − ٦ س + ٥ بالوحدات المربعة.

(٢) ارسم على نفس الشبكة البيانية منحنيى الدالتين د ، ر حيث ر (س) = | س − ٣ | − ٢ ثم أوجد مساحة الجزء المحصور بينهما بالوحدات المربعة.

$\frac{٣٢}{٣}$ ، $\frac{١٠}{٣}$ وحدة مربعة

---

٩ 📖 **تخطيط المدن :**

قطعة أرض محصورة بين منحنيى الدالتين د ، ر حيث : د (س) = | س − ٣ | − ٢ ، ر (س) = ٣ ، احسب مساحتها بالوحدات المربعة وإذا كان طول الوحدة ٨ أمتار احسب مساحة الأرض بالأمتار المربعة.

١٦٠٠ م^٢

---

١٠ 📖 **شبكات الطرق :** طريقان الأول يمثله منحنى الدالة د : د (س) = | س − ٥ | ، والثانى يمثله منحنى الدالة ر : ر (س) = ٥ − $\frac{٢}{٣}$ س ، إذا تقاطع الطريقان فى نقطتى أ ، ب أوجد المسافة بين أ ، ب لأقرب كيلو متر إذا كانت وحدة الأطوال تمثل مسافة قدرها ٥ كيلو مترات.

٣٦ كم

---

١١ 📖 **تطبيق حياتى على حل المتباينة :** تسمح إحدى شركات الغاز الطبيعى بتوظيف قارئ العداد إذا كان طوله يتراوح بين ١٧٨ سم ، ١٩٢ سم. عبر عن الأطوال الممكنة لمن يتقدم لشغل هذه الوظيفة بمتباينة القيمة المطلقة.

| س − ١٨٥ | ≤ ٧

١٢ الربط بالميكانيكا : يتحرك جسم بسرعة منتظمة مقدارها ٨ سم/ث من الموضع أ إلى الموضع حـ مرورًا بالموضع ب دون توقف ، وكانت المسافة بين الجسم والموضع ب تحسب بالقاعدة ف (ن) = ٨ | ٥ - ن | حيث ن الزمن بالثوانى ، ف المسافة بالسنتيمترات.

(١) احسب المسافة بين الجسم والموضع ب بعد ثانيتين وبعد ٨ ثوان.

ماذا تلاحظ ؟ فسر إجابتك.

(٢) متى يكون الجسم على بعد ١٦ سم من الموضع ب ؟ فسر إجابتك.

(٣) متى يكون الجسم على بعد يقل عن ٨ سم من الموضع ب ؟

[٢٤ سم ، ٢٤ سم ، ٣ ، ٧ ،]٤ ، ٦[ ]

١٣ تطبيق حياتى : إذا سقط شعاع الضوء على سطح عاكس فإن مساره يخضع لدالة المقياس فيكون قياس زاوية السقوط مساويًا لقياس زاوية الانعكاس ، كذلك مسار كرة البلياردو قبل وبعد تصادمها مع حافة الطاولة فى بعض الحالات.

• يوضح الشكل المقابل :

تصويب لاعب البلياردو على الكرة السوداء ، باعتبار و س ، و ص محورى الإحداثيات المتعامدة ، وأن مسار الكرة يتبع منحنى الدالة د حيث د (س) = $\frac{٤}{٢}$ | س - ٥ |

هل تسقط الكرة السوداء فى الجيب ب ؟

فسر إجابتك رياضيًا.

الوحدة 2

الأسس واللوغاريتمات وتطبيقات عليها

دروس الوحدة

الدرس 1 الأسس الكسرية والمعادلات الأسية.

الدرس 2 الدالة الأسية وتطبيقاتها.

الدرس 3 الدالة العكسية.

الدرس 4 الدالة اللوغاريتمية وتمثيلها البيانى.

الدرس 5 بعض خواص اللوغاريتمات.

فى نهاية الوحدة : تطبيقات حياتية على الوحدة الثانية.

الدرس 1 الأسس الكسرية والمعادلات الأسية

الجذر النوني

المعادلة : $س^ن = أ$ حيث $أ \in ح$ ، $ن \in ص^+$ لها ن من الجذور

ونستعرض فيما يلي بعض الحالات :

١ إذا كان : ن عددًا زوجيًا ، $أ > ٠$

فإن المعادلة $س^ن = أ$ لها جذران حقيقيان أحدهما موجب والآخر سالب وباقى الجذور أعداد مركبة غير حقيقية (عندما $ن > ٢$) ويرمز للجذرين الحقيقيين بالرمزين $\sqrt[ن]{أ}$ ، $-\sqrt[ن]{أ}$ ويسمى الجذر النوني الذى له نفس إشارة أ بالجذر النوني الأساسى للعدد أ

فمثلًا : المعادلة $س^٦ = ٦٤$ لها جذران حقيقيان هما $\sqrt[٦]{٦٤} = ٢$ ، $-\sqrt[٦]{٦٤} = -٢$

وتوجد أربعة جذور أخرى مركبة غير حقيقية (حاول إيجادهم بالتحليل)

٢ إذا كان : ن عددًا زوجيًا ، $أ < ٠$

فإن المعادلة $س^ن = أ$ ليس لها جذور حقيقية (جذورها أعداد مركبة غير حقيقية)

فمثلًا : عند حل المعادلة $س^٢ = -١٦$

فإن $س = \pm\sqrt{-١٦} = \pm ٤ ت$ (أعداد مركبة غير حقيقية)

٣ إذا كان : ن عددًا فرديًا ، $أ \in ح - \{٠\}$

فإن المعادلة $س^ن = أ$ لها جذر حقيقى وحيد هو $\sqrt[ن]{أ}$ وباقى الجذور أعداد مركبة غير حقيقية

فمثلًا : المعادلة $س^٣ = -٢٧$ لها جذر حقيقى وحيد هو $\sqrt[٣]{-٢٧} = -٣$

ويوجد جذران مركبان غير حقيقيين (حاول إيجادهما بالتحليل)

٤ إذا كان : $ن \in ص^+$ ، $أ =$ صفر فإن المعادلة $س^ن =$ صفر لها حل حقيقى وحيد هو $س = ٠$

(عدد جذور المعادلة يساوى ن وكل منها يساوى صفر عندما $ن > ١$)

فمثلًا : المعادلة $س^٣ = ٠$ لها ثلاثة جذور حقيقية متساوية وكل منها يساوى صفر

ملاحظة

$\sqrt[ن]{أ^ن} = |أ|$ إذا كان ن عددًا زوجيًا ، $\sqrt[ن]{أ^ن} = أ$ إذا كان ن عددًا فرديًا

فمثلًا : $\sqrt[٤]{(-٤)^٤} = |-٤| = ٤$ ، $\sqrt[٣]{(-٣)^٣} = -٣$

خواص الجذور النونية

إذا كان : أ ، ب عددين حقيقيين ، $\sqrt[ن]{أ}$ ، $\sqrt[ن]{ب} \in ح$ فإن :

١ $\sqrt[ن]{أب} = \sqrt[ن]{أ} \times \sqrt[ن]{ب}$

٢ $\sqrt[ن]{\frac{أ}{ب}} = \frac{\sqrt[ن]{أ}}{\sqrt[ن]{ب}}$ حيث $ب \neq ٠$. لاحظ أن : $\sqrt[ن]{أ \pm ب} \neq \sqrt[ن]{أ} \pm \sqrt[ن]{ب}$

فمثلًا : $\sqrt[٣]{٢٧ ب^{١٥}} = \sqrt[٣]{٢٧} \times \sqrt[٣]{ب^{١٥}} = ٣ ب^٥$ ، $\sqrt[٤]{٨١ س^٤ ص^٨} = \sqrt[٤]{٨١} \times \sqrt[٤]{س^٤} \times \sqrt[٤]{ص^٨} = ٣ |س| ص^٢$

الأسس الكسرية

بفرض أن : $أ^م$ تمثل الجذر التربيعى الأساسى للعدد أ

$\therefore أ^م = \sqrt{أ}$ وبتربيع الطرفين $\therefore (أ^م)^٢ = أ$ $\therefore أ^{٢م} = أ$

$\therefore ٢ م = ١$ $\therefore م = \frac{١}{٢}$

أى أن : $أ^{\frac{١}{٢}} = \sqrt{أ}$ **وبالمثل :** $أ^{\frac{١}{٣}} = \sqrt[٣]{أ}$ ، $أ^{\frac{١}{٤}} = \sqrt[٤]{أ}$

تعريف

١ إذا كان : $ن \in ص^+ - \{١\}$ ، $أ \in ح$ فإن : $أ^{\frac{١}{ن}} = \sqrt[ن]{أ}$

مع ملاحظة أن : إذا كان : ن عدد زوجى ، $أ < ٠$ فإن : $أ^{\frac{١}{ن}} = \sqrt[ن]{أ} \notin ح$

فمثلًا : $٩^{\frac{١}{٢}} = \sqrt{٩} = ٣ \in ح$ ، $\left(\frac{-١}{٨}\right)^{\frac{١}{٣}} = \sqrt[٣]{\frac{-١}{٨}} = \frac{-١}{٢} \in ح$

بينما : $(-١٦)^{\frac{١}{٤}} = \sqrt[٤]{-١٦} \notin ح$

٢ إذا كان م ، ن عددين صحيحين ليس بينهما عامل مشترك ، $ن > ١$ ، $\sqrt[ن]{أ} \in ح$

فإن : $أ^{\frac{م}{ن}} = \left(\sqrt[ن]{أ}\right)^م = \sqrt[ن]{أ^م}$

فمثلًا : $(٨)^{\frac{٢}{٣}} = \left(\sqrt[٣]{٨}\right)^٢ = ٢^٢ = ٤$ ، $(٨١)^{-\frac{٣}{٤}} = \left(\sqrt[٤]{٨١}\right)^{-٣} = ٣^{-٣} = \frac{١}{٢٧}$

قوانين الأسس

إذا كان أ ، ب عددين حقيقيين ، م ، ن عددين صحيحين ومع مراعاة استثناء الحالات التي يكون فيها المقام = صفر ، والحالات التي يكون فيها الأساس = صفر ، الأس = صفر معًا ولا تكون جميع المقادير المستخدمة معرفة فإن:

1. $أ^{0} = 1$
2. $أ^{-ن} = \frac{1}{أ^{ن}}$
3. $أ^{م} \times أ^{ن} = أ^{م+ن}$
4. $\frac{أ^{م}}{أ^{ن}} = أ^{م-ن}$
5. $(أ^{م})^{ن} = أ^{م ن}$
6. $(أ ب)^{ن} = أ^{ن} ب^{ن}$
7. $\left(\frac{أ}{ب}\right)^{-ن} = \left(\frac{ب}{أ}\right)^{ن} = \frac{ب^{ن}}{أ^{ن}}$

ملاحظات

1. إذا كان $أ \in ح^{-}$ فإن:
   - $أ^{ن} > 0$ إذا كان ن عددًا صحيحًا زوجيًا
   - $أ^{ن} < 0$ إذا كان ن عددًا صحيحًا فرديًا

   فمثلًا: $(-4)^{2} = 16 > 0$ ، بينما $(-4)^{3} = -64 < 0$
2. • إذا كان $س^{\frac{م}{ن}} = أ$ فإن $س = أ^{\frac{ن}{م}}$ حيث م عدد فردي
   • إذا كان $س^{\frac{م}{ن}} = أ$ فإن $س = \pm أ^{\frac{ن}{م}}$ حيث م عدد زوجي
   بشرط أن يكون م ، ن عددان صحيحان ليس بينهما عامل مشترك (أي $\frac{م}{ن}$ عدد نسبي في أبسط صورة) وإذا كان أحدهما زوجيًا فيجب أن يكون $أ \geq 0$.
3. خطأ شائع: • $(-32)^{\frac{2}{10}} = \sqrt[10]{(-32)^{2}} = 2$ (حل خطأ)
   • $(-32)^{\frac{2}{10}} = \left(\sqrt[10]{-32}\right)^{2}$ = غير معرف في ح (حل خطأ)
   وذلك لأن الأس $\frac{2}{10}$ ليس في أبسط صورة ويجب اختصاره أولًا $\left[\frac{2}{10} = \frac{1}{5}\right]$
   $\therefore (-32)^{\frac{2}{10}} = (-32)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{-32} = -2$ (الحل الصحيح)

مثال 1

أوجد ناتج كل مما يأتي في أبسط صورة:

1. $\sqrt[5]{أ^{3}} \times \sqrt[4]{أ^{2}}$
2. $(\sqrt[4]{س})^{3} \times \sqrt[3]{س^{2}}$
3. $(\sqrt[3]{أ^{-5}})^{2} \times (\sqrt[4]{أ^{3}})^{2}$

الحل

1. $\sqrt[5]{أ^{3}} \times \sqrt[4]{أ^{2}} = أ^{\frac{3}{5}} \times أ^{\frac{2}{4}} = أ^{\frac{3}{5} + \frac{1}{2}} = أ^{\frac{11}{10}} = أ \times أ^{\frac{1}{10}} = أ \sqrt[10]{أ}$

2. $(\sqrt[4]{س})^{3} \times \sqrt[3]{س^{2}} = س^{\frac{3}{4}} \times س^{\frac{2}{3}} = س^{\frac{3}{4} + \frac{2}{3}} = س^{\frac{17}{12}} = س \times س^{\frac{5}{12}} = س \sqrt[12]{س^{5}}$
3. $(\sqrt[3]{أ^{-5}})^{2} \times (\sqrt[4]{أ^{3}})^{2} = (أ^{-\frac{5}{3}})^{2} \times (أ^{\frac{3}{4}})^{2} = أ^{-\frac{10}{3}} \times أ^{\frac{3}{2}} = أ^{-\frac{11}{6}} = \frac{1}{أ^{\frac{11}{6}}} = \frac{1}{|أ| \, أ^{\frac{5}{6}}} = \frac{1}{|أ| \sqrt[6]{أ^{5}}}$

مثال 2

اختصر لأبسط صورة: [illegible]

الحل

المقدار = [illegible]

$= 1 \times 1 \times 25 = 25$

مثال 3

أوجد في ح مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية:

1. $3 س^{5} = -96$
2. $س^{6} = -64$
3. $(س - 2)^{4} = 81$
4. $س^{\frac{3}{4}} = 27$
5. $\sqrt[4]{س^{2}} = 1$
6. $\sqrt[3]{(3س + 2)^{2}} = 8$
7. $س^{\frac{1}{2}} - 5 \times س^{\frac{1}{4}} + 4 = 0$
8. $(س^{2} - 4س - 13)^{\frac{3}{2}} = 8$

الحل

لاحظ أن المطلوب إيجاد مجموعة الحل في ح أي إيجاد الجذور الحقيقية فقط.

1. $\because 3 س^{5} = -96 \quad \therefore س^{5} = -32$
   $\therefore س = \sqrt[5]{-32} = -2 \quad \therefore م.ح = \{-2\}$
2. $س^{6} = -64 \quad \because -64 < 0$ ، 6 عدد زوجي $\quad \therefore م.ح = \varnothing$
3. $\because (س - 2)^{4} = 81 \quad \therefore س - 2 = \sqrt[4]{81} = 3$ أو $س - 2 = -\sqrt[4]{81} = -3$
   $\therefore س = 3 + 2 = 5$ أو $س = -3 + 2 = -1 \quad \therefore م.ح = \{5 ، -1\}$
4. $\because س^{\frac{3}{4}} = 27 \quad \therefore س = 27^{\frac{4}{3}} = (3^{3})^{\frac{4}{3}} = 3^{4}$
   $\therefore س = 81 \quad \therefore م.ح = \{81\}$

5️⃣ $\because \sqrt[3]{س^{٢}} = ١$ $\therefore س^{\frac{٢}{٣}} = ١$ $\therefore س = \pm ١^{\frac{٣}{٢}}$ $\therefore س = \pm ١$ $\therefore م.ح = \{١ ، -١\}$

6️⃣ $\because \sqrt[٤]{(٣س + ٢)^{٣}} = ٨$ $\therefore (٣س + ٢)^{\frac{٣}{٤}} = ٨$ $\therefore ٣س + ٢ = ٨^{\frac{٤}{٣}}$

$\therefore ٣س + ٢ = (٢^{٣})^{\frac{٤}{٣}}$ $\therefore ٣س + ٢ = ١٦$

$\therefore س = \frac{١٤}{٣}$ $\therefore م.ح = \{\frac{١٤}{٣}\}$

7️⃣ $\because س^{\frac{٤}{٣}} - ٥ \times س^{\frac{٢}{٣}} + ٤ = ٠$ $\therefore (س^{\frac{٢}{٣}} - ١)(س^{\frac{٢}{٣}} - ٤) = ٠$

$\therefore س^{\frac{٢}{٣}} = ١$ ومنها $س = \pm ١^{\frac{٣}{٢}} = \pm ١$

أو $س^{\frac{٢}{٣}} = ٤$ ومنها $س = \pm ٤^{\frac{٣}{٢}} = \pm (٢^{٢})^{\frac{٣}{٢}} = \pm ٢^{٣} = \pm ٨$

$\therefore م.ح = \{١ ، -١ ، ٨ ، -٨\}$

حل آخر : نفرض $س^{\frac{٢}{٣}} = ك$ $\therefore ك^{٢} - ٥ك + ٤ = ٠$

$\therefore (ك - ٤)(ك - ١) = ٠$ $\therefore ك = ٤$ $\therefore س^{\frac{٢}{٣}} = ٤$

$\therefore س = \pm \sqrt{٤^{٣}} = \pm ٨$ أو $ك = ١$ $\therefore س^{\frac{٢}{٣}} = ١$

$\therefore س = \pm \sqrt{١^{٣}} = \pm ١$ $\therefore م.ح = \{١ ، -١ ، ٨ ، -٨\}$

8️⃣ $س^{٢} - ٤س - ١٣ = ٨^{\frac{٥}{٣}} = ٣٢$ $\therefore س^{٢} - ٤س - ٤٥ = ٠$

$\therefore (س - ٩)(س + ٥) = ٠$ $\therefore س = ٩$ أو $س = -٥$

$\therefore م.ح = \{٩ ، -٥\}$

المعادلة الأسية

هى معادلة تتضمن متغيرًا (مجهولاً) فى الأس مثل ($٢^{س + ١} = ٨$)

قوانين المعادلة الأسية

لكل $م ، ن \in ص ، أ ، ب \in ح - \{-١ ، ٠ ، ١\}$ نجد أن :

1. إذا كان : $أ^{ن} = ١$ فإن : ن = صفر
2. إذا كان : $أ^{م} = أ^{ن}$ فإن : م = ن
3. إذا كان : $أ^{ن} = ب^{ن}$
   - وكان ن عددًا فرديًا فإن $أ = ب$
   - وكان ن عددًا زوجيًا فإن $أ = \pm ب$
   - وكان $أ \neq ب$ فإن ن = صفر

مثال 4

أوجد قيمة س التى تحقق كلاً من المعادلات الآتية :

1. $٢^{س + ٥} = ٨$
2. $٣^{س^{٢} - ٤} = ١$
3. $٤^{س + ٢} = س^{س + ٢}$
4. $٤^{س - ٢} = ٣^{٢س - ٦}$
5. $(\frac{٢}{٣})^{|س - ٥|} = (٣\frac{٣}{٨})^{-٢}$

الحل

1️⃣ $\because ٢^{س + ٥} = ٨$ $\therefore ٢^{س + ٥} = ٢^{٣}$

$\therefore س + ٥ = ٣$ $\therefore س = -٢$

2️⃣ $\because ٣^{س^{٢} - ٤} = ١$ $\therefore س^{٢} - ٤ = ٠$

$\therefore س = \pm ٢$

3️⃣ $\because ٤^{س + ٢} = س^{س + ٢}$ $\therefore$ إما $س = \pm ٤$

أو $س + ٢ = ٠$ ومنها $س = -٢$ $\therefore س \in \{-٢ ، ٤ ، -٤\}$

4️⃣ $\because ٤^{س - ٢} = ٣^{٢س - ٦}$ $\therefore ٤^{س - ٢} = ٣^{٢(س - ٣)}$

$\therefore ٤^{س - ٢} = ٩^{س - ٣}$

$\because ٤ \neq ٩$ $\therefore س - ٣ = ٠$ ومنها $س = ٣$

5️⃣ $\because (\frac{٢}{٣})^{|س - ٥|} = (\frac{٢٧}{٨})^{-٢}$ $\therefore (\frac{٢}{٣})^{|س - ٥|} = ((\frac{٣}{٢})^{٣})^{-٢}$

$\therefore (\frac{٢}{٣})^{|س - ٥|} = (\frac{٣}{٢})^{-٦} = (\frac{٢}{٣})^{٦}$ $\therefore |س - ٥| = ٦$

$\therefore س - ٥ = \pm ٦$

$\therefore$ إما $س - ٥ = ٦$ ومنها $س = ١١$ أو $س - ٥ = -٦$ ومنها $س = -١$

مثال 5

أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

1. $٢^{س} \times \sqrt[٣]{٤} = (\sqrt[٣]{١٦})^{-١}$
2. $٤^{س^{٢} - ١} = ٨^{-س}$
3. $\frac{٣^{٣س} + ٣^{٢س} + ٣^{س}}{٣^{٢س} + ٣^{س} + ١} = \frac{١}{٩}$

الحل

1️⃣ $\because ٢^{س} \times ٤^{\frac{١}{٣}} = (١٦)^{-\frac{١}{٣}}$ $\therefore ٢^{س} \times (٢^{٢})^{\frac{١}{٣}} = (٢^{٤})^{-\frac{١}{٣}}$

$\therefore ٢^{س} \times ٢^{\frac{٢}{٣}} = ٢^{-\frac{٤}{٣}}$ $\therefore ٢^{س + \frac{٢}{٣}} = ٢^{-\frac{٤}{٣}}$

$\therefore س + \frac{٢}{٣} = -\frac{٤}{٣}$ $\therefore س = -٢$ $\therefore$ مجموعة الحل = $\{-٢\}$

٢ ∵ $٤^{س^٢} \times ٨^{س} = ...$

∴ $٢^{٢س^٢} \times ٢^{٣س} = ...$

∴ $٢س^٢ + ٣س - ٢ = ٠$

∴ $٢س - ١ = ٠$ ومنها $٢س = ١$

أو $س + ٢ = ٠$

∴ $(٢)^{٢س^٢} = (٢)^{...}$

∴ $٢س^٢ = ٢ - ٣س$

∴ $(٢س - ١)(س + ٢) = ٠$

∴ $س = \frac{١}{٢}$

∴ $س = -٢$

∴ مجموعة الحل = $\{\frac{١}{٢} ، -٢\}$

٣ ∵ $\frac{٣^{س+٢} + ٣^{س} + ...}{٣^{س+٢} + ٣^{س} + ١٠} = \frac{١}{٩}$

∴ $\frac{٣^{س}(٣^٢ + ٣ + ١٠)}{٣^{س+٢} + ٣^{س} + ١٠} = ٣^{-٢}$

∴ $٣^{س} = ٣^{-٢}$

∴ $س = -٢$

∴ مجموعة الحل = $\{-٢\}$

مثال ٦

أوجد في ح مجموعة حل كل من المعادلتين الآتيتين :

١ $٢^{س+١} + ٢^{س-١} = ٥$

٢ $٥^{س} + \frac{١٢٥}{٥^{س}} = ٣٠$

الحل

١ نأخذ $٢^{س-١}$ عامل مشترك

∴ $٢^{س-١}(٤ + ١) = ٥$

∴ $س - ١ = $ صفر

∴ $٢^{س-١}((٢)^٢ + ١) = ٥$

∴ $٢^{س-١} = ١$

∴ $س = ١$ ∴ مجموعة الحل = $\{١\}$

حل آخر : $٢^{س+١} + ٢^{س-١} = ٥$

∴ $٢^{س}[٢ + \frac{١}{٢}] = ٥$

∴ $٢^{س} = ٢$

∴ $٢^{س} \times ٢ + ٢^{س} \times ٢^{-١} = ٥$

∴ $٢^{س} \times \frac{٥}{٢} = ٥$

∴ $س = ١$ ∴ مجموعة الحل = $\{١\}$

٢ بضرب الطرفين × $٥^{س}$

∴ $٥^{٢س} + ١٢٥ = ٣٠ \times ٥^{س}$

∴ $٥^{٢س} - ٣٠ \times ٥^{س} + ١٢٥ = ٠$

وبالتحليل : ∴ $(٥^{س} - ٥)(٥^{س} - ٢٥) = ٠$

∴ إما $٥^{س} - ٥ = $ صفر أو $٥^{س} - ٢٥ = ٠$

∴ $٥^{س} = ٥$ ∴ $٥^{س} = ٥^٢$

∴ $س = ١$ ∴ $س = ٢$ ∴ مجموعة الحل = $\{١ ، ٢\}$

حل آخر :

بوضع $٥^{س} = ص$

∴ $ص + \frac{١٢٥}{ص} = ٣٠$ وبضرب الطرفين في ص

∴ $ص^٢ - ٣٠ص + ١٢٥ = ٠$

∴ $(ص - ٥)(ص - ٢٥) = ٠$

∴ $ص = ٥$ أو $ص = ٢٥$

∴ $٥^{س} = ٥$ ∴ $س = ١$

أو $٥^{س} = ٥^٢$ ∴ $س = ٢$

∴ مجموعة الحل = $\{١ ، ٢\}$

7 تمارين

على الأسس الكسرية والمعادلات الأسية

اختبر نفسك

• تذكر • تطبيق • مستويات عليا • من أسئلة الكتاب المدرسي

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① $٢^{٣} \times ٢^{٤} = $ ......

(أ) $٢^{١٢}$ (ب) $٤^{٧}$ (جـ) $٢^{٧}$ (د) $٤^{١٢}$

② $\sqrt[٣]{٢^٢} \times \sqrt[٣]{٢^٢} = $ ......

(أ) $\sqrt[٣]{٢^٤}$ (ب) $\sqrt[٣]{٤^٢}$ (جـ) $\sqrt[٣]{٢^{١٢}}$ (د) $٢\sqrt[٣]{٢}$

③ إذا كان $٢^{س+١} = ٨$ فإن $س = $ ......

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

④ $٣^{س+٥} = \frac{١}{٢٧}$ فإن $س = $ ......

(أ) -٣ (ب) ٨ (جـ) -٨ (د) ٣

⑤ إذا كان : $٥^{س-١} = ٤^{س-١}$ فإن $س = $ ......

(أ) ٥ (ب) ١ (جـ) -١ (د) صفر

⑥ مجموعة حل المعادلة : $٥^{س^٢-٤} = ٧^{س^٢-٤}$ هي ......

(أ) $\{٢\}$ (ب) $\{-٢\}$ (جـ) $\{٢ ، -٢\}$ (د) $\{$صفر$\}$

⑦ إذا كانت : $٧^{س-١} = ٣^{٢س-٢}$ فإن : $٥^{س-١} = $ ......

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٥

⑧ إذا كان : $(\frac{١}{٢})^{أ^٢-أ-٢} = ١$ حيث أ > صفر فإن : أ = ...

(أ) ١ (ب) -٢ (جـ) ٢ (د) ٣

⑨ مجموعة حل المعادلة : $٧^{س^٢} = ٤٩^{س+٤}$ هو ......

(أ) $\{-٢\}$ (ب) $\{-٢ ، ٤\}$ (جـ) $\{-٢ ، ٣\}$ (د) $\{٢ ، -٤\}$

⑩ إذا كان $٢^{س} = ٢$ ، $٢^{ص} = ٩$ فإن : $س ص = $ ......

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٨ (د) ١٨

(١١) إذا كان: $٥^{س} = ٢$ فإن: $٢٥^{س} = $ ....

(أ) ١٠ (ب) ١٢٥ (جـ) ٤ (د) ٢

(١٢) إذا كان: $٢^{س} = ٥$ فإن: $٢^{س+٢} = $ ....

(أ) ١٥ (ب) ٤ (جـ) ١٠ (د) ٢٠

(١٣) إذا كان: $س^{\frac{2}{3}} = ٦٤$ فإن: س = ...

(أ) ٥١٢ (ب) ١٦ (جـ) ٤ (د) ٢

(١٤) إذا كانت: $س^{\frac{2}{5}} = ٤$ فإن: س = ...

(أ) ٤ (ب) ١٦ (جـ) ± ٤ (د) ± ٣٢

(١٥) إذا كان: $٤ س^{٥} = ١٢٨$ فإن: س = ...

(أ) ٤ (ب) ± ٢ (جـ) ٢ (د) −٢

(١٦) $(١٢٨)^{\frac{2}{7}} = $ ....

(أ) ٢ (ب) $\frac{1}{2}$ (جـ) $\frac{1}{4}$ (د) ٤

(١٧) $\sqrt[4]{(١٦)^{-3}} = $ ....

(أ) ٨ (ب) −٨ (جـ) $\frac{1}{8}$ (د) $-\frac{1}{8}$

(١٨) إذا كان: س ، ص ∈ ح فإن: $\sqrt{س^{2} ص^{6}} = $ ....

(أ) $س ص^{3}$ (ب) $|س ص^{3}|$ (جـ) $\frac{1}{2} س^{2} ص^{6}$ (د) $\pm س ص^{3}$

(١٩) $\sqrt[4]{١٦ س^{4} ص^{8}} = $ ....

(أ) $٢ س ص^{2}$ (ب) $٢ |س| ص^{2}$ (جـ) $٢ س |ص|^{2}$ (د) $٢ س |ص^{2}|$

(٢٠) إذا كان: $٢^{س-١} = ٤٤$ فإن: $٢^{س-٢} = $ ....

(أ) ١٨ (ب) ٢٢ (جـ) ١٠ (د) ١٦

(٢١) إذا كان: $س^{\frac{2}{5}} = ٢ ص^{\frac{1}{4}} = ٣٢$ فإن: س + ص = ...

(أ) ١٦ (ب) صفر (جـ) ١٦ ، −١٦ (د) صفر ، ١٦

(٢٢) مجموعة حل المعادلة: $٣^{س+١} + ٣^{س} = ١٢$ فى ح هى ....

(أ) {٠} (ب) {٣} (جـ) {١} (د) {٠ ، ١}

(٢٣) مجموعة حل المعادلة: $٣^{س} + ٣^{٢-س} = ١٢$ هى ....

(أ) {١ ، ٢} (ب) {٠ ، ٣} (جـ) {٣ ، ٤} (د) {−١ ، −٢}

(٢٤) مجموعة حل المعادلة: $\sqrt[3]{س^{2}} - ٣\sqrt[3]{س} + ٢ = ٠$ هى ....

(أ) {١ ، ٨} (ب) {١ ، ٢} (جـ) {٨} (د) {١}

(٢٥) مجموعة حل المعادلة: $٩^{س} - ٢٠ \times ٣^{س-١} + ٩ = $ صفر

(أ) {٠ ، ١} (ب) {١ ، ٢} (جـ) {٠ ، ٢} (د) {٠ ، ٣}

(٢٦) عدد الجذور الحقيقية للمعادلة $س^{ن} = أ$ حيث ن عدد فردى هو ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ن

(٢٧) عدد الجذور الحقيقية للمعادلة: $س^{6} = أ$ ، أ > ٠ هو ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٦

(٢٨) المعادلة: $س^{3} = ٤$ عدد جذورها يساوى ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٢٩) عدد الجذور الحقيقية للمعادلة: $س^{4} = -١٦$ هو ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٤

(٣٠) مجموعة الجذور الحقيقية للمعادلة: $(س - ٢)^{4} = ١٦$ هى ....

(أ) {٠} (ب) {٤} (جـ) {٨} (د) {٠ ، ٤}

(٣١) مجموعة حل المعادلة: $(س - ٣)^{\frac{5}{3}} = ٣٢$ فى ح هى ....

(أ) {٢} (ب) {١١} (جـ) {١١ ، −٥} (د) {−١١ ، ١١}

(٣٢) إذا كانت: س ∈ ح* ، ن عدد صحيح زوجى فأى مما يأتى صحيح ؟

(أ) $س^{ن} > ٠$ (ب) $س^{ن} < ٠$ (جـ) $س^{ن} \le ٠$ (د) $س^{ن} = ٠$

(٣٣) إذا كانت: $س \in ح^{-}$ ، ن عدد صحيح فردى فأى مما يأتى صحيح ؟

(أ) $س^{ن} > ٠$ (ب) $س^{ن} < ٠$ (جـ) $س^{ن} \ge ٠$ (د) $س^{ن} = ٠$

(٣٤) أى مما يأتى لا يساوى $(\sqrt[5]{س^{4}})$ ؟

(أ) $(\sqrt[5]{س})^{4}$ (ب) $\sqrt[4]{س^{5}}$ (جـ) $س^{\frac{4}{5}}$ (د) $(س^{\frac{1}{5}})^{4}$

(٣٥) إذا كانت: أ < ب < ٠ < جـ فإن: $\frac{\sqrt[4]{ب^{4} جـ^{4}} + ب\sqrt{(أ - جـ)^{2}}}{\sqrt{أ^{2} ب^{2}}} = $ ....

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) $\frac{أ}{ب}$ (د) $\frac{-جـ}{٢}$

• فهم ○ تطبيق ∴ مستويات عليا

(٣٦) إذا كان : أ < ٠ < ب < جـ فأى من الأعداد الآتية لا ينتمى إلى ح ؟

(أ) $\sqrt[٢]{أب}$ (ب) $\sqrt[٤]{ب جـ}$ (جـ) $\sqrt[٥]{أب + جـ}$ (د) $\sqrt[٣]{أ جـ}$

(٣٧) إذا كان : $\sqrt{٢} \times \sqrt[٣]{٣} = \sqrt[٦]{س}$ فإن : س = ...

(أ) ٢٧ (ب) ٤٨ (جـ) ٧٢ (د) ١٠٨

(٣٨) $\sqrt{٩^{١٦} س^{٢}}$ = ...

(أ) $٣^{٤}س$ (ب) $٣^{٨}س^{٢}$ (جـ) $٩^{٤}س$ (د) $٩^{٨}س^{٢}$

(٣٩) إذا كان : $٣^{س-٢} = \sqrt[٤]{٢٧}$ فإن : س = ...

(أ) $\frac{١١}{٤}$ (ب) $\frac{٤}{٣}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) ٦

(٤٠) إذا كان : $٣^{س+٢} = ٦^{س-١}$ فإن : $٢^{س}$ = ...

(أ) ٥٤ (ب) ٢٧ (جـ) $\frac{١}{٩}$ (د) $\frac{١}{٣٦}$

(٤١) إذا كان : $٢^{س} = ٢٠$ ، ن < س < ن + ١ ، ن عدد صحيح فإن : ن = ...

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ٧

(٤٢) إذا كان : $٣^{س} < ٠$ فإن : ....

(أ) ٠ < س < ١ (ب) -١ < س < ٠

(جـ) س < -١ (د) لا توجد قيمة لـ س تحقق ذلك.

(٤٣) العدد ($٢^{٢٤} + ٢^{٢٣} + ٢^{٢٢}$) يقبل القسمة على ....

(أ) ٣ (ب) ٥ (جـ) ٧ (د) ٩

(٤٤) إذا كان : $٣^{أ} = ٤^{ب}$ فإن : $٩^{\frac{أ}{ب}} + ١٦^{\frac{ب}{أ}}$ = ...

(أ) ٧ (ب) ١٢ (جـ) ٢٠ (د) ٢٥

(٤٥) إذا كان : $٢^{أ} = ٣$ ، $٣^{ب} = ٧$ ، $٧^{جـ} = ١١$ فإن : $٢^{أبجـ}$ = ...

(أ) ١١ (ب) ٢٧ (جـ) ٢١ (د) ٢٣١

(٤٦) إذا كان : $٢^{س} = أ$ ، $٣^{س} = ب$ ، $٥^{س} = جـ$ فإن : $(٩٠)^{س}$ = ...

(أ) أ ب جـ (ب) $أ^{٢}$ ب جـ (جـ) أ $ب^{٢}$ جـ (د) أ + ٢ ب + جـ

ثانيا الأسئلة المقالية

١ اختصر لأبسط صورة :

① $\frac{(٢٧)^{-٢} \times (١٢)^{٢}}{١٦ \times (٨١)^{-٢}}$ «٣٠»

② $\frac{٤^{٢ن+١} \times ٢^{١-ن}}{٨^{ن+٢}}$ «$\frac{١}{٨}$»

③ $\frac{٩^{٤ن+١} \times ٤^{٢-٢ن}}{٣^{٩ن+١} \times ٤٨^{١-ن}}$ «١٠»

④ $\frac{١٢٥ \times (١٥)^{ن-٢} \times (٢٥)^{٢+ن}}{(٧٥)^{ن} \times (٥)^{ن+٢٢}}$ «$\frac{١}{٢٧}$»

⑤ $(١٨)^{\frac{١}{٢}} \times (١٢)^{\frac{٢}{٣}} \times \frac{١}{(٢٤)^{\frac{١}{٣}}}$ «٣٦٠»

⑥ $\frac{٣^{\frac{١}{٢}} \times (١٤٧)^{\frac{١}{٢}}}{(٦٣)^{\frac{١}{٢}}}$ «١٠»

٢ أثبت أن :

① $\frac{(٢٧)^{ص-\frac{١}{٣}} \times \sqrt[ص]{٧^{ص^{٢}+٢ص}}}{(٨١)^{ص-١} \times (٢١)^{٥-ص} \times (٤٩)^{ص-١}} = \frac{١}{٩}$

② $\frac{(٣٤٣)^{٢س-\frac{١}{٣}} \times (٤)^{٢س+١}}{(١٩٦)^{٣س} \times ٤} = \frac{١}{٧}$

③ $\frac{١٢٥ \times \sqrt[٨]{٤^{٣}} \times ١٠^{-\frac{١}{٤}}}{٤^{\frac{٥}{٨}} \times \sqrt[٤]{٦^{-٣}} \times ١٥^{\frac{٣}{٤}}} = ٢٥$

④ $\frac{٣ \times ٢^{س+٢} + \sqrt{٤^{س+٢}}}{٢^{س+٣} - ٦ \times ٢^{س}} = ٨$

٣ أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

① $س^{\frac{٧}{٢}} = ١٢٨$

② $س^{\frac{٥}{٢}} = \frac{١}{٣٢}$

③ $س^{-\frac{٥}{٢}} = \sqrt[٣]{٣٢}$

④ $\sqrt[٣]{س^{٤}} = ٨١$

⑤ $\sqrt[٣]{(س - ١)^{٥}} = ٣٢$

⑥ $(٢س + ٣)^{\frac{٤}{٣}} = ٨١$

⑦ $(س + ١)^{-\frac{٥}{٢}} = (٣٢)^{-\frac{١}{٢}}$

⑧ $(س^{٢} - ٥س + ٩)^{\frac{٥}{٢}} = ٢٤٣$

⑨ $(\sqrt{س} + ٢)^{\frac{١}{٢}} = ٣$

⑩ $س^{\frac{٤}{٥}} - ٥س^{\frac{٢}{٥}} + ٤ = ٠$

⑪ $س^{\frac{٤}{٣}} - ١٠س^{\frac{٢}{٣}} + ٩ = ٠$

⑫ $س - ٣س^{\frac{١}{٢}} + ٢ = ٠$

⑬ $س + ١٥ = ٨\sqrt{س}$

⑭ $\sqrt[٣]{ص^{٢}} - ٢٥\sqrt[٣]{س} - ٥٤ = ٠$

⑮ $\sqrt[٣]{س^{٥}} - \sqrt[٦]{س^{٥}} = ٦$

⑯ $\sqrt[٥]{س^{٤}} - ٣\sqrt[٥]{س^{٢}} = ٤$

⑰ $\sqrt[٥]{س} - ٣ = -\frac{٢}{\sqrt[٥]{س}}$

٤ أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

① $٥^{٢س-١} = \frac{١}{١٢٥}$ «{-١}»

② $٥^{س+٢} = س^{س+٢}$ «{٥ ، -٢}»

③ $٢^{س^{٢}-٩} = ١$ «{٣ ، -٣}»

④ $س^{س^{٢}-٢٥} = ٣^{س^{٢}-٢٥}$ «{٣ ، -٣ ، ٥ ، -٥}»

⑤ $(٣\sqrt{٣})^{|س|} = ٢٧$ «{٢ ، -٢}»

⑥ $٣^{|٢س-٤|} = ٩^{٢س-٢}$ «{$\frac{٨}{٧}$}»

(٧) $2 \times 4^{س+3} = \frac{1}{32}$ $\{-6\}$

(٨) $(\frac{3}{5})^{2س-1} = \frac{27}{125}$ $\{2\}$

(٩) $5^{س-1} \times 7^{1-س} = \frac{25}{49}$ $\{3\}$

(١٠) $\frac{9^{س+1} \times 4^{س-1}}{36^{س}} = (\frac{3}{2})^{س}$ $\{2\}$

(١١) $\frac{12^{2س} \times 9^{س+1}}{18^{2س} \times 4^{س-2}} = 9$ $\{2\}$

(١٢) $\frac{1}{27}(\sqrt{3})^{س+2} = 1$ $\{4\}$

(١٣) $(\sqrt{3})^{س^2-5س} = 1$ $\{0, 5\}$

(١٤) $5^{س^2-5س} = 0.0016$ $\{1, 4\}$

(١٥) $5^{س^2} = 25^{س+4}$ $\{-2, 4\}$

(١٦) $3^{س^2-42} = (\frac{1}{3})^{س}$ $\{6, -7\}$

(١٧) $(\sqrt{7})^{|س+2|} = 49$ $\{2, -6\}$

(١٨) $3^{2س-3} \times 7^{6-4س} = 1$ $\{\frac{3}{2}\}$

(١٩) $\sqrt{9^{س} - 2 \times 3^{س+1} + 9} = 24$ $\{3\}$

(٢٠) $\sqrt{5^{2س-2} - \frac{2}{5} \times 5^{س} + 1} = 124$ $\{4\}$

٥ أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

(١) $5^{س+1} + 5^{س-1} = 26$ $\{1\}$

(٢) $3^{س+3} - 3^{س+2} = 162$ $\{2\}$

(٣) $7^{2-س} + 7^{-س} = 50$ $\{0\}$

(٤) $5^{2س} + 25 = 26 \times 5^{س}$ $\{0, 2\}$

(٥) $2^{س} + 2^{5-س} = 12$ $\{2, 3\}$

(٦) $(\frac{1}{2})^{س+1} + (\frac{1}{2})^{س+3} + (\frac{1}{2})^{س+5} = 84$ $\{-7\}$

(٧) $4^{س} + 2^{س+1} = 8$ $\{1\}$

(٨) $2^{2س+1} - 33 \times 2^{س} + 16 = 0$ $\{-1, 4\}$

(٩) $5^{2س-2} - 6 \times 5^{س-1} + 5 = 0$ $\{1, 2\}$

(١٠) $9^{س^2-1} - 36 \times 3^{س^2-2} + 3 = 0$ $\{1, -1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$

(١١) $10^{س} - 5^{س-1} \times 2^{س-2} = 950$ $\{3\}$

٦

(١) إذا كان : $ص^{\frac{3}{4}} = 2\,س^{\frac{5}{3}} = 64$ فأوجد قيمة : ٥ س + ٢ ص «552»

(٢) إذا كان : $س^{\frac{3}{2}} = 3\,ص^{\frac{2}{3}} = 27$ فأوجد قيمة : س + ص «36 أ، -18»

(٣) إذا كان : $س^{\frac{4}{3}} = 9\,ص^{-\frac{2}{3}} = 81$ فأوجد قيمة : | ٢ س ص | «2»

٧ اكتشف الخطأ :

(١) $-9 = (-9)^{\frac{2}{2}} = \sqrt{(-9)^2} = \sqrt{81} = 9$

(٢) إذا كان : $س^4 = 81$ فإن : $س = \sqrt[4]{81}$ ∴ $س = 3$

٨ أوجد فى ح × ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

(١) $4^{س+ص} = 128$ ، $5^{س-2ص-3} = 1$ $\{(\frac{10}{3}, \frac{1}{6})\}$

(٢) $3^{س} \times 5^{ص} = 75$ ، $3^{ص} \times 5^{س} = 45$ $\{(1, 2)\}$

(٣) $3^{س} \times 3^{ص} = 27$ ، $3^{س} + 3^{ص} = 12$ $\{(1, 2), (2, 1)\}$

٩ تفكير إبداعى : أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة :

$9^{س+1} - 3^{س+2} - 3^{س} + 2 = 0$ $\{-2, 1\}$

١٠ تفكير إبداعى : إذا كان : $س^3 = ص^2$ وكان : $س^{ن+1} = ص^{ن-1}$

فما قيمة ن؟ «5»

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : س < صفر فإن : $\sqrt{س^2} - \sqrt[3]{س^3} - \sqrt{س^2 - 2س + 1} + 1 = $ ....

(أ) س (ب) − س (جـ) صفر (د) −١

(٢) إذا كان : $أ = \sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{7}}}$ فأى الأعداد الآتية عدد نسبى ؟

(أ) $أ^{12}$ (ب) $أ^{16}$ (جـ) $أ^{18}$ (د) $أ^{24}$

(٣) أى مما يأتى لا يكون دائمًا صحيحًا ؟

(أ) $(\sqrt[5]{\sqrt[6]{2}})^{30} = 2$ (ب) $\sqrt[5]{128} = 2\sqrt[5]{4}$

(جـ) $\sqrt{س^2 ص^6} = س ص^3$ (د) $\sqrt[3]{س^4}\sqrt[3]{س^4} = س^{\frac{8}{3}}$

(٤) مجموعة حل المعادلة : $س^{\frac{3}{2}} = س^{\frac{2}{3}}$ فى ح هى ....

(أ) $\{1\}$ (ب) $\{-1, 1\}$

(جـ) $\{0, 1\}$ (د) $\{0, 1, -1\}$

⑤ $\sqrt[٣]{\frac{٢}{٢٧}} = \frac{\text{.......}}{٣}$

(أ) $\sqrt[٣]{٢}$ (ب) $\sqrt[٣]{٤}$ (جـ) $\sqrt[٣]{١٨}$ (د) $٣\sqrt{٥}$

⑥ العلاقة : $\sqrt[ن]{أ^{ن}} = (\sqrt[ن]{أ})^{ن}$ صحيحة لجميع قيم ....

(أ) أ ∈ ح (ب) ن ∈ ص⁺ − {١} ، ن زوجية

(جـ) $\sqrt[ن]{أ}$ ∈ ح ، ن ∈ ص⁺ − {١} (د) لا شيء مما سبق.

⑦ المعادلة : $س^{\frac{٣}{٢}}$ = أ يكون لها حل فى ح إذا كان ....

(أ) أ ∈ ح (ب) أ ∈ ح⁺

(جـ) أ ∈ ح⁻ (د) أ ∈ ح⁺ ∪ {٠}

⑧ إذا كان : $\sqrt[٣]{٢\sqrt{٣\sqrt{٢}}} = \sqrt[٦]{م\sqrt{٢}}$ فإن : م = ...

(أ) ٦ (ب) ٨ (جـ) ١٠ (د) ١٢

⑨ $\sqrt[ن]{أ} \times \sqrt[م]{أ}$ = ...

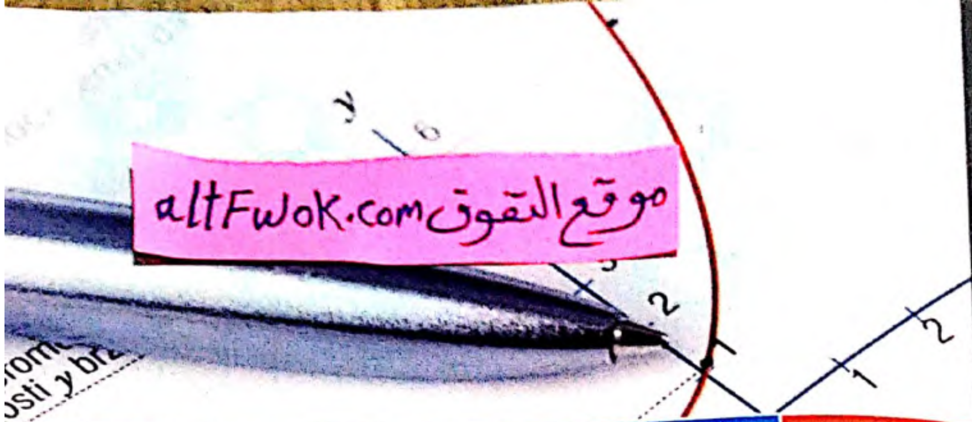
(أ) $\sqrt[نم]{أ}$ (ب) $\sqrt[ن+م]{أ}$ (جـ) $\sqrt[\frac{١}{ن}+\frac{١}{م}]{أ}$ (د) $\sqrt[نم]{أ^{م+ن}}$

٢ أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

① $٥^{س-١} \times ٥^{س^{٢}-س} = ٥$ «{٢ ، ٥}»

② $(س-٣)^{(س-٥)} = ١$ «{٤ ، ٥}»

③ $(س-٣)^{(س-٦)} = ١$ «{٢ ، ٤ ، ٦}»



الدرس 2 الدالة الأسية وتطبيقاتها

تعريف

إذا كان : أ ∈ ح⁺ − {١}

فإن الدالة د : ح ⟵ ح⁺ حيث د (س) = $أ^{س}$ تسمى دالة أسية أساسها أ

فمثلًا :

- د : د (س) = $٣^{س}$ دالة أسية أساسها ٣ وأسها س
- د : د (س) = $(\frac{١}{٢})^{س+١}$ دالة أسية أساسها $\frac{١}{٢}$ وأسها (س + ١)

ملاحظة

لاحظ الفرق بين الدالة الجبرية والدالة الأسية :

- فى الدالة الجبرية يكون المتغير المستقل س موجود كأساس فى قاعدة الدالة أما الأس فهو عدد حقيقى.

مثل : د : د (س) = $س^{٢} - ٣س + ١$ أو د : د (س) = $(س-٣)^{٢}$ أو ...

- فى الدالة الأسية يكون المتغير المستقل س موجود كأس فى قاعدة الدالة أما الأساس فهو عدد حقيقى موجب لا يساوى الواحد.

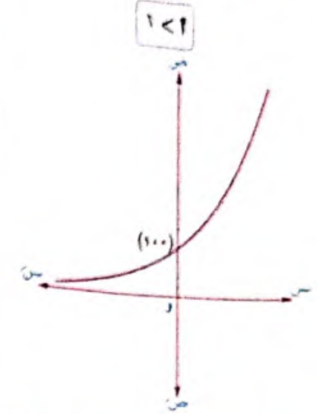
فمثلًا : د : د (س) = $٣^{س}$ أو د : د (س) = $٣^{س} + ٣^{س-١} + ٢$ دوال أسية

أما د : د (س) = $(-٣)^{س}$ أو د : د (س) = $(١)^{س}$ ليست دوال أسية

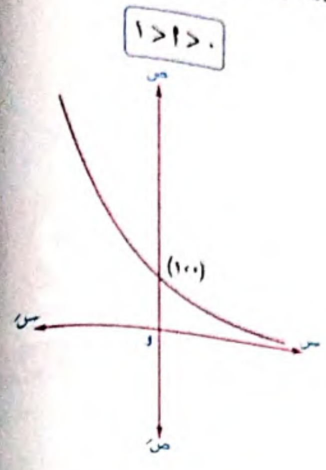
التمثيل البيانى للدالة الأسية

الشكل العام لمنحنى الدالة د : د (س) = $أ^{س}$ كما هو موضح بالشكلين التاليين :

أ > ١



٠ < أ < ١

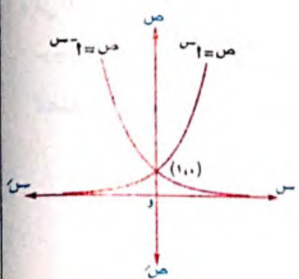


بعض خواص الدالة الأسية د : د (س) = $أ^{س}$

- مجالها ح
- مداها $ح^{+}$ ويقع منحناها بأكمله فوق محور السينات.
- الدالة تزايدية على مجالها ح إذا كان أ > ١ وتسمى دالة نمو أسى معامله أ ومنحنى الدالة يقترب من محور السينات كلما قلت قيمة س
- الدالة تناقصية على مجالها ح إذا كان ٠ < أ < ١ وتسمى دالة تضاؤل أسى معامله أ ومنحنى الدالة يقترب من محور السينات كلما زادت قيمة س
- منحنى الدالة الأسية يمر بالنقطة (٠ ، ١)
- د : د (س) = $أ^{س}$ هى دالة أحادية
- إذا كانت د (س) = $أ^{س}$

فإن د (- س) = $أ^{-س}$ = $\left(\frac{١}{أ}\right)^{س}$

ويكون المنحنى ص = $\left(\frac{١}{أ}\right)^{س}$ صورة المنحنى ص = $أ^{س}$ بالانعكاس فى محور الصادات



- $أ^{س}$ ← ∞ عندما س ← ∞ حيث أ > ١
- $أ^{س}$ ← ٠ عندما س ← ∞ حيث ٠ < أ < ١

مثال ١

ارسم منحنى الدالة د : ح ← $ح^{+}$ ، د (س) = $٢^{س}$ متخذًا س ∈ [-٣ ، ٤]

ومن الرسم أوجد قيمة تقريبية لكل من :

١ د (١،٥) ، د $\left(-\frac{١}{٢}\right)$ ٢ قيمة س عندما د (س) = ١٠

الحل

نكون الجدول الآتى :

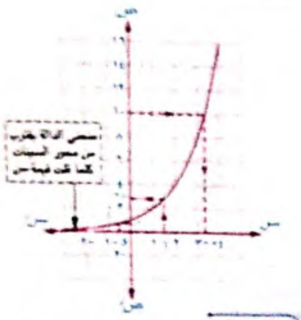
س	-٣	-٢	-١	٠	١	٢	٣	٤
ص = $٢^{س}$	$\frac{١}{٨}$	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٢}$	١	٢	٤	٨	١٦

١ إيجاد قيمة د (١،٥) :

عند س = ١،٥ نرسم مستقيمًا يوازى محور الصادات ليقابل المنحنى فى نقطة ثم نقرأ قيمة ص المناظرة على محور الصادات فنجدها ٢،٨ تقريبًا.

∴ د (١،٥) ≈ ٢،٨

وبالمثل د $\left(-\frac{١}{٢}\right)$ ≈ ٠،٧



لاحظ أن

د (س) = $٢^{س}$ دالة نمو أسى حيث أ > ١

٢ إيجاد قيمة س عندما د (س) = ١٠

أى عندما $٢^{س}$ = ١٠

∴ عند ص = ١٠ نرسم مستقيمًا يوازى محور السينات يقابل المنحنى فى نقطة ثم نقرأ قيمة س المناظرة على محور السينات فنجدها ٣،٣ تقريبًا.

∴ عندما $٢^{س}$ = ١٠ تكون س ≈ ٣،٣

مثال ٢

ارسم منحنى الدالة د : ح ← $ح^{+}$ ، د (س) = $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س}$ متخذًا س ∈ [-٤ ، ٣]

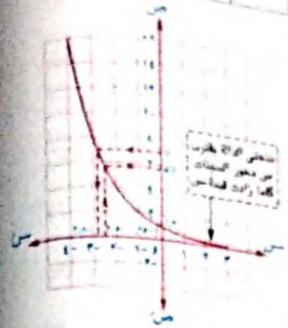
ومن الرسم أوجد قيمة تقريبية لكل مما يأتى :

١ د (-٢،٥) ٢ $\sqrt[٣]{٢}$ ٣ س عندما $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س}$ = ٧

◀ الحــل

نكون الجدول الآتي

س	−٤	−٣	−٢	−١	٠	١	٢	٣
ص = $\left(\frac{1}{2}\right)^{س}$	١٦	٨	٤	٢	١	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$



• ومن الرسم نجد أن

١ د (−٢.٥) = ٥.٧

٢ ∵ $\sqrt[4]{2} = 2^{\frac{1}{4}} = (2^{-1})^{-\frac{1}{4}}$

= $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{4}}$ = د $\left(-\frac{1}{4}\right)$

∴ د $\left(-\frac{1}{4}\right)$ = ١.٢

٣ عندما $\left(\frac{1}{2}\right)^{س} = 7$

∴ س = −٢.٨

لاحظ أن

د (س) = $\left(\frac{1}{2}\right)^{س}$ دالة تضاؤل أسي حيث $0 < أ < 1$

لاحظ أنه في مثال ١ ، مثال ٢

منحنى د : د (س) = $2^{س}$ هو صورة منحنى الدالة د : د (س) = $\left(\frac{1}{2}\right)^{س}$ بالانعكاس في محور الصادات.

بعض التحويلات الهندسية للدالة د : د (س) = $أ^{س}$

١ الإزاحة الرأسية لمنحنى الدالة الأسية :

إذا كانت : د (س) = $أ^{س}$ فإن المنحنى : ص = د (س) + حـ أي : ص = $أ^{س}$ + حـ

يمثله بيانيًا المنحنى : ص = $أ^{س}$ بإزاحة رأسية مقدارها |حـ|

• في اتجاه $\overrightarrow{وص}$ إذا كان حـ > ٠ (إزاحة لأعلى)

• في اتجاه $\overleftarrow{وص}$ إذا كان حـ < ٠ (إزاحة لأسفل)

٢ الإزاحة الأفقية لمنحنى الدالة الأسية :

إذا كانت : د (س) = $أ^{س}$ فإن المنحنى : ص = د (س + ب)

أي : ص = $أ^{س + ب}$ يمثله بيانيًا المنحنى : ص = $أ^{س}$ بإزاحة أفقية مقدارها |ب|

• في اتجاه $\overleftarrow{وس}$ إذا كان ب > ٠ • في اتجاه $\overrightarrow{وس}$ إذا كان ب < ٠

٣ انعكاس منحنى الدالة الأسية في محور السينات :

إذا كانت : د (س) = $أ^{س}$ فإن : منحنى الدالة ص = − د (س)

أي : ص = − $أ^{س}$ هو صورة المنحنى : ص = $أ^{س}$ بالانعكاس في محور السينات.

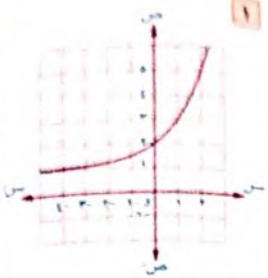
مثال ٣

مثل الدوال المعرفة بالقواعد الآتية ثم أوجد المجال والمدى لكل منهم وبين أيًا منهم تزايدية وأيًا منهم تناقصية :

١ ص = $2^{س} + 1$ ٢ ص = $2^{س - 1}$ ٣ ص = − $\left(\frac{1}{2}\right)^{س}$

◀ الحــل

١

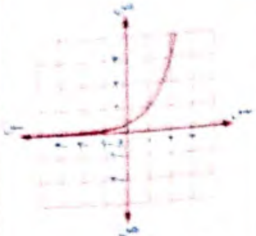


مجال الدالة = ح

، مدى الدالة =]١ ، ∞[

، الدالة تزايدية على مجالها

٢

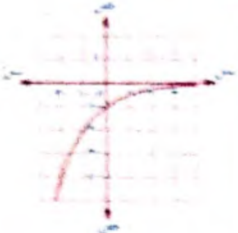


مجال الدالة = ح

، مدى الدالة =]٠ ، ∞[

، الدالة تزايدية على مجالها

٣



مجال الدالة = ح

، مدى الدالة =]−∞ ، ٠[

، الدالة تزايدية على مجالها.

مثال ٤

مثل الدالة المعرفة بالقاعدة الآتية ثم أوجد المجال والمدى وبين هل الدالة تزايدية أم تناقصية : ص = $-2^{1 - س} + 2$

◀ الحــل

∵ ص = $-2^{1 - س} + 2 = -2^{-(س - 1)} + 2$

= $-\left(\frac{1}{2}\right)^{س - 1} + 2$

• المنحنى ص = $-\left(\frac{1}{2}\right)^{س - 1} + 2$

هو نفس المنحنى ص = $\left(\frac{1}{2}\right)^{س}$

بانعكاس في محور السينات ثم إزاحة أفقية

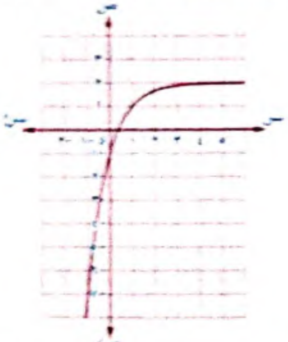
وحدة واحدة في اتجاه $\overleftarrow{وس}$

ثم إزاحة رأسية وحدتين في اتجاه $\overleftarrow{وص}$

المجال = ح

، المدى =]−∞ ، ٢[

، الدالة تزايدية على مجالها.



لاحظ أنه

يجب ترتيب إجراء التحويلات على المنحنى ص = $\left(\frac{1}{2}\right)^{س}$

للحصول على المنحنى ص = $-\left(\frac{1}{2}\right)^{س - 1} + 2$ كما يلي :

انعكاس في محور السينات − إزاحة أفقية − إزاحة رأسية.

فإذا عكس الترتيب فإننا نحصل على منحنى آخر غير المنحنى المطلوب.

حل المعادلات الأسية بيانيًا

يعتمد الحل البيانى للمعادلات الأسية على فرض الطرف الأيمن للمعادلة على أنه دالة أسية د وفرض الطرف الأيسر للمعادلة على أنه أى دالة أخرى ر ويرسم الدالتين د ، ر فى شكل واحد وإيجاد الإحداثى السينى لنقطة (نقط) التقاطع نحصل على مجموعة الحل.

مثال ٥

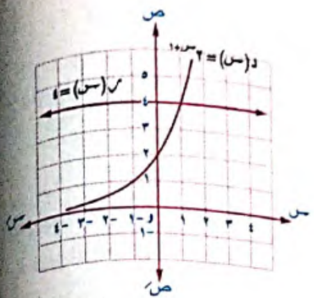
أوجد بيانيًا فى ح مجموعة حل المعادلة : $٢^{س + ١} = ٤$

الحل

نفرض أن الطرف الأيمن للمعادلة هو قاعدة الدالة د : د(س) = $٢^{س + ١}$

والطرف الأيسر هو قاعدة الدالة ر : ر(س) = ٤

ويرسم الشكل البيانى للدالتين فى شكل واحد



ومن الرسم :

∴ نقطة التقاطع هى (١ ، ٤) ∴ س = ١

∴ مجموعة الحل = {١}

مثال ٦

أوجد بيانيًا فى ح مجموعة حل المعادلة : $٣^{س} = ٢س + ١$

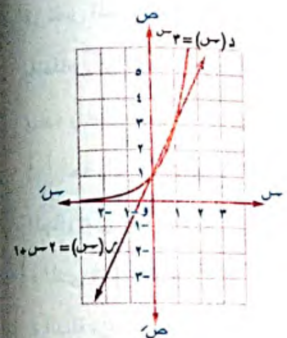
الحل

نفرض أن الطرف الأيمن للمعادلة هو قاعدة الدالة

د : د(س) = $٣^{س}$ والطرف الأيسر هو قاعدة الدالة

ر : ر(س) = ٢س + ١

ويرسم الشكل البيانى للدالتين فى شكل واحد



ومن الرسم : الإحداثيان السينيان لنقطتى التقاطع هما ٠ ، ١

∴ مجموعة الحل = {٠ ، ١}

مثال ٧

إذا كانت د : ح ⟵ ح⁺ ، د(س) = $٣^{س}$ فأثبت أن : $\frac{د(س + ٥) + د(س + ٣)}{د(س + ٣) + د(س + ١)} = د(٢)$

الحل

∵ الطرف الأيمن = $\frac{٣^{س + ٥} + ٣^{س + ٣}}{٣^{س + ٣} + ٣^{س + ١}} = \frac{٣^{س + ٣}(٣^{٢} + ١)}{٣^{س + ١}(٣^{٢} + ١)} = \frac{٣^{س + ٣}}{٣^{س + ١}} = ٣^{٢}$

، الطرف الأيسر = د(٢) = $٣^{٢}$ ∴ الطرفان متساويان.

حل آخر : الطرف الأيمن = $\frac{٣^{س + ٥} + ٣^{س + ٣}}{٣^{س + ٣} + ٣^{س + ١}} = \frac{٣^{س}(٣^{٥} + ٣^{٣})}{٣^{س}(٣^{٣} + ٣)} = ٩ = ٣^{٢} = د(٢)$

مثال ٨

إذا كانت د(س) = $٥^{س}$ أوجد قيمة س إذا كان : د(٢س − ١) + د(٢س + ١) = $\frac{٢٦}{٢٥}$

الحل

∵ د(٢س − ١) + د(٢س + ١) = $\frac{٢٦}{٢٥}$

∴ $٥^{٢س - ١} + ٥^{٢س + ١} = \frac{٢٦}{٢٥}$ ∴ $٥^{٢س - ١}(١ + ٥^{٢}) = \frac{٢٦}{٢٥}$

∴ $٥^{٢س - ١} \times ٢٦ = \frac{٢٦}{٢٥}$ ∴ $٥^{٢س - ١} = \frac{١}{٢٥}$

∴ $٥^{٢س - ١} = ٥^{-٢}$ ∴ ٢س − ١ = −٢ ∴ س = $-\frac{١}{٢}$

حل آخر : ∵ د(٢س − ١) + د(٢س + ١) = $\frac{٢٦}{٢٥}$

∴ $٥^{٢س - ١} + ٥^{٢س + ١} = \frac{٢٦}{٢٥}$ ∴ $٥^{٢س}(٥^{-١} + ٥) = \frac{٢٦}{٢٥}$

∴ $٥^{٢س} = ٥^{-١}$ ∴ ٢س = −١ ∴ س = $-\frac{١}{٢}$

تطبيقات حياتية على النمو والتضاؤل الأسى

١ النمو الأسى

* الدالة د : د(ن) = أ (١ + ر)ⁿ تستخدم لتمثيل النمو الأسى بنسبة مئوية ثابتة فى فترات زمنية متساوية حيث أ القيمة الابتدائية ، ر النسبة المئوية للنمو فى الفترة الزمنية الواحدة ، ن الفترة الزمنية.
* ويمكن استنتاج هذه الدالة عند دراسة ظاهرة تزايد السكان على سبيل المثال : فإذا كان عدد سكان إحدى المدن فى أحد الأعوام أ وكان هذا العدد يتزايد سنويًا بنسبة مئوية ثابتة ر.

فإن عدد السكان بعد عام = أ + أ ر = أ (١ + ر)

، وبعد عامين = أ (١ + ر) + أ ر (١ + ر) = أ (١ + ر)(١ + ر) = $أ(١ + ر)^{٢}$ وهكذا

فيكون عدد السكان بعد ن عام = $أ(١ + ر)^{ن}$

مثال

اشترى وائل منزلًا بمبلغ ١٣٥٠٠٠٠ جنيه فإذا كان سعر المنزل يزداد بمعدل ٢٫٥ ٪ كل سنة :

١ اكتب دالة أسية تمثل سعر المنزل بعد ن سنة من شرائه.

٢ قدّر لأقرب جنيه سعر المنزل بعد مرور ٦ سنوات من شرائه.

الحل

أ = ١٣٥٠٠٠٠ ، ر = $\frac{٢٫٥}{١٠٠}$ = ٠٫٠٢٥ ، ن = ٦

١ دالة النمو الأسي د : د(ن) = أ$(١ + ر)^{ن}$ ∴ د(ن) = ١٣٥٠٠٠٠ $(١ + ٠٫٠٢٥)^{ن}$

∴ د(ن) = ١٣٥٠٠٠٠ $(١٫٠٢٥)^{ن}$

٢ بالتعويض عن ن = ٦ ∴ د(٦) = ١٣٥٠٠٠٠ $(١٫٠٢٥)^{٦}$ ≈ ١٥٦٥٥٨٦ جنيهًا

الربح المركب

• عند حساب الجملة (جـ) لمبلغ (أ) مستثمر في أحد البنوك التي تعطي ربحًا سنويًا مركبًا (ر) كنسبة مئوية لعدد من السنوات (ن) بفترات تقسيم العائد السنوي إلى (س) فترة فإن جملة المبلغ تعطى بالعلاقة :

$$\text{جـ} = \text{أ}\left(١ + \frac{ر}{س}\right)^{ن س}$$

مثال

أودع رجل مبلغ ١٥٠٠٠ جنيه في أحد البنوك التي تعطي فائدة سنوية مركبة قدرها ٧٪ أوجد جملة هذا المبلغ بعد مرور ١٠ سنوات في كل من الحالات الآتية :

١ العائد سنوي ٢ العائد ربع سنوي. ٣ العائد شهري.

الحل

∵ جـ = أ$\left(١ + \frac{ر}{س}\right)^{ن س}$

١ ∵ العائد سنوي أي أن عدد فترات التقسيم = ١ ∴ س = ١

∴ جـ = ١٥٠٠٠ $(١ + ٠٫٠٧)^{١٠}$ = ٢٩٥٠٧٫٢٧ جنيه

٢ ∵ العائد ربع سنوي أي أن عدد فترات التقسيم = ٤ ∴ س = ٤

∴ جـ = ١٥٠٠٠ $\left(١ + \frac{٠٫٠٧}{٤}\right)^{١٠ × ٤}$ = ٣٠٠٢٣٫٩٦ جنيه

٣ ∵ العائد شهري أي أن عدد فترات التقسيم = ١٢ ∴ س = ١٢

∴ جـ = ١٥٠٠٠ $\left(١ + \frac{٠٫٠٧}{١٢}\right)^{١٠ × ١٢}$ = ٣٠١٤٤٫٩٢ جنيه

التضاؤل الأسي

الدالة د : د(ن) = أ$(١ - ر)^{ن}$ تستخدم لتمثيل التضاؤل الأسي حيث أ القيمة الابتدائية ، ر النسبة المئوية للتضاؤل في الفترة الزمنية الواحدة ، ن الفترة الزمنية

مثال ١١

يتناقص عدد المرضى بفيروس الالتهاب الكبدي الوبائي جـ بمعدل ١٥٪ سنويًا نتيجة اكتشاف علاج له فإذا كان عدد المرضى في إحدى الدول ٨٠٠٠٠٠٠ مريض فاكتب دالة أسية تمثل عدد المرضى بعد ن سنة من اكتشاف العلاج ثم قدر عدد المرضى بعد ٨ سنوات.

الحل

أ = ٨٠٠٠٠٠٠ ، ر = ٠٫١٥ ، ن = ٨

الدالة الأسية د : د(ن) = ٨٠٠٠٠٠٠ $(١ - ٠٫١٥)^{ن}$ = ٨٠٠٠٠٠٠ $(٠٫٨٥)^{ن}$

وعند ن = ٨ فإن عدد المرضى = ٨٠٠٠٠٠٠ $(٠٫٨٥)^{٨}$ = ٢١٧٩٩٢٤ مريضًا

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت د : د(س) = $أ^{س}$ دالة أسية فإن أ ∈ ....

(أ) ح (ب) $ح^{+}$ (جـ) $ح^{-}$ (د) $ح^{+} - \{١\}$

(٢) إذا كان د(س) = $٣^{س+٢}$ فإن د(-٢) = ...

(أ) ٣ (ب) صفر (جـ) -١ (د) ١

(٣) إذا كان د(س) = $٤^{س-١}$ فإن د(س + ١) = ...

(أ) $٤^{س}$ (ب) $٤^{س+١}$ (جـ) $٤^{س+٢}$ (د) $٢^{س}$

(٤) إذا كانت د(س) = $٢^{س}$ فإن د(-س) = ...

(أ) $-٢^{س}$ (ب) $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س}$ (جـ) $٢^{س+١}$ (د) $\left(\frac{١}{٢}\right)^{-س}$

(٥) إذا كانت د(س) = $(٥)^{-س}$ فإن $\frac{د(س-١)}{د(س+١)}$ = ...

(أ) ٥ (ب) $\frac{١}{٥}$ (جـ) ٢٥ (د) $\frac{١}{٢٥}$

(٦) إذا كانت د(س - ١) = $٢^{س+١}$ فإن د(س) = ...

(أ) $٢^{س}$ (ب) $٢^{س+١}$ (جـ) $٢^{س+٢}$ (د) $٢^{س-٢}$

(٧) إذا كانت د(س) = $أ^{س}$ فإن د(س + ١) × د(س - ١) = د(..........)

(أ) ٢س + ١ (ب) $أ^{٢س}$ (جـ) ٢س (د) ٢

(٨) إذا كان د(س + ١) = $٢^{س}$ وكان د(أ) = ٨ فإن أ = ...

(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) ٥

(٩) إذا كانت د(س) = $٣^{س-١}$ فإن مجموعة حل المعادلة د(س - ١) = ٨١ هى ....

(أ) {٧} (ب) {٥} (جـ) {٤} (د) {٣}

(١٠) إذا كان د(س) = $٢^{س}$ فإن مجموعة حل المعادلة د(٢س) - د(س + ١) = صفر هى ....

(أ) {٠} (ب) {٠ ، ١} (جـ) {١} (د) {-١}

(١١) إذا كانت د(س) = $٢^{س}$ فإن قيمة س التى تحقق المعادلة د(س + ١) - د(س - ١) = ٢٤ هى ....

(أ) ٤ (ب) ٢ (جـ) ٨ (د) صفر

(١٢) إذا كانت د(س) = $٢^{س}$ فإن قيمة س التى تحقق العلاقة د(٢س) - ٢٤ د(س - ١) - د(٢) = ٠ هى ....

(أ) ٢ ، $\frac{١}{٢}$ (ب) ٢ ، صفر (جـ) ٢ (د) ٢ ، -١

(١٣) 📖 تكون الدالة الأسية التى أساسها أ تزايدية إذا كانت ....

(أ) أ > ٠ (ب) أ > ١ (جـ) ٠ < أ < ١ (د) أ = ١

(١٤) 📖 تكون الدالة الأسية التى أساسها أ تناقصية إذا كانت ....

(أ) أ > ٠ (ب) أ < ٠ (جـ) ٠ < أ < ١ (د) -١ < أ < ٠

(١٥) مدى الدالة د : د(س) = $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س}$ هو ....

(أ)]-∞ ، ∞[(ب)]-∞ ، ٠[(جـ)]٠ ، ∞[(د)]١ ، ∞[

(١٦) إذا كانت د(س) = $٢^{-س}$ فإن : د(س) تكون تناقصية عند س ∈ ....

(أ) ح (ب) $ح^{+}$ (جـ) $ح^{-}$ (د) ∅

(١٧) أى من الدوال الآتية تكون متزايدة على مجالها ؟

(أ) د(س) = $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س}$ (ب) د(س) = $٣^{-س}$

(جـ) د(س) = $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{س}$ (د) د(س) = $٥^{س}$

(١٨) إذا كان : ن(س) = $\left(\frac{-١}{٢}\right)^{س+١}$ فإنها تعبر عن ....

(أ) دالة أسية أساسها $\left(\frac{-١}{٢}\right)$ (ب) دالة أسية أسها (س + ١)

(جـ) ليست دالة أسية لأن الأساس < ٠ (د) (أ) ، (ب) معًا.

(١٩) إذا كانت د(س) = $٢^{س+١}$ وكانت النقطة (أ ، $\frac{١}{٢}$) ∈ بيان د فإن : أ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) -١ (جـ) ٢ (د) -٢

(٢٠) إذا كانت : $ص_{١} = ٢^{س}$ ، $ص_{٢} = ٣^{س}$ ، $ص_{٣} = ٤^{س}$ حيث س < ٠ .

فإن : ....

(أ) $ص_{١} > ص_{٢} > ص_{٣}$ (ب) $ص_{٣} > ص_{٢} > ص_{١}$

(جـ) $ص_{٢} > ص_{٣} > ص_{١}$ (د) $ص_{٢} > ص_{١} > ص_{٣}$

(٢١) إذا كان : $د(س) = ١^{س}$ فإن ....

(أ) $د(س + ص) = د(س) + د(ص)$ (ب) $د(س - ص) = د(س) - د(ص)$

(جـ) $د(س + ص) = د(س) . د(ص)$ (د) $د(س ص) = د(س) . د(ص)$

(٢٢) إذا تحرك منحنى الدالة د : $د(س) = ٢^{س}$ وحدة واحدة لليسار فإن الدالة الجديدة هي ر : $ر(س) =$ ....

(أ) $٢^{س + ١}$ (ب) $٢^{س - ١}$ (جـ) $-٢^{س}$ (د) $-٢^{١ - س}$

(٢٣) منحنى الدالة د : $د(س) = ٣^{س}$ هو صورة منحنى الدالة ر : $ر(س) = -٣^{س}$ بالانعكاس في ....

(أ) ص = ٠ (ب) س = ٠ (جـ) ص = س (د) ص = − س

(٢٤) معادلة محور التماثل لمنحنى الدالتين د ، ر حيث $د(س) = ٢^{س}$ ، $ر(س) = \left(\frac{١}{٢}\right)^{س}$ هي ....

(أ) ص = ٠ (ب) س = ٠ (جـ) ص = س (د) ص = − س

(٢٥) منحنى الدالة د : $د(س) = ٥^{س}$ يقطع محور الصادات في النقطة ....

(أ) (١ ، ٠) (ب) (٠ ، ١) (جـ) (٥ ، ١) (د) (١ ، ٥)

(٢٦) منحنى الدالة د : $د(س) = ٢^{س + ٢}$ يقطع محور الصادات في النقطة ....

(أ) (٠ ، ١) (ب) (٠ ، ٢) (جـ) (٠ ، ٤) (د) (٠ ، ٨)

(٢٧) المستقيم ص = ٩ يقطع منحنى الدالة د : $د(س) = ٣^{س}$ في النقطة ....

(أ) (٠ ، ١) (ب) (٢ ، ٠) (جـ) (٢ ، ٩) (د) (١ ، ٩)

(٢٨) إذا كانت النقطة (أ ، ب) حيث أ ≠ ٠ تقع على منحنى الدالة $ص = ٢^{س}$ فأي من النقط الآتية تقع على منحنى الدالة $ص = \left(\frac{١}{٢}\right)^{س}$ ؟

(أ) (أ ، ب) (ب) (−أ ، ب) (جـ) (أ ، −ب) (د) (أ ، $\frac{١}{٢}$ ب)

(٢٩) إذا كانت النقطة (أ ، ب) تقع على منحنى الدالة : $ص = ٢^{س}$ فأي النقط الآتية تقع على منحنى الدالة $ص = ٢^{س + ٣}$ ؟

(أ) (أ ، ب) (ب) (أ + ٣ ، ب) (جـ) (أ ، ب + ٣) (د) (أ ، ٨ ب)

(٣٠) الدالة الأسية د حيث $د(س) = ١^{-س}$ ، أ > ١ يقترب خطها البياني من ....

(أ) محور السينات (الاتجاه الموجب) (ب) محور السينات (الاتجاه السالب)

(جـ) محور الصادات (الاتجاه الموجب) (د) محور الصادات (الاتجاه السالب)

(٣١) في الدالة الأسية د : $د(س) = ١^{س}$ ، أ > ١ تكون $د(س) > ١$ عندما س ∈ ....

(أ) ح (ب) $ح^{+}$ (جـ) $ح^{-}$ (د) ص

(٣٢) أي من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية تمثل دالة نماء أسي ؟

(أ) $د(س) = ٢^{-س}$ (ب) $د(س) = \left(\frac{١}{٢}\right)^{س}$

(جـ) $د(س) = ٣^{س}$ (د) $د(س) = \left(\frac{٢}{٣}\right)^{س}$

(٣٣) أي من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية تمثل دالة تضاؤل أسي ؟

(أ) $د(س) = ٢^{س}$ (ب) $د(س) = \left(\frac{١}{٢}\right)^{-س}$

(جـ) $د(س) = ٣^{س}$ (د) $د(س) = \left(\frac{٢}{٣}\right)^{س}$

(٣٤) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة $ص = ١^{س}$

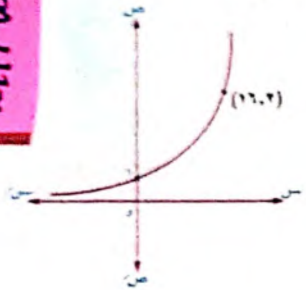
فإن : أ = ...

(أ) ٢

(ب) ٣

(جـ) ٤

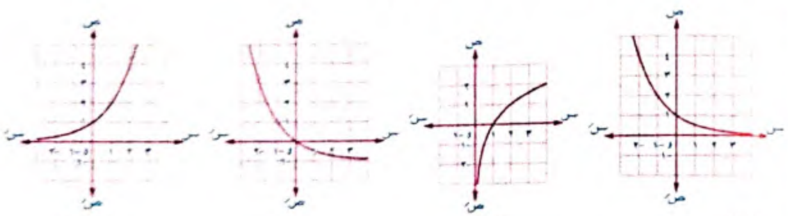
(د) ٩



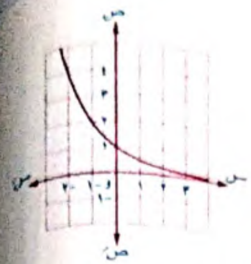
(٣٥) في الدالة الأسية ر حيث $ر(س) = ١^{س}$ ، ٠ < أ < ١ تكون ٠ < $١^{س}$ < ١ عندما س ∈ ....

(أ)]٠ ، ∞[(ب)]−∞ ، ٠[(جـ)]١ ، ∞[(د)]−∞ ، ١[

(٣٦) الدالة د حيث $د(س) = ٢^{-س}$ يمثلها الشكل البياني ....



(أ) (ب) (جـ) (د)



(٣٧) الشكل المقابل يمثل الدالة د حيث ....

(أ) $د(س) = ٢^{س+١}$

(ب) $د(س) = ٢^{-س}$

(جـ) $د(س) = ٣^{-س}$

(د) $د(س) = ٢^{س}$

✤ (٣٨) جملة مبلغ ٥٠٠٠ جنيه موضوع في بنك يعطى فائدة مركبة سنوية قدرها ٥٪ لمدة ٧ سنوات ≃ .... جنيه.

(أ) ٦٧٥٠ (ب) ٧٠٣٥,٥ (جـ) ٥٣٥٠ (د) ٨٥٠٠

✤ (٣٩) اشترى جلال سيارة بمبلغ ٢٠٠٠٠٠ جنيه فإذا كان سعر السيارة يتناقص بمعدل ٠,٤ ٪ كل سنة ، أي الدوال الآتية يعبر عن سعر السيارة بعد ن سنة ؟

(أ) $ص = ٢٠٠٠٠٠ \times (٠,٤)^{ن}$ (ب) $ص = ٢٠٠٠٠٠ (٠,٩٩٦)^{ن}$

(جـ) $ص = ٢٠٠٠٠٠ \times (١,٤)^{ن}$ (د) $ص = ٢٠٠٠٠٠ (٠,٢)^{ن}$

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ بين أيًا من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية دالة أسية ، ثم اكتب أسها وأساسها :

① $د(س) = ٢ س^{٢}$ ② $د(س) = \frac{٢}{٣}(٥)^{س}$ ③ $د(س) = \frac{١}{س-١}$

④ $د(س) = ٣ س^{٢} - ١$ ⑤ $د(س) = \left(\frac{٢}{٣}\right)^{س-١}$ ⑥ $د(س) = (-٧)^{س}$

٢ إذا كانت : $د(س) = ٥^{س}$ فأوجد قيمة : $\frac{د(س+٤) - د(س+٢)}{د(س+٥) - د(س+٤)}$ «$\frac{١}{٥}$»

٣ إذا كانت : $د(س) = ٧^{س+١}$ فأوجد قيمة س التي تحقق : $د(٢س-١) + د(س-٢) = ٥٠$ «١»

٤ إذا كانت : $د_١(س) = ٣^{-س}$ ، $د_٢(س) = ٩^{س}$ فأوجد قيمة س التي تحقق : $د_١(٢س-١) + د_٢(س+١) = ٧٥٦$ «٢»

٥ إذا كانت د : ح ← ح$^{+}$ حيث $د(س) = ص^{س}$ فأثبت أن : $\frac{د(س+١) + د(س+٢)}{د(س+١) + د(س)} = ص$

٦ إذا كانت : $د(س) = ٢^{-س}$ فأثبت أن : $\frac{د(٢س+٢) + د(٢س-١)}{٥ د(٢س) - ٧ د(٢س-١)} = \frac{٧}{٢}$

٧ إذا كانت : $د(س) = ٣^{٢س-١}$ فأثبت أن : $\frac{د(س+١) \times د(س+٢)}{د(س+٢)} = د(س)$

٨ إذا كانت : $د(س) = ٢^{س}$ فأثبت أن : $\frac{د(س+١)}{د(س-١)} + \frac{د(س-١)}{د(س+١)} = \frac{١٧}{٤}$

٩ إذا كانت : $د(س) = ٧^{س}$

أوجد قيمة س إذا كان : $د(٢س-١) + د(٢س+١) = \frac{٥٠}{٤٩}$ «$-\frac{١}{٢}$»

١٠ إذا كانت : $د(س) = ٢^{س}$ ، $\frac{د(س+١) - د(س)}{د(س) - د(س-١)} = د(س-٢)$ فأوجد قيمة : س «٣»

١١ إذا كانت : $د(س) = ٣^{-س}$ فأوجد مجموعة حل المعادلة : $\frac{د(٢س+١)}{د(س-١)} = ٧٢٩$ «{-٨}»

١٢ إذا كانت : $د(س) = ٣^{س-١}$

فأوجد قيمة س التي تحقق : $د(س+٢) + د(٤-س) = ٣٠$ «١ ، ٢»

١٣ إذا كانت : $د(س) = ٢^{س}$

فأوجد مجموعة حل المعادلة : $د(٢س) - ٦ د(س) + د(٣) = ٠$ «{١ ، ٢}»

١٤ إذا كانت : $د(س) = ٣^{س}$

أوجد مجموعة حل المعادلة : $د(س) + د\left(\frac{س}{٢}\right) = ١٢$ «{٢}»

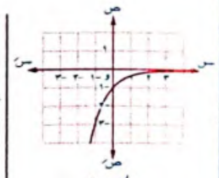
١٥ إذا كانت : $د(س-٢) = ٢^{س}$

أوجد قيمة س التي تحقق أن : $د(٣س+١) - د(٣س-١) = ٢٤$ «صفر»

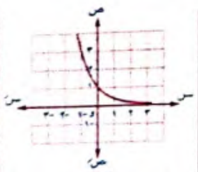
١٦ اختر الشكل البياني المناسب لكل من قواعد الدوال الآتية :

① $ص = ٢^{س}$ ② $ص = ٢^{-س}$ ③ $ص = -٢^{س}$ ④ $ص = -٢^{-س}$

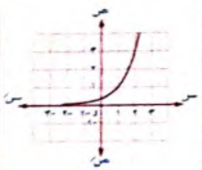
⑤ $ص = ٢^{س} - ١$ ⑥ $ص = ٢^{س-١}$ ⑦ $ص = ٢^{١-س}$ ⑧ $ص = ١ - ٢^{س}$



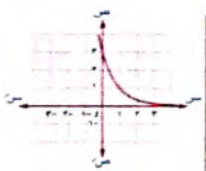
شكل(١)



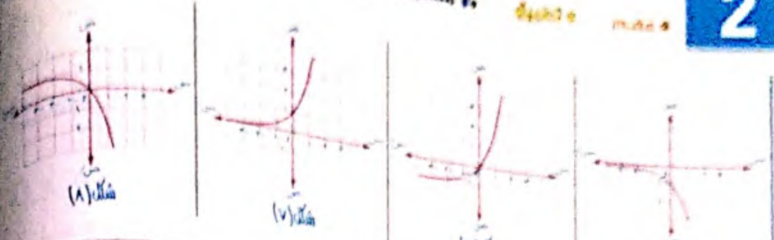
شكل(٢)



شكل(٣)



شكل(٤)



شكل (٥) شكل (٦) شكل (٧) شكل (٨)

١٧ مثل الدالة د فى كل مما يأتى بيانيًا ، ثم أوجد المجال والمدى لكل منها ، وبين أيًا منها تزايدية وأيًا منها تناقصية :

① د (س) = $٢^{س}$
② د (س) = $(\frac{١}{٢})^{س}$
③ د (س) = $-٣ (٢)^{س}$
④ د (س) = $٢^{س+١} + ١$
⑤ د (س) = $(\frac{١}{٢})^{س+٢} - ٢$
⑥ د (س) = $٢ (\frac{٢}{٣})^{س-١} + ١$
⑦ د (س) = $-(\frac{١}{٢})^{٢س} + \frac{٣}{٤}$

١٨ أوجد بيانيًا فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

① $٢^{س+٢} = ٤$
② $٢^{س} = ٨$
③ $٢^{س} = ٤ - س$
④ $٣^{س-٢} = ٣ - س$
⑤ $٢^{١-س} = س + ٥$
⑥ $٤^{س+١} = ٤ - س$
⑦ $٢^{س} = ٢ س$
⑧ $٢^{س} = ٣^{س+١}$
⑨ $٢^{س+١} = ٣^{١} - س$

١٩ إذا كانت د : ح ⟵ ح⁺ حيث د (س) = $٣^{س-١}$ ، فارسم منحنى الدالة لكل س ∈ [-٢ ، ٢]

ومن الرسم أوجد :

① د $(\frac{٣}{٢})$
② قيمة س عندما $٣^{س-١} = ٧\frac{١}{٢}$

«١,٧٠ ، ٢,٨»

٢٠ مثل بيانيًا الدالة د : د (س) = { $١ - س^{٢}$ ، عندما س ≤ ٠ ; $(\frac{١}{٢})^{س}$ ، عندما س > ٠ }

ومن الرسم استنتج مجال ومدى الدالة وابحث اطرادها.

٢١ ارسم منحنى الدالة د : د (س) = $٢^{|س|}$ ومن الرسم استنتج مدى الدالة واطرادها ونوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك.

٢٢ ارسم منحنى الدالة د : د (س) = $(\frac{١}{٢})^{|س|}$ ومن الرسم استنتج مدى الدالة واطرادها ونوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك.

٢٣ إذا كانت : د (س) = $ه^{س}$ وكان د (١ + لوس) + د (-١ + لوس) = ٢٦

أوجد قيم س الحقيقية.

٢٤ تفكير إبداعى : إذا كانت د (س) = $٢^{س}$

فاثبت أن : المقدار $\frac{١}{د(س) + ١} + \frac{١}{د(-س) + ١}$ له قيمة ثابتة مهما كانت قيمة س

تطبيقات على النمو والتضاؤل الأسى

٢٥ الربط بالادخار : أودع زياد مبلغ ٨٠٠٠٠ جنيه فى أحد البنوك بفائدة سنوية ١٠,٥٪ ، كم يصبح جملة رصيده بالجنيه بعد ١٠ سنوات ؟

«٢١٧١٣٦٠ جنيه»

٢٦ الربط بالسكان : إذا كان عدد سكان إحدى الدول فى نهاية عام ٢٠٠٠ هو ٤٣,٣ مليون نسمة وكان معدل الزيادة السكانية فى السنة يساوى ١,٥ ٪

① أوجد صيغة تمثل عدد سكان هذه الدولة بعد مرور ن سنة من عام ٢٠٠٠

② استخدم هذه الصيغة لإيجاد عدد السكان المتوقع لهذه الدولة عام ٢٠٢٠

«٥٨,٣٠ مليون نسمة»

٢٧ الربط بالرياضة : يتناقص عدد المشجعين لإحدى فرق كرة القدم بمعدل ٤٪ نتيجة خسارتها فى إحدى الدورات الرياضية، فإذا كان عدد المشجعين فى أول مباراة ٣٦٤٠٠ فاكتب دالة أسية تمثل عدد الحضور (ص) فى المباراة (ن) ، ثم قدر عدد المشجعين فى المباراة العاشرة.

«٢٤٢٠٠ مشجع»

٢٨ الربط بالاستثمار : بلغ عدد الأبقار فى إحدى مزارع الماشية ٨٠ بقرة ، فإذا كان معدل التكاثر لهذه الأبقار يبلغ ١٨٪ سنويًا تقريبًا ، فأوجد عدد الأبقار فى المزرعة بعد ٤ سنوات.

«١٥٥ بقرة»

٢٩ الربط بالسكان : بلغ تعداد سكان إحدى المحافظات فى جمهورية مصر العربية ٤,٦ مليون نسمة بمتوسط زيادة ٤٪ سنويًا.

① اكتب دالة أسية تمثل النمو المستقبلى بعد ن سنة.

② قدر عدد سكان هذه المحافظة بعد مرور ٥ سنوات من وقت التعداد.

«٥,٦٠ مليون نسمة»

٣٠ الربط بالصناعة : يتناقص إنتاج منجم ذهب سنويًا بمقدار ٥٪ فإذا كان إنتاج المنجم فى السنة الأولى حوالى ٢٥٤ كجم قدر إنتاج المنجم فى السنة التاسعة.

«١٦٠ كجم»

٣١ الربط بالأحياء : إذا كانت كمية البكتيريا الموجودة فى وقت ما ٢٠٠٠ بكتيريا وكانت البكتيريا تتزايد بمعدل ٧٪ فى الساعة. أوجد كمية البكتيريا الموجودة بعد مرور ١١ ساعة.

«٤٢١٠ بكتيريا»

(٢٣) أودع رجل مبلغ ١٠٠٠٠ جنيه في أحد البنوك التي تعطي فائدة سنوية مركبة قدرها ٨٪ أوجد جملة المبلغ بعد مرور عشرة أعوام في كل من الحالات الآتية :

(١) العائد سنوي. (٢) العائد ربع سنوي.

(٣) العائد شهري.

«٢١٥٨٩,٢٥ ، ٢١٠٧٩٤,٦٢ ، ٢١١٠٤,٠٢ ، ٢١١٠٩٨,٢ جنيه»

ثالثاً مسائل تقيس مهارات التفكير

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) الدالة د : د (س) = (٢ أ)^{س} تكون متناقصة عندما أ ∈ ....

(أ)]٠ ، ١[(ب)]١ ، ∞[(جـ)]٠ ، ٢[(د)]٠ ، $\frac{١}{٢}$[

(٢) إذا كانت الدالة د : د (س) = $\left(\frac{أ}{٢}\right)^{س}$ دالة أسية تزايدية فإن ....

(أ) أ > ٠ (ب) أ > ١ (جـ) أ > ٢ (د) أ < ٢

(٣) إذا كانت د : د (س) = (أ − ٢)^{س} دالة أسية فإن ....

(أ) أ ∈ ح$^{+}$ − {٢} (ب) أ > ٢

(جـ) أ < ٢ (د) أ ∈]٢ ، ∞[− {٣}

(٤) أي المنحنيات الآتية يقطع محور السينات ؟

(أ) د (س) = $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س}$ (ب) د (س) = ٢^{س} + ٢

(جـ) د (س) = ٢^{س} − ١ (د) د (س) = ٢$^{س-١}$

(٥) إذا قطع المستقيم ص = ٨ المنحنيين : ص = ٢^{س} ، ص = $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س}$ في النقطتين أ ، ب على الترتيب

فإن : طول $\overline{أب}$ = ... وحدات طول.

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٦

(٦) إذا انعكس منحنى الدالة د : د (س) = ٢^{س} حول محور الصادات ثم أُزيح ٥ وحدات لأعلى

فإن الدالة الجديدة هي ر : ر (س) = ...

(أ) ٥ + ٢$^{-س}$ (ب) −٢^{س} + ٥ (جـ) ٢^{س} − ٥ (د) ٢$^{-س}$ − ٥

(٧) إذا كانت : د (س) = $\frac{٩^{س}}{٩^{س} + ٣}$ فإن : د (س) + د (١ − س) = ...

(أ) $\frac{٣}{٩^{س} + ٣}$ (ب) $\frac{٩^{س} + ٣}{٣}$ (جـ) $\frac{١}{٣}$ (د) ١

(٨) إذا كانت : د (س) = $\frac{٤^{س}}{٤^{س} + ٢}$ فإن : د $\left(\frac{١}{١١}\right)$ + د $\left(\frac{٢}{١١}\right)$ + د $\left(\frac{٣}{١١}\right)$ + ... + د $\left(\frac{١٠}{١١}\right)$ = ...

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) $\frac{٦}{١١}$ (د) ١٠

الدرس 3

الدالة العكسية

الدالة العكسية

• إذا كانت د دالة أحادية مجالها س ومداها ص فإن كل عنصر ص في المدى يناظره عنصر وحيد س في المجال ولذلك يمكن تعيين دالة عكسية من ص إلى س ويرمز لها بالرمز د$^{-١}$ بحيث : د$^{-١}$ (ص) = س

أي أنه إذا كان لكل (س ، ص) ∈ بيان د

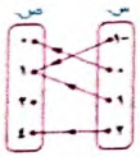
فإن : (ص ، س) ∈ بيان د$^{-١}$

، ص هي مدى د ومجال د$^{-١}$ ، س هي مجال د ومدى د$^{-١}$

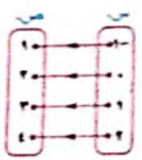
مثال ①

بين أيًا من الدالتين الممثلتين بالمخططين السهميين المقابلين لها دالة عكسية

واكتب بيان د ، د$^{-١}$ إن وجدت :



١



٢

الحل

(١) لا يمكن إيجاد الدالة العكسية د$^{-١}$ للدالة د لأن الدالة د ليست أحادية

بيان د = {(−١ ، ١) ، (٠ ، ٠) ، (١ ، ١) ، (٢ ، ٤)}

لاحظ : ارتباط العنصرين −١ ، ١ في س بنفس العنصر ١ في ص فإذا عكسنا الدالة فإنها تصبح علاقة بيانها = {(١ ، −١) ، (٠ ، ٠) ، (١ ، ١) ، (٤ ، ٢)} وهي ليست دالة لأن العنصر ١ أصبح له صورتان هما −١ ، ١ ولذلك يجب أن تكون الدالة أحادية لكي نتمكن من إيجاد دالتها العكسية.

٢ يمكن إيجاد الدالة العكسية $د^{-1}$ للدالة د لأن الدالة د أحادية ولكل (س ، ص) ∈ بيان د يوجد (ص ، س) ∈ بيان $د^{-1}$

بيان د = {(-١ ، ١) ، (٠ ، ٢) ، (١ ، ٣) ، (٢ ، ٤)}

بيان $د^{-1}$ = {(١ ، -١) ، (٢ ، ٠) ، (٣ ، ١) ، (٤ ، ٢)}

مثال 2

إذا كانت الدالة د معرفة من المجموعة س = {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥} إلى المجموعة ص = {٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧}

وكانت : د (س) = س + ٢

١ أوجد بيان $د^{-1}$ ٢ استنتج قاعدة الدالة $د^{-1}$

الحل

١ ∵ د (٢) = ٢ + ٢ = ٤ ، د (٣) = ٣ + ٢ = ٥ ، د (٤) = ٤ + ٢ = ٦ ، د (٥) = ٥ + ٢ = ٧

∴ بيان د = {(٢ ، ٤) ، (٣ ، ٥) ، (٤ ، ٦) ، (٥ ، ٧)}

∴ د دالة أحادية ، مدى د = ص

∴ بيان $د^{-1}$ = {(٤ ، ٢) ، (٥ ، ٣) ، (٦ ، ٤) ، (٧ ، ٥)}

٢ بملاحظة الأزواج المرتبة في بيان $د^{-1}$

نجد أن الإحداثي الصادي يقل عن الإحداثي السيني بمقدار ٢

أي أن : ص = س - ٢   ∴ $د^{-1}$ (س) = س - ٢

ملاحظة هامة

يمكن إيجاد قاعدة $د^{-1}$ مباشرةً بتبديل المتغيرين س ، ص ثم إيجاد ص بدلالة س

في المثال السابق :

∵ د (س) = س + ٢ أي أن : ص = س + ٢ وبتبديل المتغيرين س ، ص

∴ س = ص + ٢ ومنها ص = س - ٢   ∴ $د^{-1}$ (س) = س - ٢

مثال 3

أوجد الدالة العكسية للدالة د : د (س) = ٣س - ٢ ومثل الدالة ومعكوسها بيانيًا في شكل واحد.

الحل

• لإيجاد الدالة العكسية نقوم بتبديل المتغيرين ثم نوجد ص بدلالة س

∵ ص = ٣س - ٢

وبتبديل المتغيرين   ∴ س = ٣ص - ٢

نوجد ص بدلالة س   ∴ ٣ص = س + ٢

∴ ص = $\frac{1}{3}$ (س + ٢)   ∴ $د^{-1}$ (س) = $\frac{1}{3}$ (س + ٢)

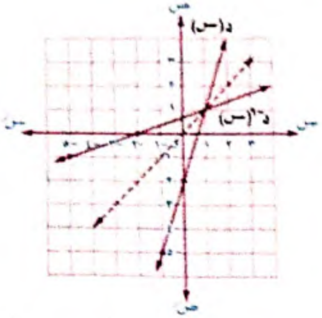
التمثيل البياني :

• د (س) = ٣س - ٢

س	١	٠	-١
د (س)	١	-٢	-٥

• $د^{-1}$ (س) = $\frac{1}{3}$ (س + ٢)

س	١	-٢	-٥
$د^{-1}$ (س)	١	٠	-١



ملاحظتان

١ لاحظ أن : $د^{-1}$ (س) ≠ $\frac{1}{د (س)}$ ففي المثال السابق

$د^{-1}$ (س) = $\frac{1}{3}$ (س + ٢) بينما $\frac{1}{د (س)}$ = $\frac{1}{٣س - ٢}$

٢ في المثال السابق نلاحظ أن الدالة د والدالة العكسية لها $د^{-1}$ متماثلتان بالنسبة للمستقيم ص = س وبصفة عامة لأي دالة د إذا أمكن إيجاد دالتها العكسية $د^{-1}$

فإن الدالتين د ، $د^{-1}$ تكونان متماثلتين بالنسبة للمستقيم ص = س

أي أن : د ، $د^{-1}$ كل منهما صورة للأخرى بالانعكاس في المستقيم ص = س

خواص الدالة العكسية

من خواص الدالة العكسية :

١ يقال إن د ، ر كل منهما دالة عكسية للأخرى إذا كان (د ∘ ر) (س) = س ، (ر ∘ د) (س) = س

٢ مجال الدالة د = مدى الدالة العكسية $د^{-1}$ ، مدى الدالة د = مجال الدالة العكسية $د^{-1}$

مثال ④

حقق أن كلًا من : د ، ر حيث د (س) = ٤ س + ٩ ، ر (س) = $\frac{\text{س} - ٩}{٤}$ دالة عكسية للأخرى.

الحل

∵ (د ∘ ر) (س) = د (ر (س)) = د $\left(\frac{\text{س} - ٩}{٤}\right)$ = ٤ $\left(\frac{\text{س} - ٩}{٤}\right)$ + ٩ = (س − ٩) + ٩ = س

، (ر ∘ د) (س) = ر (د (س)) = ر (٤ س + ٩) = $\frac{٤\text{س} + ٩ - ٩}{٤}$ = $\frac{٤\text{س}}{٤}$ = س

∴ د ، ر كل منهما دالة عكسية للأخرى.

مثال ⑤

أوجد المجال الذى يكون فيه للدالة د : د (س) = $\text{س}^{٢}$ دالة عكسية ، وأوجد هذه الدالة العكسية.

الحل

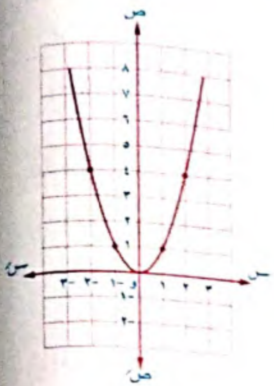
• إذا كانت س ∈ ح

فإن الدالة د : د (س) = $\text{س}^{٢}$ ليست أحادية

(لا تحقق شرط الخط الأفقى)

لذلك ليس لها دالة عكسية

فى المجال ح



• إذا كانت س ∈ [٠ ، ∞[فإن الدالة د : د (س) = $\text{س}^{٢}$

تكون أحادية ويكون لها فى هذه الحالة دالة عكسية.

∵ ص = $\text{س}^{٢}$ حيث س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠

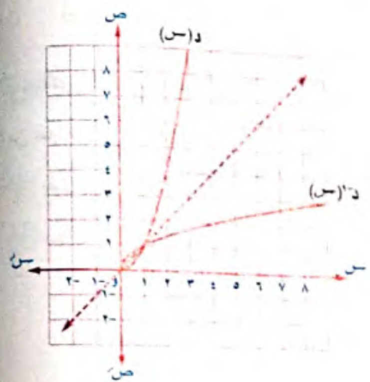
وبتبديل المتغيرين

∴ س = $\text{ص}^{٢}$

∴ ص = $\sqrt{\text{س}}$

حيث ص ≥ ٠ ، س ≥ ٠

∴ $\text{د}^{-١}$ (س) = $\sqrt{\text{س}}$



• إذا كانت س ∈]−∞ ، ٠] فإن الدالة د : د (س) = $\text{س}^{٢}$

تكون أحادية ويكون لها فى هذه الحالة دالة عكسية.

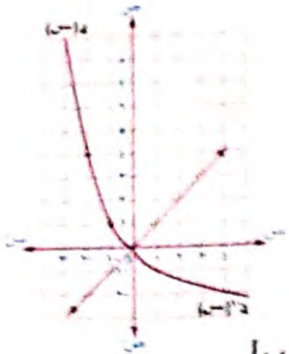
∴ ص = $\text{س}^{٢}$ حيث س ≤ ٠ ، ص ≥ ٠

وبتبديل المتغيرين

∴ س = $\text{ص}^{٢}$ حيث س ≥ ٠ ، ص ≤ ٠

∴ ص = − $\sqrt{\text{س}}$ حيث س ≥ ٠ ، ص ≤ ٠

∴ $\text{د}^{-١}$ (س) = − $\sqrt{\text{س}}$



∴ المجال الذى يكون فيه للدالة د دالة عكسية = [٠ ، ∞[أو]−∞ ، ٠]

مثال ⑥

إذا كانت : د (س) = $\frac{١}{\text{س} - ٢}$ + ٣ فأوجد :

١ مجال ومدى الدالة د

٢ $\text{د}^{-١}$ (س) وعين مجال ومدى الدالة $\text{د}^{-١}$

الحل

١ مجال د = ح − {٢} ومدى د = ح − {٣}

٢ ∵ ص = $\frac{١}{\text{س} - ٢}$ + ٣ بتبديل المتغيرين

∴ س = $\frac{١}{\text{ص} - ٢}$ + ٣

∴ $\frac{١}{\text{ص} - ٢}$ = س − ٣

∴ ص − ٢ = $\frac{١}{\text{س} - ٣}$

∴ ص = $\frac{١}{\text{س} - ٣}$ + ٢

∴ $\text{د}^{-١}$ (س) = $\frac{١}{\text{س} - ٣}$ + ٢

∴ مجال $\text{د}^{-١}$ = ح − {٣} ومدى $\text{د}^{-١}$ = ح − {٢}

لاحظ أن : مجال الدالة $\text{د}^{-١}$ = مدى الدالة د

مثال ⑦

إذا كانت د دالة حيث د (س) = ٢ + $\sqrt{\text{س} - ٢}$ فأوجد :

١ مجال ومدى الدالة د

٢ $\text{د}^{-١}$ (س) وعين مجال ومدى الدالة $\text{د}^{-١}$

الحل

١ ∵ د (س) معرفة لجميع قيم س − ٢ ≥ ٠

∴ س ≥ ٢

∴ مجال د = [٢ ، ∞[

، ∵ لكل س ≥ ٢ يكون ٢ + $\sqrt{\text{س} - ٢}$ ≥ ٢

∴ ص ≥ ٢

∴ مدى الدالة د = [٢ ، ∞[

٢ ∵ ص = ٢ + $\sqrt{\text{س} - ٢}$ حيث س ≥ ٢ ، ص ≥ ٢ وبتبديل المتغيرين

∴ س = ٢ + $\sqrt{\text{ص} - ٢}$ حيث ص ≥ ٢ ، س ≥ ٢   ∴ $(\text{س} - ٢)^{٢}$ = ص − ٢

∴ س − ٢ = $\sqrt{\text{ص} - ٢}$

∴ ص = $(\text{س} - ٢)^{٢}$ + ٣

∴ $\text{د}^{-١}$ (س) = $(\text{س} - ٢)^{٢}$ + ٣ حيث س ≥ ٢ ، ص ≥ ٣

، مجال $\text{د}^{-١}$ = مدى د = [٢ ، ∞[، مدى $\text{د}^{-١}$ = مجال د = [٣ ، ∞[

مثال ٨

أوجد الدالة العكسية للدالة د حيث د (س) = $(\text{س} - ٢)^{٢}$ + ٣ ، س ≤ ٢ موضحًا مجال $\text{د}^{-١}$

الحل

∵ ص = $(\text{س} - ٢)^{٢}$ + ٣ ، س ≤ ٢

، ∵ لكل س ≤ ٢ يكون $(\text{س} - ٢)^{٢}$ + ٣ ≥ ٣   ∴ ص ≥ ٣

بتبديل المتغيرين

∴ س = $(\text{ص} - ٢)^{٢}$ + ٣ ، ص ≤ ٢ ، س ≥ ٣   ∴ $(\text{ص} - ٢)^{٢}$ = س − ٣

، وبأخذ الجذر التربيعي للطرفين   ∴ ص − ٢ = ± $\sqrt{\text{س} - ٣}$

، ∵ ص ≤ ٢

∴ ص − ٢ = − $\sqrt{\text{س} - ٣}$ ∴ ص = − $\sqrt{\text{س} - ٣}$ + ٢

∴ $\text{د}^{-١}$ (س) = − $\sqrt{\text{س} - ٣}$ + ٢ حيث س ≥ ٣ ، ص ≤ ٢   ∴ مجال $\text{د}^{-١}$ = [٣ ، ∞[

مثال ٩

إذا كانت د : ح^{+} ⟵ ح حيث د (س) = $\frac{١}{\text{س}^{٢} + ١}$ أوجد $\text{د}^{-١}$ (س) وعين مجال ومدى $\text{د}^{-١}$

الحل

∵ ص = $\frac{١}{\text{س}^{٢} + ١}$ ، س ∈ ح^{+} ولكل س > ٠ يكون ٠ < ص < ١

وبتبديل المتغيرين

∴ س = $\frac{١}{\text{ص}^{٢} + ١}$ ، ص > ٠ ، ٠ < س < ١

∴ $\text{ص}^{٢}$ + ١ = $\frac{١}{\text{س}}$ ∴ $\text{ص}^{٢}$ = $\frac{١}{\text{س}}$ − ١

، ∵ ص > ٠   ∴ ص = $\sqrt{\frac{١}{\text{س}} - ١}$

∴ $\text{د}^{-١}$ (س) = $\sqrt{\frac{١}{\text{س}} - ١}$ حيث ص > ٠ ، ٠ < س < ١

∴ مجال $\text{د}^{-١}$ =]٠ ، ١[ومدى $\text{د}^{-١}$ = ح^{+}

ملاحظة

الدوال المتماثلة حول المستقيم ص = س دالتها العكسية هي نفسها ومنها

١ الدوال الخطية على الصورة د : د (س) = − س + ب

مثل د : د (س) = − س + ١ ، د : د (س) = $\frac{١}{٢}$ − س ، ...

٢ الدوال الكسرية على الصورة د : د (س) = $\frac{أ}{\text{س} - \text{ك}}$ + ك حيث ك ∈ ح

مثل د : د (س) = $\frac{١}{\text{س} - ٥}$ + ٥ ، د : د (س) = $\frac{-٢}{\text{س}}$ ، ...

مثال ١٠

أثبت أن الدالة د فى كل مما يأتى دالتها العكسية هى نفسها :

١ د (س) = ٢ − س   ٢ د (س) = $\frac{١}{\text{س} - ٣}$ + ٣

الحل

١ ص = ٢ − س بتبديل المتغيرين

∴ س = ٢ − ص   ∴ ص = ٢ − س

∴ $\text{د}^{-١}$ (س) = ٢ − س = د (س)

∴ د دالتها العكسية هى نفسها.

٢ ص = $\frac{١}{\text{س} - ٣}$ + ٣ بتبديل المتغيرين

∴ س = $\frac{١}{\text{ص} - ٣}$ + ٣   ∴ س − ٣ = $\frac{١}{\text{ص} - ٣}$

∴ ص − ٣ = $\frac{١}{\text{س} - ٣}$ ∴ ص = $\frac{١}{\text{س} - ٣}$ + ٣

∴ $\text{د}^{-١}$ (س) = $\frac{١}{\text{س} - ٣}$ + ٣ = د (س)

∴ د دالتها العكسية هى نفسها.

تمارين 9 على الدالة العكسية

اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسى ∴ مستويات عليا

• فهم • تطبيق

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت د دالة أحادية وكانت ر دالة حيث منحنى ر هو صورة منحنى د بالانعكاس فى المستقيم ص = س فإن : ....

(أ) ر (س) = د (س)　(ب) ر (س) = $\frac{١}{د (س)}$

(جـ) ر (س) = د$^{-١}$ (س)　(د) ر (س) = (د ∘ د) (س)

(٢) أى مما يأتى ليس له دالة عكسية ؟

(أ) ص = $\sqrt[٣]{س}$　(ب) ص = ٣ س　(جـ) ص = س^{٣}　(د) ص = س^{٢}

(٣) الدوال د ، د$^{-١}$ كل منهما صورة الأخرى بالأنعكاس فى المستقيم ....

(أ) ص = ٠　(ب) س = ٠　(جـ) ص = − س　(د) ص = س

(٤) إذا كانت : (أ ، ب) ∈ منحنى الدالة د　فإن : .... ∈ منحنى الدالة د$^{-١}$

(أ) (أ ، ب)　(ب) (أ ، − ب)　(جـ) (ب ، أ)　(د) (ب ، − أ)

(٥) إذا كانت د : دالة حيث د (٧) = ٣　فإن : د$^{-١}$ (٣) = ...

(أ) ٣　(ب) ٤　(جـ) ٧　(د) ١٠

(٦) إذا كانت الدالة د = {(١ ، ٤) ، (٢ ، −٣) ، (٣ ، ١) ، (٤ ، ٠)}

فإن : د$^{-١}$ (١) + د (٢) = ...

(أ) −١　(ب) صفر　(جـ) ١　(د) ٣

(٧) إذا كانت الدالة د$^{-١}$ حيث د$^{-١}$ = {(٢ ، ٣) ، (٥ ، ب)} هى الدالة العكسية للدالة د حيث

د = {(٤ ، ٥) ، (أ ، ٢)}　فإن : أ − ب = ...

(أ) صفر　(ب) ١　(جـ) −١　(د) ٢

(٨) إذا قطع المستقيم ص = س الدالة الأحادية د فى النقطة (٢ ، ٢) فإنه يقطع

الدالة د$^{-١}$ فى النقطة ....

(أ) (−٢ ، ٢)　(ب) (٢ ، ٢)　(جـ) (−٢ ، −٢)　(د) (٢ ، −٢)

(٩) إذا كانت د دالة حيث د (س) = س + ٢　فإن : د$^{-١}$ (س) = ...

(أ) س + ٢　(ب) − س + ٢　(جـ) س − ٢　(د) $\frac{س}{٢}$

(١٠) إذا كانت د دالة حيث د (س) = ٧ س　فإن : د$^{-١}$ (س) = ...

(أ) ٧ س　(ب) $\frac{س}{٧}$　(جـ) $\frac{٧}{س}$　(د) ٧ − س

(١١) صورة النقطة (٣ ، −١) بالانعكاس فى المستقيم ص = س هى ....

(أ) (٣ ، −١)　(ب) (−١ ، −٣)　(جـ) (−١ ، ٣)　(د) (٣ ، ١)

(١٢) إذا تقاطع منحنى الدالة د مع منحنى الدالة د$^{-١}$ فى نقطة (ك ، ٢ ك − ٣)　فإن : ك = ...

(أ) ٢　(ب) ٣　(جـ) ٤　(د) ٥

(١٣) إذا تقاطع منحنى الدالة د مع منحنى الدالة د$^{-١}$ فى نقطة (أ ، $\frac{٤}{أ}$)　فإن : أ = ...

(أ) ٢　(ب) ± ٢　(جـ) ٤　(د) ± ٤

(١٤) إذا كانت د$^{-١}$ هى الدالة العكسية للدالة د فإن : ....

(أ) مجال د$^{-١}$ = مجال د　(ب) مجال د$^{-١}$ = مدى د

(جـ) مدى د$^{-١}$ = مدى د　(د) مدى د$^{-١}$ = مجال د$^{-١}$

(١٥) إذا كانت : ص = $\sqrt[٣]{س}$ فإن الدالة العكسية لها ص = ...

(أ) $\frac{١}{٣}$ س^{٣}　(ب) س^{٣}　(جـ) س^{٣} − ١　(د) ٣ س^{٣}

(١٦) إذا كان : د (س) = س^{٣} + ٧　فإن : د$^{-١}$ (−١) = ...

(أ) ١　(ب) ٢　(جـ) −٢　(د) ٨

(١٧) إذا كانت الدالة د : د (س) = $\frac{١}{س − ٢}$ + ٢　فإن : د$^{-١}$ (س) = ...

(أ) $\frac{١}{٢ + س}$ − ٢　(ب) $\frac{١}{س − ٢}$ − ٢　(جـ) د (س)　(د) د (− س)

(١٨) إذا كانت د دالة حيث د (س) = ٢ + $\sqrt{س − ١}$ فإن مدى د$^{-١}$ هو ....

(أ) [٢ ، ∞[　(ب)]٢ ، ∞[　(جـ) [١ ، ∞[　(د)]١ ، ∞[

(١٩) إذا كانت الدالتين د ، ر حيث : د (س) = ٤ س − ١٢　،　ر (س) = أ س + ٣ كل منها عكسية للأخرى　فإن : قيمة أ = ...

(أ) −٤　(ب) $\frac{١}{٤}$　(جـ) ٤　(د) ٣

(٢٠) إذا كانت الدالة د : د (س) = ٥ س + ب هى دالة عكسية للدالة ر : ر (س) = حـ س + ٤

فإن : ب × حـ = ...

(أ) ٤　(ب) −٤　(جـ) ٢٠　(د) −٢٠

(٢١) إذا كانت : د$^{-1}$ (س) = ٢ س + ١ فإن : د (س) = ...

(أ) −٢ س − ١ (ب) $\frac{١}{٢}$ س + ١ (جـ) $\frac{١}{٢}$ س − $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{١}{٢ س}$ + ١

(٢٢) إذا كانت د : س ← ص وكان د (س) = $\frac{س + ك}{س - ١}$ وكان (٥ ، ٢) ∈ د$^{-1}$ فإن : ك = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

(٢٣) إذا كانت : د (س) = $\frac{١}{س - أ}$ + ب فإن : د$^{-1}$ (أ) + د (ب) = ...

(أ) غير معرفة (ب) أ − ب (جـ) أ + ب (د) صفر

(٢٤) إذا كانت : ٣ د (س) = ٢ س − ١ فإن : د$^{-1}$ (٠) = ...

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) ٢ (د) ٥

(٢٥) (د$^{-1}$ ∘ د) (س) = ...

(أ) س (ب) $\frac{١}{د (س)}$ (جـ) د (س) (د) د$^{-1}$ (س)

(٢٦) إذا كانت د : ح − {٢} ← ح − {١} حيث د (س) = $\frac{س + ١}{س - ٢}$ فإن : د$^{-1}$ (٤) = ...

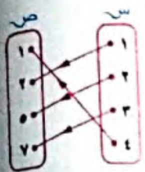
(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

(٢٧) إذا كانت : د (س) = $\frac{٢ س + ٣}{٣ س + ٥}$ فإن مجال الدالة العكسية د$^{-1}$ (س) هو ....

(أ) ح (ب) ح − {$\frac{-٥}{٣}$}

(جـ) ح − {$\frac{٢}{٣}$} (د) ح − {$\frac{-٥}{٣}$ ، $\frac{٢}{٣}$}

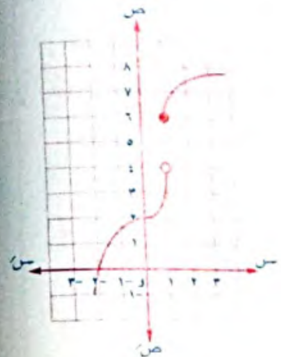
(٢٨) الشكل المقابل يمثل دالة د : س ← ص فإن : د$^{-1}$ (٢) = ...



(أ) ١ (ب) ٥

(جـ) ٤ (د) ٧

(٢٩) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د فإن : د$^{-1}$ (صفر) + د$^{-1}$ (٦) = ...



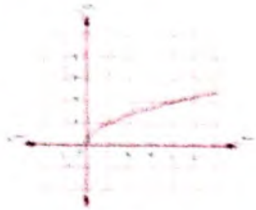
(أ) −١

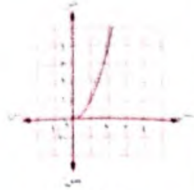
(ب) ٢

(جـ) ٥

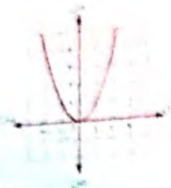
(د) ٨

(٣٠) إذا كان الشكل المقابل يمثل الدالة د : د (س) = $\sqrt{س}$ ، س ≥ ٠ ، فإن أى من الأشكال التالية يمثل منحنى الدالة د$^{-1}$ ؟



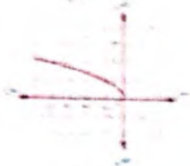


(أ)



(ب)

(جـ)



(د)

ثانيا الأسئلة المقالية

١ أوجد الدالة العكسية لكل من الدوال الآتية :

(١)

س	−٢	١	٢	٥
د (س)	٧	٤	١	−١

(٢) د = {(١ ، ٢) ، (٢ ، ٣) ، (٣ ، ٤)}

(٣) د (س) = ٢ س + ٥

(٤) د (س) = $\frac{١}{٢}$ س + ٤

(٥) د (س) = ٥ + $\frac{٤}{س}$

(٦) د (س) = ٨ س^{٣} − ١

(٧) د (س) = $\sqrt[٣]{س + ١}$

(٨) د (س) = $\sqrt[٣]{٤ - س}$

(٩) د (س) = ٢ + $\sqrt{٣ - س}$

(١٠) د (س) = س^{٢} حيث س ≤ صفر

(١١) د (س) = (س + ٢)^{٢} حيث س ≥ −٢

(١٢) د (س) = (س − ١)^{٢} + ٢ حيث س ≥ ١

(١٣) د (س) = س^{٢} + ٨ س + ٧ حيث س ≥ −٤

(١٤) د (س) = $\sqrt{٩ - س^{٢}}$ حيث −٣ ≤ س ≤ ٠

(١٥) د (س) = $\sqrt{٩ - س^{٢}}$ حيث ٠ ≤ س ≤ ٣

(١٦) د : ح$^{+}$ ← ح بحيث د (س) = $\frac{١}{س^{٢} + ٢}$

٢ أى من الدوال الآتية لها دالة عكسية :

(١) د$_{١}$ = {(١ ، ٢) ، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٥)}

(٢) د$_{٢}$ = {(−١ ، ٣) ، (٠ ، ٢) ، (١ ، ٣)}

(٣) د$_{٣}$ (س) = س^{٢} − ١ حيث س ∈ ح

(٤) د$_{٤}$ (س) = |س| حيث س ∈ ح

٣ حدد إذا كان كل من الدالتين د ، ر دالة عكسية للأخرى أم لا فى كل مما يأتى :

(١) د (س) = ٢ س − ٣ ، ر (س) = $\frac{س + ٣}{٢}$

(٢) د (س) = س^{٢} + ٤ حيث س ≥ ٠ ، ر (س) = $\sqrt{س - ٤}$

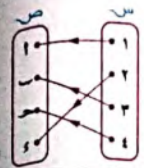
(٣) د (س) = $\frac{-٢}{س - ٥}$ ، ر (س) = $\frac{٥ س - ٢}{س}$

(٤) د (س) = $\sqrt[٣]{٤ س}$ ، ر (س) = $\frac{س^{٣}}{٤}$

٤ (١) إذا كانت : د (س) = ٥ س أوجد : د$^{-١}$ (س) ومثلهما بيانيًا.

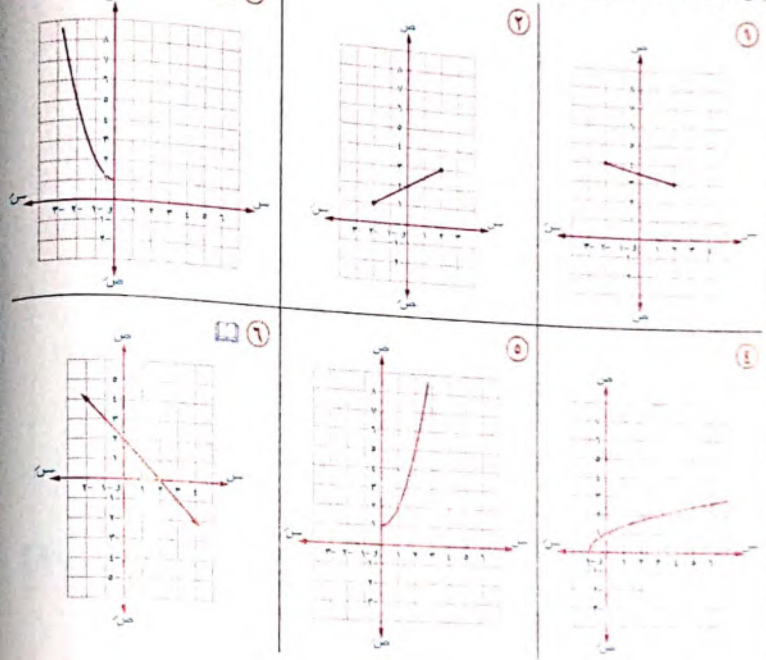
(٢) الشكل المقابل يمثل دالة د من س إلى ص

فأوجد قيمة : د$^{-١}$ (ب) + ٢ د$^{-١}$ (حـ)



٥ فى كل من الأشكال الآتية ارسم منحنى الدالة العكسية د$^{-١}$:

(١) (٢) (٣) (٤) (٥) (٦)



٦ أى من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية معكوسها هو نفس الدالة :

(١) د (س) = ٢ س | (٢) د (س) = − س | (٣) د (س) = $\frac{٢}{س}$

(٤) د (س) = ٧ − س | (٥) د (س) = $\frac{١}{س - ٢}$ + ٥ | (٦) د (س) = $\frac{١}{س - ك}$ + ك حيث ك ∈ ح

٧ اكتشف الخطأ : حاول كل من وائل ورنا إيجاد الدالة العكسية للدالة د (س) = $\frac{س - ٥}{س}$

إجابة وائل

∵ د (س) = $\frac{س - ٥}{س}$

، ∵ د$^{-١}$ (س) = $\frac{١}{د (س)}$

∴ د$^{-١}$ (س) = ١ ÷ $\frac{س - ٥}{س}$ = ١ × $\frac{س}{س - ٥}$

د$^{-١}$ (س) = $\frac{س}{س - ٥}$

إجابة رنا

∵ ص = $\frac{س - ٥}{س}$

∴ س = $\frac{ص - ٥}{ص}$ بتبديل المتغيرين

∴ ص س = ص − ٥ بالضرب التبادلى

∴ ص س − ص = −٥ ∴ ص (س − ١) = −٥

∴ د$^{-١}$ (س) = $\frac{-٥}{س - ١}$

أى من الإجابتين هى الصواب ؟ ولماذا ؟

٨ فى كل مما يأتى عين المجال الذى يكون فيه للدالة د دالة عكسية :

(١) د (س) = س^{٢} (٢) د (س) = س^{٣} (٣) د (س) = $\frac{١}{٢}$ س

٩ أوجد الدالة العكسية للدالة د حيث : د (س) = $\frac{س - ١}{س + ٥}$

١٠ إذا كانت كل من الدالتين د ، ر حيث : د (س) = ٢ س + أ

، ر (س) = ب س + ٣ دالة عكسية للأخرى. فما قيمة كل من أ ، ب ؟ ٠، −٦، $\frac{١}{٢}$

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت : د (س) = أ س + ب ، د$^{-١}$ (٩) = ٣ ، د$^{-١}$ (٥) = ٢ فإن : أ × ب = ...

(أ) −١٢ (ب) −١٠ (جـ) −٨ (د) −٧

(٢) إذا كانت : د (س) = س^{٢} ، ر (س) = س − ٣ فإن مجموعة حل المعادلة :

ر (د (س)) = ر$^{-١}$ (س) هى ....

(أ) {٢ ، −٣} (ب) {٣} (جـ) {٣ ، −٢} (د) {٢ ، ٣}

③ إذا كانت د : ح − {−١} ⟵ ح − {٢} حيث س = $\frac{د(س) + ١}{٢ - د(س)}$ فإن : $د^{-1}$ (٣) = ...

(أ) −٤ (ب) −٣ (جـ) −٢ (د) −١

④ إذا كانت د : ح − {١} ⟵ ح − {٣} حيث د (س) = $\frac{أس + ٣}{س - ب}$ فإن : $د^{-1}$ (١) = ...

(أ) −٢ (ب) صفر (جـ) ٢ (د) غير معرفة.

⑤ إذا كانت د : ح ⟵ ح حيث د (س) = $\sqrt[3]{س - ٥}$ ، ر : ح ⟵ ح حيث ر (س) = ٢ $س^{3}$ − ٧

فإن : (ر ∘ $د^{-1}$) (س) = ...

(أ) ٢ $س^{2}$ − ٣ (ب) ٢ $س^{2}$ − ٥ (جـ) ٢ $س^{3}$ + ٣ (د) ٢ $س^{3}$ + ٥

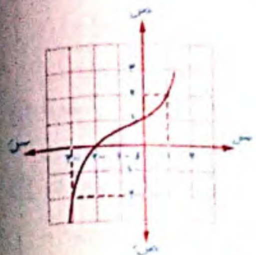
⑥ إذا كانت د : ح ⟵ ح حيث د (س) = ٢س − ٤ فإن : $د^{-1}$ (س + ٢) = ...

(أ) $\frac{س - ٢}{٢}$ (ب) $\frac{س + ٢}{٢}$ (جـ) $\frac{س + ٤}{٢}$ (د) $\frac{س + ٦}{٢}$

⑦ إذا كانت : د (س) = $س^{3}$ + ٣ $س^{2}$ + ٣س + ١ فإن : $د^{-1}$ (س) = ...

(أ) $(س + ١)^{3}$ (ب) $\sqrt[3]{س}$ − ١ (جـ) $\sqrt[3]{س}$ + ١ (د) $س^{3}$ − ١

⑧ الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة $د^{-1}$ (س)



فإن : (د ∘ د) (صفر) = ...

(أ) −٣ (ب) −٢ (جـ) صفر (د) ١

الدرس 4 الدالة اللوغاريتمية وتمثيلها البيانى

نعلم أنه يمكن كتابة العدد ٨ على الصورة : ٨ = ٢^{3} ، والعدد (٣) الذى يجب وضعه كأس للعدد (٢) ليعطى (٨) يسمى لوغاريتم العدد (٨) للأساس (٢) ويرمز له بالرمز $لو_{2}$ ٨

وهكذا نجد أن كل صورة أسية أساسها عدد حقيقى موجب ≠ ١ يوجد لها صورة أخرى تكافئها تسمى بالصورة اللوغاريتمية وعمومًا فإن :

> ص = $لو_{أ}$ س ⟺ س = $أ^{ص}$ حيث أ ∈ $ح^{+}$ − {١} ، س ∈ $ح^{+}$ ، ص ∈ ح

فمثلًا : $لو_{3}$ ٨١ = ٤ ⟺ ٣^{4} = ٨١ ، $لو_{3}$ $\frac{١}{٩}$ = −٢ ⟺ ٣^{-2} = $\frac{١}{٩}$

، ٤^{2} = ١٦ ⟺ $لو_{4}$ ١٦ = ٢ ، ٢^{-3} = $\frac{١}{٨}$ ⟺ $لو_{2}$ $\frac{١}{٨}$ = −٣ وهكذا

ملاحظات

1. لا معنى للحديث عن لوغاريتم عدد غير موجب ، فكل من $لو_{2}$ −٣ ، $لو_{5}$ − ٨ ، $لو_{7}$ صفر لا معنى له.
2. الأساس أ يجب أن يكون عددًا موجبًا يختلف عن الواحد الصحيح ويترتب على ذلك أن كلًا من : $لو_{-2}$ ٨ ، $لو_{صفر}$ ٥ ، $لو_{1}$ ٤ لا معنى له.
3. اللوغاريتم المعتاد هو اللوغاريتم الذى أساسه ١٠ وقد اتفق على حذف هذا الأساس عند كتابة اللوغاريتم **فمثلًا :** $لو_{10}$ ٣ تكتب لو ٣

الدالة اللوغاريتمية

> إذا كان أ ∈ $ح^{+}$ − {١} فإن الدالة د : $ح^{+}$ ⟵ ح حيث د (س) = $لو_{أ}$ س تسمى بالدالة اللوغاريتمية.

العلاقة بين الدالة الأسية والدالة اللوغاريتمية

درسنا فيما سبق لرسم الدالة الأسية د : د (س) = $٣^{س}$ أى ص = $٣^{س}$ نكون الجدول التالى :

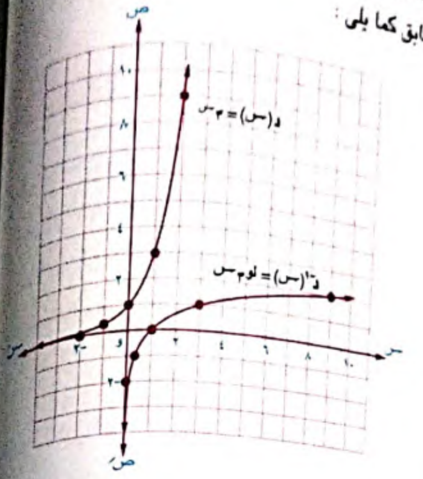
س	-٢	-١	٠	١	٢
د (س) = $٣^{س}$	$\frac{١}{٩}$	$\frac{١}{٣}$	١	٣	٩

وبتبديل المتغيرين نحصل على الدالة العكسية س = $٣^{ص}$

وهى الصورة المكافئة للدالة اللوغاريتمية ص = $لو_{٣}$ س أى $د^{-١}$ (س) = $لو_{٣}$ س

ولرسم هذه الدالة نبدل قيم س ، ص فى الجدول السابق كما يلى :

س	$\frac{١}{٩}$	$\frac{١}{٣}$	١	٣	٩
$د^{-١}$ (س) = $لو_{٣}$س	-٢	-١	٠	١	٢



- من خواص الدالة العكسية

والشكل المقابل نلاحظ أن :

منحنيى الدالتين متماثلان حول

المستقيم ص = س

، مجال الدالة الأسية هو ح

والمدى =]٠ ، ∞[

، مجال الدالة اللوغاريتمية هو

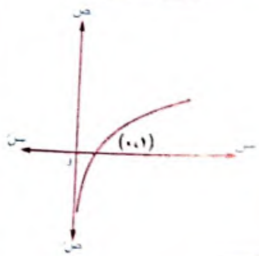
]٠ ، ∞[والمدى = ح

أى أن الدالة اللوغاريتمية هى الدالة العكسية للدالة الأسية.

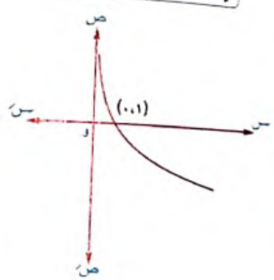
التمثيل البيانى للدالة اللوغاريتمية د : د(س) = $لو_{أ}$س

- الشكل البيانى للدالة اللوغاريتمية يأخذ أحد الشكلين الآتيين حسب قيمة الأساس أ :

إذا كانت : أ > ١



إذا كانت : ٠ < أ < ١



بعض خواص الدالة اللوغاريتمية د : د (س) = $لو_{أ}$س

١ مجال الدالة اللوغاريتمية = $ح^{+}$

٢ مدى الدالة اللوغاريتمية = ح

٣ الدالة اللوغاريتمية تزايدية عندما أ > ١ وتناقصية عندما ٠ < أ < ١

٤ جميع منحنيات الدوال اللوغاريتمية لأى أساس موجب ≠ ١ تمر بالنقطة (١ ، ٠)

٥ الدالة اللوغاريتمية هى دالة أحادية أى أنه إذا كان $لو_{أ}$ س = $لو_{أ}$ ص فإن س = ص

مثال ١

عبر عن كل مما يأتى بالصورة الأسية المكافئة :

١ $لو_{٢}$ ٦٤ = ٦ ٢ $لو_{٢}$ ٨$\sqrt{٢}$ = $\frac{٧}{٢}$ ٣ $لو_{٣}$ $\frac{١}{٢٧}$ = -٣ ٤ لو ٠,٠١ = -٢

الحل

١ $لو_{٢}$ ٦٤ = ٦ ⟸ ٦٤ = $٢^{٦}$

٢ $لو_{٢}$ ٨$\sqrt{٢}$ = $\frac{٧}{٢}$ ⟸ ٨$\sqrt{٢}$ = $٢^{\frac{٧}{٢}}$

٣ $لو_{٣}$ $\frac{١}{٢٧}$ = -٣ ⟸ $\frac{١}{٢٧}$ = $٣^{-٣}$

٤ لو ٠,٠١ = -٢ ⟸ ٠,٠١ = $١٠^{-٢}$

مثال ٢

اكتب الصورة اللوغاريتمية المكافئة لكل من الصور الأسية الآتية :

١ ٢٤٣ = $(\sqrt{٣})^{١٠}$ ٢ $١٠^{-٢}$ = ٠,٠١ ٣ $٣^{\frac{٥}{٢}}$ = ٩$\sqrt{٣}$ ٤ حـ = $أ^{س}$

الحل

١ ٢٤٣ = $(\sqrt{٣})^{١٠}$ ⟸ $لو_{\sqrt{٣}}$ ٢٤٣ = ١٠

٢ $١٠^{-٢}$ = ٠,٠١ ⟸ $لو_{١٠}$ ٠,٠١ = -٢

٣ $٣^{\frac{٥}{٢}}$ = ٩$\sqrt{٣}$ ⟸ $لو_{٣}$ ٩$\sqrt{٣}$ = $\frac{٥}{٢}$

٤ حـ = $أ^{س}$ ⟸ $لو_{أ}$حـ = س

مثال ٣

أوجد قيمة كل من :

١ $لو_{٢}$ ٦٤ ٢ $لو_{٦}$ ١ ٣ $لو_{٤}$ ٤$\sqrt{٢}$ ٤ $لو_{\sqrt{٣}}$ $\frac{١}{٢٧}$ ٥ لو ٠,٠٠٠١

الحل

١ بفرض أن : $لو_{٢}$ ٦٤ = س ∴ $٢^{س}$ = ٦٤ ∴ $٢^{س}$ = $٢^{٦}$

∴ س = ٦ ∴ $لو_{٢}$ ٦٤ = ٦

٢ بفرض أن : $لو_{٦}$ ١ = س ∴ $٦^{س}$ = ١

∴ س = صفر ∴ $لو_{٦}$ ١ = صفر

٣ بفرض أن : $لو_{٤} ٤\sqrt{٢} = س$

∴ $٤^{س} = ٤\sqrt{٢}$

∴ $٢^{٢س} = ٢^{٢} \times ٢^{\frac{١}{٢}}$

∴ $٢^{٢س} = ٢^{\frac{٥}{٢}}$

∴ $٢س = \frac{٥}{٢}$

∴ $س = \frac{٥}{٤}$

∴ $لو_{٤} ٤\sqrt{٢} = \frac{٥}{٤}$

٤ بفرض أن : $لو_{\sqrt{٣}} \frac{١}{٢٧} = س$

∴ $(\sqrt{٣})^{س} = \frac{١}{٢٧}$

∴ $٣^{\frac{١}{٢}س} = ٣^{-٣}$

∴ $\frac{١}{٢} س = -٣$

∴ $س = -٦$

∴ $لو_{\sqrt{٣}} \frac{١}{٢٧} = -٦$

٥ بفرض أن : لو ٠,٠٠٠١ = س

∴ $١٠^{س} = ٠,٠٠٠١ = ١٠^{-٤}$

∴ س = -٤

∴ لو ٠,٠٠٠١ = -٤

مثال ٤

أوجد قيمة س إذا كان :

١ $لو_{٢} س = -٤$

٢ $لو_{٩} ٨١\sqrt{٣} = س$

٣ $لو_{\frac{١}{٢}} س = -٣$

٤ $لو_{س} ٨ = ٦$

الحل

١ ∵ $لو_{٢} س = -٤$

∴ $س = ٢^{-٤}$

∴ $س = \frac{١}{٢^{٤}} = \frac{١}{١٦}$

٢ ∵ $لو_{٩} ٨١\sqrt{٣} = س$

∴ $٩^{س} = ٨١\sqrt{٣}$

∴ $٣^{٢س} = ٣^{٤} \times ٣^{\frac{١}{٢}}$

∴ $٣^{٢س} = ٣^{\frac{٩}{٢}}$

∴ $٢س = \frac{٩}{٢}$

∴ $س = \frac{٩}{٤}$

٣ ∵ $لو_{\frac{١}{٢}} س = -٣$

∴ $س = \left(\frac{١}{٢}\right)^{-٣} = ٢^{٣}$

∴ س = ٨

٤ ∵ $لو_{س} ٨ = ٦$

∴ $س^{٦} = ٨$

∴ $س^{٦} = ٢^{٣}$

∴ $س = (٢^{٣})^{\frac{١}{٦}}$

∴ $س = ٢^{\frac{١}{٢}}$

∴ $س = \sqrt{٢}$

مثال ٥

أوجد في ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

١ $لو_{س} ٧س = ٢$

٢ $لو_{٢} (س^{٢} + \frac{٣}{٤} س) = -٢$

٣ $لو_{٢} لو_{٣} (س^{٢} - ٧س + ٢١) = ١$

٤ $(لو_{٢} س)^{٢} - ٣ لو_{٢} س = ٤$

الحل

١ ∵ $لو_{س} ٧س = ٢$

∴ $س^{٢} = ٧س$

∴ $س^{٢} - ٧س = ٠$

∴ $س(س - ٧) = ٠$

∴ إما س = ٠ (مرفوض) أ، س = ٧ (يحقق)

∴ مجموعة الحل = {٧}

٢ ∵ $لو_{٢} (س^{٢} + \frac{٣}{٤} س) = -٢$

∴ $س^{٢} + \frac{٣}{٤} س = ٢^{-٢}$

∴ $س^{٢} + \frac{٣}{٤} س = \frac{١}{٤}$

∴ $٤س^{٢} + ٣س - ١ = ٠$

∴ (س + ١) (٤س - ١) = ٠

∴ س = -١ (يحقق) أ، $س = \frac{١}{٤}$ (يحقق)

∴ مجموعة الحل = $\{-١ ، \frac{١}{٤}\}$

لاحظ أن

عند حل المعادلات نعوض بالقيم التي نحصل عليها في المعادلة الأصلية ويكون الحل هو القيمة التي تحقق هذه المعادلة حيث إنه لا معنى للحديث عن لوغاريتم عدد غير موجب.

أو إيجاد مجموعة قيم المتغير س المسموح التعويض بها قبل البدء في حل المعادلات وذلك لتجنب عملية التعويض بقيم س التي تم الحصول عليها.

٣ ∵ $لو_{٢} لو_{٣} (س^{٢} - ٧س + ٢١) = ١$

∴ $لو_{٣} (س^{٢} - ٧س + ٢١) = ٢^{١} = ٢$

∴ $س^{٢} - ٧س + ٢١ = ٣^{٢} = ٩$

∴ $س^{٢} - ٧س + ١٢ = ٠$

∴ (س - ٣) (س - ٤) = ٠

∴ إما س = ٣ (يحقق) أ، س = ٤ (يحقق)

∴ مجموعة الحل = {٣ ، ٤}

٤ ∵ $(لو_{٢} س)^{٢} - ٣ لو_{٢} س - ٤ = ٠$

∴ $(لو_{٢} س - ٤) (لو_{٢} س + ١) = ٠$

∴ إما $لو_{٢} س = ٤$

∴ $س = ٢^{٤} = ١٦$ (يحقق)

أ، $لو_{٢} س = -١$

∴ $س = ٢^{-١} = \frac{١}{٢}$ (يحقق)

∴ مجموعة الحل = $\{١٦ ، \frac{١}{٢}\}$

مثال ٦

إذا كان منحنى الدالة د : د (س) = $لو_{أ} س$ يمر بالنقطة (٢٧ ، ٣)

أوجد قيمة أ ثم ارسم منحنى الدالة د متخذًا س ∋ $[\frac{١}{٩} ، ٩]$ ومن الرسم :

١ استنتج المجال والمدى والاطراد ونقطة تقاطع المنحنى مع محور السينات.

٢ أوجد قيمة تقريبية للعدد $لو_{٣} ٦$

الحل

∵ د (س) = $لو_{أ} س$ لكل س > ٠ ، أ ∋ $ح^{+}$ - {١}

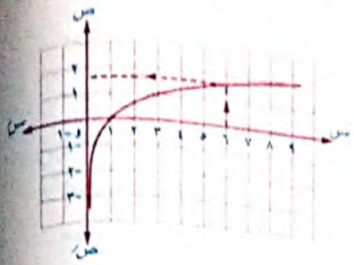
، ∵ النقطة (٢٧ ، ٣) ∋ منحنى الدالة ∴ ٣ = $لو_{أ} ٢٧$ ∴ $أ^{٣} = ٢٧ = ٣^{٣}$

∴ أ = ٢ ∴ د (س) = لو٢ س

نكون الجدول الآتى : [مع ملاحظة أن الأساس = ٢ > ١]

س	$\frac{١}{٩}$	$\frac{١}{٣}$	١	٣	٩
ص = لو٣ س	-٢	-١	صفر	١	٢

• لاحظ اختيار قيم س قوى العدد ٣ (الأساس) {٣^-٢ ، ٣^-١ ، ٣^٠ ، ٣^١ ، ٣^٢}



• ومن الرسم نجد أن :

• المجال = ح+ ، المدى = ح

• الدالة تزايدية على مجالها.

• المنحنى يقطع محور السينات فى النقطة (١ ، ٠)

• لو٣ ٦ ≃ ١,٦

مثال ٧

إذا كان منحنى الدالة د : د (س) = لوأ س يمر بالنقطة ($\frac{١}{١٦}$ ، ٤) أوجد قيمة أ ثم ارسم منحنى الدالة د متخذًا س ∋ [$\frac{١}{٤}$ ، ٤] ومن الرسم استنتج المدى والاطراد ثم أوجد قيمة تقريبية للعدد لو$_{\frac{١}{٢}}$ ٣,٥

الحل

∵ د (س) = لوأ س لكل س > ٠ ، أ ∋ ح+ - {١}

، ∵ النقطة ($\frac{١}{١٦}$ ، ٤) ∋ منحنى الدالة

∴ ٤ = لوأ $\frac{١}{١٦}$ ∴ أ^٤ = $\frac{١}{١٦}$ = $(\frac{١}{٢})^٤$

∴ أ = $\frac{١}{٢}$ (ويرفض الحل السالب) ∴ د (س) = لو$_{\frac{١}{٢}}$ س

نكون الجدول الآتى : (مع ملاحظة أن الأساس = $\frac{١}{٢}$ < ١)

س	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٢}$	١	٢	٤
ص = لو$_{\frac{١}{٢}}$ س	٢	١	صفر	-١	-٢

• لاحظ اختيار قيم س قوى العدد $\frac{١}{٢}$ (الأساس)

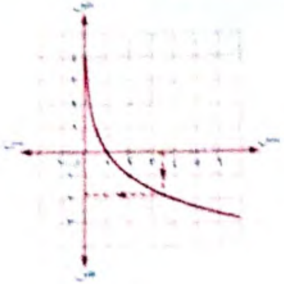
{ $(\frac{١}{٢})^{-٢}$ ، $(\frac{١}{٢})^{-١}$ ، $(\frac{١}{٢})^{٠}$ ، $(\frac{١}{٢})^{١}$ ، $(\frac{١}{٢})^{٢}$ }

• ومن الرسم نجد أن :

• المدى = ح

• الدالة تناقصية على مجالها.

• لو$_{\frac{١}{٢}}$ ٣,٥ ≃ -١,٨



مثال ٨

أوجد مجال كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية :

١ د (س) = لو٤ (٤ - س)

٢ د (س) = لو$_{١-س}$ ٥

٣ د (س) = لو$_{س-٢}$ س

٤ د (س) = لو$_{٢-س}$ س

الحل

١ الدالة معرفة لجميع قيم س التى تحقق أن : ٤ - س > ٠ أى س < ٤

∴ مجال د =]-∞ ، ٤[

٢ الدالة معرفة لجميع قيم س التى تحقق أن

{١ - س > ٠ ، ١ - س ≠ ١} أى تحقق أن {س < ١ ، س ≠ ٠}

∴ مجال د =]-∞ ، ١[- {٠}

٣ الدالة معرفة لجميع قيم س التى تحقق أن

{س > ٠ ، س - ٢ > ٠ ، س - ٢ ≠ ١} أى تحقق أن {س > ٠ ، س > ٢ ، س ≠ ٣} ∴ مجال د =]٢ ، ∞[- {٣}

٤ الدالة معرفة لجميع قيم س التى تحقق أن {س > ٠ ، ٢ - س > ٠ ، ٢ - س ≠ ١} أى تحقق أن {س > ٠ ، س < ٢ ، س ≠ ١}

∴ مجال د =]٠ ، ٢[- {١}

> **تذكر أن !**
> الدالة د : د (س) = لوأ س معرفة لجميع قيم س ، أ التى تحقق أن : {س > ٠ ، أ > ٠ ، أ ≠ ١}

مثال ❶

استخدم منحنى الدالة د : د (س) = لو٣ س لتمثيل كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية ومن الرسم حدد مجال ومدى واطراد كل دالة :

١ ر (س) = لو٣ س + ٢

٢ ى (س) = لو٣ (س − ١)

٣ ك (س) = − لو٣ س

٤ ت (س) = لو٣ (− س)

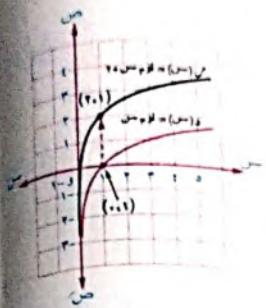
الحل

١ منحنى الدالة ر هو نفس منحنى الدالة د بإزاحة رأسية قدرها ٢ وحدة في اتجاه و ص

، المجال =]٠ ، ∞[

، المدى = ح

، الدالة تزايدية على مجالها.

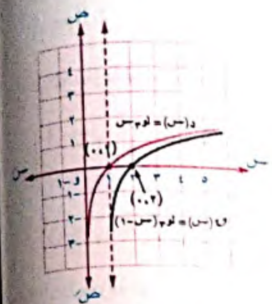


٢ منحنى الدالة ى هو نفس منحنى الدالة د بإزاحة أفقية قدرها وحدة واحدة في اتجاه و س

، المجال =]١ ، ∞[

، المدى = ح

، الدالة تزايدية على مجالها.

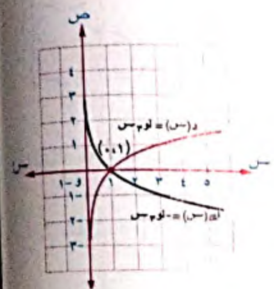


٣ منحنى الدالة ك هو نفس منحنى الدالة د بالانعكاس في محور السينات

، المجال =]٠ ، ∞[

، المدى = ح

، الدالة تناقصية على مجالها.

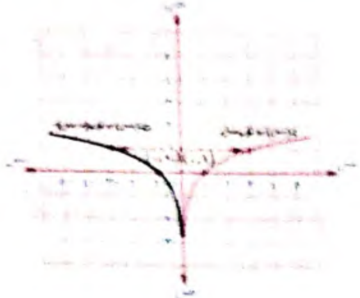


٤ منحنى الدالة ت هو نفس منحنى الدالة د بالانعكاس في محور الصادات

، المجال =]−∞ ، ٠[

، المدى = ح

، الدالة تناقصية على مجالها.



استخدام الآلة الحاسبة

• مفتاح اللوغاريتم لأى أساس هو (logₓ) ، مفتاح اللوغاريتم المعتاد هو (log)

فمثلا :

١ لإيجاد لو٣ ٢٤ نستخدم مفاتيح الحاسبة بالتتابع الآتى

2.892789261

فيكون لو٣ ٢٤ ≃ ٢,٨٩٢٨ مقربًا لأربعة أرقام عشرية.

٢ لإيجاد لو ٨,٤ نستخدم مفاتيح الحاسبة بالتتابع الآتى

0.9242792861

فيكون لو ٨,٤ ≃ ٠,٩٢٤٣ مقربًا لأربعة أرقام عشرية.

٣ لإيجاد العدد س الذى يحقق لو س = ٠,٤٥٧٢ نستخدم مفاتيح الحاسبة بالتتابع الآتى

2.865497276

∴ س = ٢,٨٦٥٥ مقربًا لأربعة أرقام عشرية.

اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسى — مستويات عليا

• تذكر • فهم • تطبيق

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① الصورة لو$_{أ}$ س = ص تكافئ تماما الصورة ....

(أ) لو$_{أ}$ ص = س (ب) أ^{ص} = س (جـ) أ^{س} = ص (د) ص = أ س

② لو$_{\frac{٢}{٥}}$ $\frac{١٦}{٦٢٥}$ = ...

(أ) −٢ (ب) −٤ (جـ) ٢ (د) ٥

③ لو$_{٣}$ لو$_{٢}$ ٨ = ...

(أ) −٢ (ب) −١ (جـ) ١ (د) ٤

④ إذا كان : لو ٠,٠٠١ = ٣ س + ١ فإن : س = ...

(أ) −٣ (ب) −١ (جـ) ٢ (د) ٧

⑤ إذا كان : لو$_{٣}$ س = ٢ فإن : س = ...

(أ) ٣ (ب) ٥ (جـ) ٨ (د) ٩

⑥ إذا كان : لو$_{\frac{١}{٣}}$ س = −١ فإن : س = ...

(أ) −٣ (ب) −١ (جـ) ١ (د) ٣

⑦ إذا كان : لو$_{٣}$ س = لو$_{٣}$ ٩ فإن : س = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

⑧ إذا كان : لو$_{٥}$ س = ٢ فإن : لو (٤٠ س) = ...

(أ) ٣ (ب) ٢٥ (جـ) ١٠٠ (د) ١٠٠٠

⑨ إذا كان : لو$_{٥}$ س = ٣ فإن : لو$_{٥}$ $\frac{س}{٥}$ = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٢٥ (د) ١٢٥

⑩ إذا كان : لو (س + ١١) = ٢ فإن : س = ...

(أ) −٩ (ب) ٢٢ (جـ) ٨٩ (د) ٩١

⑪ إذا كان لو$_{٩}$ $\sqrt{س + ٤}$ = $\frac{١}{٢}$ فإن : س = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

⑫ مجموعة حل المعادلة : لو$_{س}$ ٨١ = ٤ هى ....

(أ) {−٣} (ب) {٣} (جـ) {٣ ، −٣} (د) {٩}

⑬ مجموعة حل المعادلة : لو$_{س}$ ٣ = −٢ فى ح هى ....

(أ) {$\frac{١}{٩}$} (ب) {٩} (جـ) {$\sqrt{٣}$} (د) {$\frac{١}{\sqrt{٣}}$}

⑭ إذا كان : لو$_{س}$ ٢٥ = ٢ فإن : س^{٣} + س^{٢} − س = ...

(أ) ٩٥ (ب) ١٠٥ (جـ) ١٤٥ (د) ١٥٥

⑮ إذا كان : لو$_{٣}$ (٢ س + ٣) = ٢ فإن : س = ...

(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) ٩ (د) ٤

⑯ مجموعة حل المعادلة لو (س − ١) = صفر هى ....

(أ) {$\frac{١}{١٠}$} (ب) {١} (جـ) {٢} (د) {−١}

⑰ مجموعة حل المعادلة : لو$_{س}$ (٣ س − ٢) = ٢ هى ....

(أ) {١ ، ٢} (ب) {١} (جـ) {٢} (د) ∅

⑱ إذا كانت : لو$_{س}$ (س + ٦) = ٢ فإن : س ∈ ....

(أ) {٣ ، −٢} (ب) {٣} (جـ) {٣ ، ١} (د) {٦ ، ١}

⑲ مجموعة حل المعادلة : لو$_{س}$ ٦٤ س = ٤ فى ح هى ....

(أ) {٢} (ب) {٤} (جـ) {٦} (د) {٠ ، ٤}

⑳ إذا كان : لو$_{|س + ٢|}$ ٦٤ = ٣ فإن : س ∈ ....

(أ) {٦ ، −٢} (ب) {٢ ، −٦}

(جـ) {٠ ، −٨} (د) {٤ ، −٨}

㉑ إذا كان : لو$_{٣}$ (٤ + لو$_{٢}$ س) = ٢ فإن : س = ...

(أ) ١٦ (ب) ٣٢ (جـ) ٦٤ (د) ١٢٨

㉒ إذا كان : لو$_{٣}$ لو$_{٥}$ لو$_{٢}$ س = صفر فإن : س = ...

(أ) ٤ (ب) ٨ (جـ) ١٦ (د) ٣٢

㉓ إذا كان : د (س) = ٢^{س} فإن : لو$_{٢}$ د (س) = ...

(أ) ١ (ب) س (جـ) د (س) (د) ٢

(٢٤) إذا كانت : د (س) = ٣^{س} فإن : د$^{-١}$ (س) = ...

(أ) لو$_{س}$ ٣ (ب) لو$_{٣}$ س (جـ) س$^{-٣}$ (د) ٣$^{-س}$

(٢٥) د (س) = لو$_{٢}$ (س + ٤) فإن : د$^{-١}$ (٢) = ...

(أ) ٦ (ب) ٥ (جـ) لو$_{٢}$ ٦ (د) لو$_{٦}$ ٢

(٢٦) إذا كانت : د (س) = لو$_{٢}$ (س + ك) وكان د$^{-١}$ (٣) = ١ فإن : ك = ...

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ٧

(٢٧) قيمة لو$_{٦}$ ٣٢ باستخدام الحاسبة هى .... تقريبًا.

(أ) ١.٩٥ (ب) ٠.٥١٢ (جـ) ٢.٢٩٧ (د) ٠.٧٤

(٢٨) قيمة س حيث لو س = ٠.٣٥ هى .... مقربة لأقرب جزء من ألف

(أ) ٣.٥٣٤ (ب) ٢.٨٣٩ (جـ) ٢.٢٣٩ (د) ± ٢.٢٣٩

(٢٩) منحنى الدالة د : د (س) = لو$_{٢}$ (س + ١) يقطع محور السينات فى النقطة ....

(أ) (٠ ، ٠) (ب) (١ ، ٠) (جـ) (٢ ، ٠) (د) (١ ، ١)

(٣٠) منحنى الدالة د : د (س) = لو$_{٢}$ (٣ − س) يقطع محور السينات فى النقطة ....

(أ) (١ ، ٠) (ب) (٢ ، ٠) (جـ) (٠ ، ١) (د) (٣ ، ٠)

(٣١) مدى الدالة د : د (س) = لو س هو ....

(أ) ح$^{+}$ (ب) ح$^{-}$ (جـ) ح (د) ح*

(٣٢) الدالة د : د (س) = لو$_{أ}$ س متناقصة لكل أ ∈ ....

(أ)]٠ ، ∞[(ب)]−∞ ، ٠] (جـ)]٠ ، ١[(د)]١ ، ∞[

(٣٣) إذا كانت الدالة د : د (س) = لو$_{\frac{1}{2}}$ س فإن : د $\left(\frac{1}{4}\right)$ + د (٨) = ...

(أ) −٣ (ب) −١ (جـ) ٢ (د) ٥

(٣٤) إذا كان : لو$_{\frac{1}{2}}$ د (س) = س فإن : ٨ د (٢) + د (−٣) + د (٠) = ...

(أ) $\frac{1}{16}$ (ب) $\frac{1}{8}$ (جـ) ١١ (د) ٢٢

(٣٥) إذا كان المنحنى ص = لو$_{٤}$ (١ − أ س) يمر بالنقطة $\left(\frac{1}{4} ، -\frac{1}{2}\right)$ فإن : أ = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٨

(٣٦) إذا كان منحنى الدالة د حيث د (س) = لو$_{أ}$ س يمر بالنقطة (٨ ، ٣) فإن : د (٤) = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) $\frac{1}{4}$ (د) −٢

(٣٧) مجال الدالة د حيث د (س) = لو$_{(س − ١)}$ ٣ هو ....

(أ)]−∞ ، ٠[∪]٠ ، ١[(ب)]−∞ ، ١[(جـ)]١ ، ∞[(د)]−١ ، ١[

(٣٨) مجال الدالة د : د (س) = لو$_{١ − س}$ س هو ....

(أ) س > ٠ (ب) س < ١ (جـ) ٠ < س < ١ (د) ٠ ≤ س ≤ ١

(٣٩) مجال الدالة د حيث د (س) = لو$_{س}$ (٥ − س) هو ....

(أ)]٠ ، ٥[− {١} (ب) [٠ ، ٥] (جـ)]٠ ، ٥[(د)]−∞ ، ٥[

(٤٠) إذا كان أ ، س ، ص ∈ ح$^{+}$ ، أ ≠ ١ وكان : لو$_{أ}$ س = لو$_{أ}$ ص فإن : ....

(أ) ص = س (ب) ص = −س (جـ) ص = أ^{س} (د) س = أ^{ص}

(٤١) إذا كان أ ، س ، ص ∈ ح$^{+}$ ، أ ≠ ١ وكان لو$_{أ}$ س = لو$_{أ}$ ص
فإن : س = ص لأن د (س) = لو$_{أ}$ س هى دالة ....

(أ) فردية. (ب) زوجية. (جـ) تزايدية. (د) أحادية.

(٤٢) إذا كان : د (س) = لو$_{أ}$ س ، أ ∈]٠ ، ١[فإن العبارات الآتية صحيحة ما عدا ....

(أ) إذا كان : لو$_{أ}$ س = لو$_{أ}$ ص فإن : س = ص

(ب) الدالة د تزايدية على مجالها.

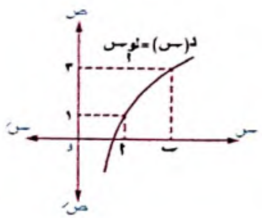
(جـ) إذا كان : لو$_{أ}$ س < لو$_{أ}$ ص فإن : س > ص

(د) الدالة د ليست فردية ولا زوجية.

(٤٣) إذا كان : لو$_{أ}$ س > ٠ حيث أ > ١ فإن : س ∈ ....

(أ)]٠ ، ١[(ب)]١ ، ∞[(جـ)]−∞ ، ٠] (د)]٠ ، ∞[

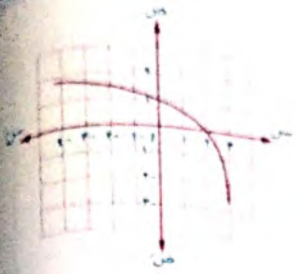
(٤٤) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د : د (س) = لو$_{أ}$ س



فإن : ب = ...

(أ) أ^{٢} (ب) أ + ٣ (جـ) أ^{٣} (د) ٣ أ

(٤٥) الشكل المقابل يمثل الدالة ....



(أ) ص = ٣^(س - ١)

(ب) ص = ٣^(س + ١)

(جـ) ص = لو٣ (٢ - س)

(د) ص = لو٣ (٣ - س)

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ عبر عن كل من الصور اللوغاريتمية الآتية بالصورة الأسية المكافئة لها :

(١) لو٢ ١٢٨ = ٧ (٢) لو½ ٤/٢٥ = ٢ (٣) لو٢ ٤ ∛٢ = ٥/٣

٢ عبر عن كل من الصور الأسية الآتية بالصورة اللوغاريتمية المكافئة لها :

(١) هـ^صفر = ١ (٢) ١٠^-٤ = ٠,٠٠٠١ (٣) ٥^-٣ = ١/١٢٥

٣ أوجد قيمة كل مما يأتى :

(١) لو٢ ١٦ «٤» (٢) لو٨ ١ «صفر»

(٣) لو ٠,٠٠٠٠١ «-٥» (٤) لو½ ١٢٨ «-٧»

(٥) لو٢ ١/٨ «-٣» (٦) لو√٢ ٨ ∛٢ «٧»

(٧) لو٣ ∜٢٧ «٣/٤» (٨) لو٢ جا ٤٥° «-½»

٤ حل فى ح كلاً من المعادلات الآتية :

(١) لو٢ س = ٧ «١٢٨» (٢) لو٥ س = -٢ «١/٢٥»

(٣) لو٣ س² = ٤ «±٩» (٤) لو٨١ س = ٣/٤ «٢٧»

(٥) لو٢ س^-١ = -٥ «٣٢» (٦) لو٢ (لو٣ س) = ١ «٩»

(٧) لو٣ (٢ س - ٥) = ٠ «٣» (٨) لو٨ ∛(س² + ٤٨) = ٢/٣ «±٤»

(٩) لو٢ لو٣ (س² - ٢ س) = ١ «٤ ، -٢» (١٠) لو٥ |٢ س + ١| = ١ «٢ ، -٣»

(١١) لو٢ س (س + ٦) = ٤ «٢ ، -٨» (١٢) لو٣ (س² - ٢ س) = ١ «٣ ، -١»

(١٣) (لو٣ س)² - ٩ لو٣ س + ٢٠ = ٠ «٨١ ، ٢٤٣» (١٤) لو٢ (٣^س - ٢ × ٣^(س-٢)) = ٢ «٢»

(١٥) ٣^(لو٢(س + ١,٢٥)) = ½ «-١» (١٦) |لو١٠ س - ٢| = ٢ «١٠٠٠٠ ، ١»

٥ أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

(١) لوس ١٢٥ = ٣ «{٥}» (٢) لوس ٢ = ٤ «{∜٢}»

(٣) لوس ٣ = -٢ «{١/√٣}» (٤) لوس ٠,٠٠٠١ = -٤/٣ «{١٠٠٠}»

(٥) لوس ٨١ = ٤ «{٣}» (٦) لوس-١ ٢٧ = ٣ «{٤}»

(٧) لوس-١ (٧ - س) = ٢ «{٣}» (٨) لو١/س ٦٤ = -٣ «{٤}»

(٩) لوس ٥ س = ٢ «{٥}» (١٠) لوس س² = ٥ س «{٢/٥}»

(١١) لو٢ لو٣ لوس ٢٧ = ٠ «{٣}» (١٢) لوس (س² - ١٢) = ١ «{٤}»

(١٣) لوس (√(س - ٢) + ٢) = ١ «{٣ ، ٢}»

(١٤) (لو٣ س)² + ١٥ = ٨ لو٣ س «{٢٤٣ ، ١٢٥}»

(١٥) لو٢٧ (س - ٢) + لو٣ (س - ٢) = ٤ «{٢٩}»

٦ أوجد قيمة س فى كل مما يأتى :

(١) لو٤ ٨ ∛٢ = س «١١/٦» (٢) لو١/√٥ ٦٢٥ ∜٥ = س² «±٣»

(٣) لو٠,٣ ٠,٠٩ = س^-٢ «±١/√٢» (٤) لو٢ (٢^س - ٤) + س - ٥ = ٠ «٣»

(٥) لو٤ [١٣ + لو٢ (س - ١)] = ٢ «٩» (٦) لو٢ (س²/(٢ س - ٣)) = ١ «٣»

٧ باستخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة كل مما يأتى مقربًا لأربعة أرقام عشرية :

(١) لو ٣,١٥ (٢) لو٣ ٢٧ (٣) ٤ لو ٧ - ٥ لو ١٣

٨ باستخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة س فى كل مما يأتى مقربًا لأربعة أرقام عشرية :

(١) لو س = ٠,٢٣٤٥ (٢) لو س = ١,٤١٢ (٣) لو س = -٠,٣

٩ أوجد مجموعة الحل لكل زوج من المعادلات الآتية فى ح × ح :

(١) س^ص = ٥ س - ٤ ، لوس ١٦ = ص «{(٤ ، ٢)}»

(٢) لوس لو٣ لوس ص = ٠ ، لوص ٩ = ١ «{(٣ ، ٩)}»

١٠ إذا كان : لو١٦ ٤٩ = أ ، لو٧ ٢,٥ = ب أثبت أن : ٤^(أب+١) = ١٠

11 عين مجال كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية :

(١) د (س) = لو٣ (٢ س + ١)

(٢) د (س) = ٢ لو س

(٣) د (س) = لوس س

(٤) د (س) = لوس - ٢ س

(٥) د (س) = لو٥ - س س

(٦) د (س) = لو(٥ - س) (س - ٣)

(٧) د (س) = لوس - ٣ س²

(٨) د (س) = لوس + ٢ (٢ س + ١)

(٩) د (س) = لو٢ (٣ - س) (س + ١)

(١٠) د (س) = لوس (٣ - س) (س + ١)

---

12 إذا كان منحنى الدالة د : د (س) = لو‌ا س يمر بالنقطة (٨١ ، ٤)

أوجد قيمة ا ثم ارسم منحنى الدالة د متخذًا س ∈ [١/٩ ، ٩] ومن الرسم :

(١) استنتج المجال والمدى والاطراد ونقطة تقاطع المنحنى مع محور السينات.

(٢) أوجد قيمة تقريبية للعدد لو٣ ٥

---

13 إذا كان منحنى الدالة د : د (س) = لو‌ا س يمر بالنقطة (١/٨ ، ٣) أوجد قيمة ا

ثم ارسم منحنى الدالة د متخذًا س ∈ [١/٤ ، ٤] ومن الرسم استنتج المدى والاطراد ونقطة تقاطع المنحنى مع محور السينات ثم أوجد قيمة تقريبية للعدد لو½ ٣،٥

---

14 استخدم منحنى الدالة د : د (س) = لو½ س لتمثيل كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية

، ومن الرسم حدد مجال ومدى واطراد كل دالة :

(١) ر (س) = لو½ س + ٢

(٢) ن (س) = لو½ (س + ١)

(٣) هـ (س) = - لو½ س

---

15 استخدم منحنى الدالة د : د (س) = لو٢ س لتمثيل كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية ، ومن الرسم

حدد مجال ومدى واطراد كل دالة :

(١) ع (س) = لو٢ (س - ٢)

(٢) ت (س) = لو٢ س + ١

(٣) هـ (س) = - لو٢ س

(٤) ر (س) = لو٢ (- س)

---

16 ارسم في شكل واحد منحنى كل من الدالتين ر ، د حيث ر (س) = لو٢ س

، د (س) = ٦ - س ثم استخدم ذلك في إيجاد مجموعة حل المعادلة : لو٢ س = ٦ - س «{٤}»

17 ارسم في شكل واحد منحنى كل من الدالتين ر ، د حيث ر (س) = لو٣ س

، د (س) = ٤ - س ثم استخدم ذلك في إيجاد مجموعة حل المعادلة : لو٣ س = ٤ - س «{٣}»

مسائل تقيس مهارات التفكير

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت : د (س) = لو٢ (٢ س + ٤) وكانت : د⁻¹ (٥) = ١٤ فإن : ا = ...

(ا) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٢) إذا كانت د : ح⁺ ⟵ ح وكان : د (س) = لو٢ س وكان : د⁻¹ (ا + ٣) = ٣٢

فإن : ا = ...

(ا) -٤ (ب) -٢ (جـ) -١ (د) -½

(٣) إذا كان : د (س) = لو٢ (س + ١) ، ر (س) = ٥ + لو٣ (س - ١)

فإن : (د ∘ ر) (١٠) = ...

(ا) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

(٤) إذا كان : لو (س - ٥) > صفر فإن : ....

(ا) س > ٥ (ب) س > ٦ (جـ) س > ١ (د) س < ٥

(٥) مجموعة حل المعادلة : لو٢ لو٣ ||س - ١| + ٥| = ١ في ح هي ....

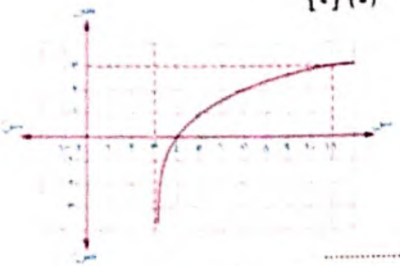
(ا) {٢ ، ٤} (ب) {٢ ، -٢ ، ٤ ، -٤}

(جـ) {-٢ ، ٤} (د) {٤}

(٦) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة

د : د (س) = لو‌ا (س + ب)

فإن : د (٧) + د⁻¹ (٢) = ...



(ا) ٩ (ب) ٨

(جـ) ٧ (د) ٦

(٧) مجال الدالة د : د (س) = لو |س² - ٩| هو ....

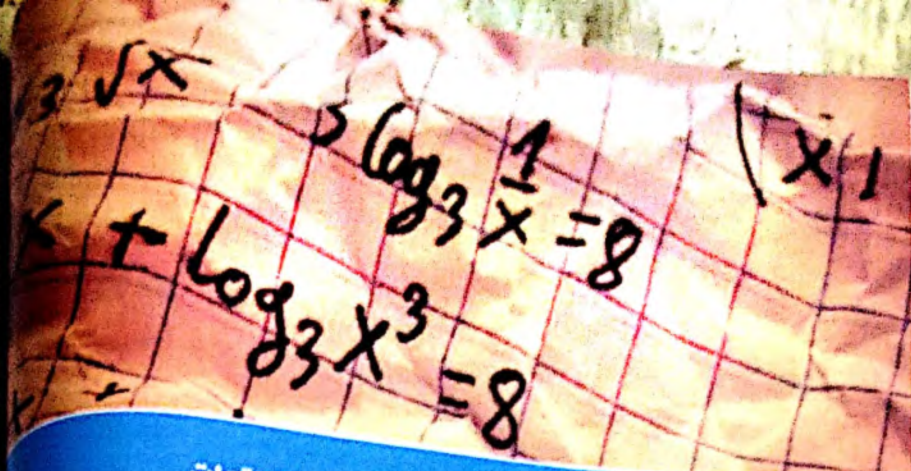
(ا) ح (ب) ح - {٣ ، -٣}

(جـ) ح - [-٣ ، ٣] (د)]-٣ ، ٣[

(٨) مجال الدالة د : د (س) = لو٢ (س + ٣) / (س² + ٣ س + ٢) هو ....

(ا) ح - {-٢ ، -١} (ب)]-٢ ، ∞[

(جـ) ح - {-٢ ، -١ ، -٣} (د)]-٢ ، ∞[- {-١ ، -٢}



الدرس 5 بعض خواص اللوغاريتمات

الخاصية الأولى

• إذا كان $أ \in ح^+ - \{1\}$ فإن: $لو_{أ}\ أ = 1$

فمثلاً: لو$_{٧}$ ٧ = ١ ، لو$_{ه}$ ه = ١ ، لو$_{\sqrt{٣}}$ $\sqrt{٣}$ = ١

الإثبات: ∵ أ^{١} = أ وبالتحويل إلى الصورة اللوغاريتمية ∴ لو$_{أ}$ أ = ١

الخاصية الثانية

• إذا كان $أ \in ح^+ - \{1\}$ فإن: لو$_{أ}$ ١ = صفر

فمثلاً: لو$_{٣}$ ١ = صفر ، لو$_{ه}$ ١ = صفر ، لو$_{\sqrt{٧}}$ ١ = صفر

الإثبات: ∵ أ^{صفر} = ١ وبالتحويل إلى الصورة اللوغاريتمية ∴ لو$_{أ}$ ١ = صفر

الخاصية الثالثة — خاصية الضرب

• إذا كان: س ، ص $\in ح^+$ ، $أ \in ح^+ - \{1\}$ فإن: لو$_{أ}$ س ص = لو$_{أ}$ س + لو$_{أ}$ ص

فمثلاً: لو$_{٣}$ (٢ × ٥) = لو$_{٣}$ ٢ + لو$_{٣}$ ٥

والعكس صحيح: لو$_{ه}$ ٢ + لو$_{ه}$ ١١ = لو$_{ه}$ (٢ × ١١) = لو$_{ه}$ ٢٢

الإثبات: بوضع لو$_{أ}$ س = ب ، لو$_{أ}$ ص = جـ

∴ س = أ^{ب} ، ص = أ^{جـ} ∴ س ص = أ^{ب} × أ^{جـ}

∴ س ص = أ$^{ب + جـ}$ وبالتحويل إلى الصورة اللوغاريتمية

∴ لو$_{أ}$ س ص = ب + جـ ∴ لو$_{أ}$ س ص = لو$_{أ}$ س + لو$_{أ}$ ص

نتيجة: إذا كانت س$_{١}$ ، س$_{٢}$ ، س$_{٣}$ ، ..... ، س$_{ن}$ $\in ح^+$ ، $أ \in ح^+ - \{1\}$

فإن لو$_{أ}$ (س$_{١}$ × س$_{٢}$ × س$_{٣}$ × ..... × س$_{ن}$) = لو$_{أ}$ س$_{١}$ + لو$_{أ}$ س$_{٢}$ + ... + لو$_{أ}$ س$_{ن}$

فمثلاً: لو$_{٢}$ (٣ × ٥ × ٧) = لو$_{٢}$ ٣ + لو$_{٢}$ ٥ + لو$_{٢}$ ٧

والعكس صحيح: لو$_{٢}$ ٧٥ + لو$_{٢}$ $\frac{٤}{٩}$ + لو$_{٢}$ ٠٫٠٦ = لو$_{٢}$ (٧٥ × $\frac{٤}{٩}$ × $\frac{٦}{١٠٠}$) = لو$_{٢}$ ٢

تنبيه هام

تذكر جيدًا أن: لو$_{أ}$ (س + ص) ≠ لو$_{أ}$ س + لو$_{أ}$ ص

كما أن: لو$_{أ}$ (س × ص) ≠ لو$_{أ}$ س × لو$_{أ}$ ص

الخاصية الرابعة — خاصية القسمة

• إذا كان: س ، ص $\in ح^+$ ، $أ \in ح^+ - \{1\}$ فإن: لو$_{أ}$ $\frac{س}{ص}$ = لو$_{أ}$ س − لو$_{أ}$ ص

فمثلاً: لو$_{ه}$ $\frac{٢}{٣}$ = لو$_{ه}$ ٢ − لو$_{ه}$ ٣ والعكس صحيح: لو$_{٣}$ ١١ − لو$_{٣}$ ٢ = لو$_{٣}$ $\frac{١١}{٢}$

الإثبات: بوضع لو$_{أ}$ س = ب ، لو$_{أ}$ ص = جـ ∴ س = أ^{ب} ، ص = أ^{جـ}

∴ $\frac{س}{ص}$ = $\frac{أ^{ب}}{أ^{جـ}}$ = أ$^{ب - جـ}$

وبالتحويل إلى الصورة اللوغاريتمية ∴ لو$_{أ}$ $\frac{س}{ص}$ = ب − جـ

أى أن لو$_{أ}$ $\frac{س}{ص}$ = لو$_{أ}$ س − لو$_{أ}$ ص

نتيجة: لو$_{أ}$ $\frac{س ص}{ع ل}$ = لو$_{أ}$ س + لو$_{أ}$ ص − لو$_{أ}$ ع − لو$_{أ}$ ل

تنبيه هام

تذكر جيدًا أن: لو$_{أ}$ (س − ص) ≠ لو$_{أ}$ س − لو$_{أ}$ ص

كما أن: لو$_{أ}$ $\left(\frac{س}{ص}\right)$ ≠ لو$_{أ}$ س ÷ لو$_{أ}$ ص

الخاصية الخامسة — خاصية لوغاريتم القوة

• إذا كان: س $\in ح^+$ ، $أ \in ح^+ - \{1\}$ ، ن $\in ح$ فإن: لو$_{أ}$ س^{ن} = ن لو$_{أ}$ س

فمثلاً: لو$_{٣}$ ١٢٥ = لو$_{٣}$ ٥^{٣} = ٣ لو$_{٣}$ ٥ والعكس صحيح: ٧ لو$_{ه}$ ٢ = لو$_{ه}$ ٢^{٧} = لو$_{ه}$ ١٢٨

الإثبات: لو$_{أ}$ س^{ن} = لو$_{أ}$ (س × س × س × ... إلى ن حدًا)

= لو$_{أ}$ س + لو$_{أ}$ س + ... إلى ن حدًا

= ن لو$_{أ}$ س

الخاصية السادسة — خاصية تغيير الأساس

• إذا كان: س $\in ح^+$ ، ص $\in ح^+ - \{1\}$ ، $أ \in ح^+ - \{1\}$ فإن: لو$_{ص}$ س = $\frac{لو_{أ}\ س}{لو_{أ}\ ص}$

فمثلاً: لو$_{ه}$ ٧ = $\frac{لو\ ٧}{لو\ ٥}$ ، لو$_{٣}$ ٢ = $\frac{لو_{١١}\ ٢}{لو_{١١}\ ٣}$

$\therefore$ لو$_س$ س = ع $\therefore$ ص^ع = س بأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس أ

الإثبات : بوضع لو$_ص$ س = ع $\therefore$ ص^ع = س

$\therefore$ ع لو$_أ$ ص = لو$_أ$ س $\qquad \therefore$ ع = $\frac{\text{لو}_أ \text{ س}}{\text{لو}_أ \text{ ص}}$

أى أن لو$_ص$ س = $\frac{\text{لو}_أ \text{ س}}{\text{لو}_أ \text{ ص}}$

الخاصية السابعة خاصية المعكوس الضربى

• إذا كان س ، ص $\in$ ح$^+$ − {١} فإن $\boxed{\text{لو}_ص \text{ س} = \frac{1}{\text{لو}_س \text{ ص}}}$

فمثلاً : لو$_٧$ ٥ = $\frac{1}{\text{لو}_٥ ٧}$ ومنها لو$_٧$ ٥ × لو$_٥$ ٧ = ١

الإثبات : $\because$ لو$_ص$ س = $\frac{\text{لو س}}{\text{لو ص}}$ ، لو$_س$ ص = $\frac{\text{لو ص}}{\text{لو س}}$

$\therefore$ لو$_ص$ س × لو$_س$ ص = ١ $\qquad \therefore$ لو$_ص$ س = $\frac{1}{\text{لو}_س \text{ ص}}$

مثال ❶

بدون استخدام حاسبة الجيب أوجد قيمة كل مما يأتى :

١ لو$_٣$ ١٥ + لو$_٣$ ٦ − لو$_٣$ ١٠

٢ لو$_٥$ ١٠٠ − ٣ لو$_٥$ ٢ − لو$_٥$ ١٨ + لو$_٥$ ٣٦

٣ لو$_٥$ $\frac{٣}{٥}$ + ٢ لو$_٥$ $\frac{١٥}{٢}$ − لو$_٥$ $\frac{٥}{٣٦}$ + لو$_٥$ $\frac{٥}{٢٤٣}$

٤ لو$_٢$ ٧ × لو$_٧$ ١١ × لو$_{١١}$ ٩ × لو$_٣$ ٢

٥ $\frac{\text{لو}_٢ ٢٤٣ - \text{لو}_٢ ٣٢}{\text{لو}_٢ ٢٧ - \text{لو}_٢ ٨}$

الحل

١ المقدار = لو$_٣$ $\frac{١٥ × ٦}{١٠}$ = لو$_٣$ ٩ = لو$_٣$ ٣^٢ = ٢ لو$_٣$ ٣ = ٢ × ١ = ٢

٢ المقدار = لو$_٥$ ١٠٠ − لو$_٥$ ٢^٣ − لو$_٥$ ١٨ + لو$_٥$ ٣٦

= لو$_٥$ $\frac{١٠٠ × ٣٦}{٨ × ١٨}$ = لو$_٥$ ٢٥ = لو$_٥$ ٥^٢ = ٢ لو$_٥$ ٥ = ٢ × ١ = ٢

٣ المقدار = لو$_٥$ $\frac{٣}{٥}$ + لو$_٥$ $\left(\frac{١٥}{٢}\right)^٢$ − لو$_٥$ $\frac{٥}{٣٦}$ + لو$_٥$ $\frac{٥}{٢٤٣}$

= لو$_٥$ $\frac{\frac{٣}{٥} × \frac{١٥}{٢} × \frac{١٥}{٢} × \frac{٥}{٢٤٣}}{\frac{٥}{٣٦}}$ = لو$_٥$ $\frac{٣ × ١٥ × ١٥ × ٥ × ٣٦}{٥ × ٢ × ٢ × ٢٤٣ × ٥}$ = لو$_٥$ ٥ = ١

٤ المقدار = $\frac{\text{لو } ٧}{\text{لو } ٢} × \frac{\text{لو } ١١}{\text{لو } ٧} × \frac{\text{لو } ٩}{\text{لو } ١١} × \frac{\text{لو } ٢}{\text{لو } ٣}$ = $\frac{\text{لو } ٩}{\text{لو } ٣}$ = $\frac{\text{لو } ٣^٢}{\text{لو } ٣}$ = $\frac{٢ \text{ لو } ٣}{\text{لو } ٣}$ = ٢

٥ المقدار = $\frac{\text{لو}_٢ ٣^٥ - \text{لو}_٢ ٢^٥}{\text{لو}_٢ ٣^٣ - \text{لو}_٢ ٢^٣}$ = $\frac{٥ \text{ لو}_٢ ٣ - ٥ \text{ لو}_٢ ٢}{٣ \text{ لو}_٢ ٣ - ٣ \text{ لو}_٢ ٢}$ = $\frac{٥ (\text{لو}_٢ ٣ - \text{لو}_٢ ٢)}{٣ (\text{لو}_٢ ٣ - \text{لو}_٢ ٢)}$ = $\frac{٥}{٣}$

مثال ❷

بدون استخدام حاسبة الجيب أثبت كلاً مما يأتى :

١ ٣ لو ٥ + ٢ لو ٦ − لو ٩ + لو ٠,٠٢ = لو$_٥$ ٢٥

٢ $\frac{\text{لو } ٣٠ - \text{لو } ٦ + \text{لو } ٥}{\text{لو } ١٢ - \text{لو } ٣ + \text{لو } ٢٥}$ = ١ − لو ٢

الحل

١ الطرف الأيمن = لو ٥^٣ + لو ٦^٢ − لو ٩ + لو $\frac{٢}{١٠٠}$

= لو $\frac{٥^٣ × ٦^٢ × \frac{٢}{١٠٠}}{٩}$ = لو $\frac{١٢٥ × ٣٦ × ٢}{٩ × ١٠٠}$

= لو ١٠٠ = لو ١٠^٢ = ٢ لو ١٠ = ٢

، الطرف الأيسر = لو$_٥$ ٥^٢ = ٢ لو$_٥$ ٥ = ٢ $\qquad$ $\therefore$ الطرفان متساويان.

٢ الطرف الأيمن = $\frac{\text{لو } \frac{٣٠ × ٥}{٦}}{\text{لو } \frac{١٢ × ٢٥}{٣}}$ = $\frac{\text{لو } ٢٥}{\text{لو } ١٠٠}$ = $\frac{\text{لو } ٥^٢}{\text{لو } ١٠^٢}$ = $\frac{٢ \text{ لو } ٥}{٢ \text{ لو } ١٠}$ = لو ٥

، الطرف الأيسر = ١ − لو ٢ = لو ١٠ − لو ٢ = لو $\frac{١٠}{٢}$ = لو ٥ $\qquad$ $\therefore$ الطرفان متساويان.

مثال ❸

إذا كان : لو$_٣$ ٧ ≃ ١,٧٧١

أوجد قيمة كل مما يأتى فى أبسط صورة ثم تحقق من الناتج باستخدام الآلة الحاسبة :

١ لو$_٣$ ٢١ $\qquad$ ٢ لو$_٣$ ٦٣ $\qquad$ ٣ لو$_٣$ $\frac{٧}{٩}$

الحل

١ لو$_٣$ ٢١ = لو$_٣$ (٣ × ٧) = لو$_٣$ ٣ + لو$_٣$ ٧ = ١ + ١,٧٧١ = ٢,٧٧١

(التحقق باستخدام الآلة الحاسبة ... Start → log▫ 3 REPLAY 2 1 =)

٢ لو$_٣$ ٦٣ = لو$_٣$ (٩ × ٧) = لو$_٣$ ٩ + لو$_٣$ ٧ = لو$_٣$ ٣^٢ + لو$_٣$ ٧ = ٢ لو$_٣$ ٣ + لو$_٣$ ٧

= ٢ + ١,٧٧١ = ٣,٧٧١

(التحقق باستخدام الآلة الحاسبة ... Start → log▫ 3 REPLAY 6 3 =)

٣ لو$_٣$ $\frac{٧}{٩}$ = لو$_٣$ ٧ − لو$_٣$ ٩ = لو$_٣$ ٧ − لو$_٣$ ٣^٢ = لو$_٣$ ٧ − ٢ لو$_٣$ ٣ = (لو$_٣$ ٧) − ٢

= ١,٧٧١ − ٢ = −٠,٢٢٩

(التحقق باستخدام الآلة الحاسبة ... Start → log▫ 3 REPLAY 7 ÷ REPLAY 9 =)

مثال ٤

أوجد فى أبسط صورة قيمة كل مما يأتى :

١ $\text{لو}_٢ \sqrt[٧]{٣٢}$

٢ $\frac{١}{\text{لو}_{س}\ س ص ع} + \frac{١}{\text{لو}_{ص}\ س ص ع} + \frac{١}{\text{لو}_{ع}\ س ص ع}$

الحل

١ $\text{لو}_٢ \sqrt[٧]{٣٢} = \text{لو}_٢ (٢^٥)^{\frac{١}{٧}} = \text{لو}_٢ ٢^{\frac{٥}{٧}} = \frac{٥}{٧}\ \text{لو}_٢ ٢ = \frac{٥}{٧}$

٢ $\frac{١}{\text{لو}_{س}\ س ص ع} + \frac{١}{\text{لو}_{ص}\ س ص ع} + \frac{١}{\text{لو}_{ع}\ س ص ع}$

$= \text{لو}_{س ص ع}\ س + \text{لو}_{س ص ع}\ ص + \text{لو}_{س ص ع}\ ع$

$= \text{لو}_{س ص ع}\ س ص ع = ١$

مثال ٥

باستخدام حاسبة الجيب أوجد قيمة س لأقرب رقمين عشريين فى كل مما يأتى :

١ $ه^{س} = ١٧$

٢ $٢^{س - ١} = ٧$

٣ $ه^{س + ١} = ٢^{٤س - ٣}$

٤ $ه^{س - ٢} = ٣ \times ٤^{س + ١}$

٥ $٣^{٢س} - ١٤ \times ٣^{س} + ٤٥ = ٠$

الحل

١ ∵ $ه^{س} = ١٧$ وبأخذ لوغاريتم الطرفين

∴ $\text{لو}\ ه^{س} = \text{لو}\ ١٧$

∴ $س\ \text{لو}\ ه = \text{لو}\ ١٧$

∴ $س = \frac{\text{لو}\ ١٧}{\text{لو}\ ه}$ وباستخدام حاسبة الجيب

∴ $س \simeq ١.٧٦$

٢ ∵ $٢^{س - ١} = ٧$ وبأخذ لوغاريتم الطرفين

∴ $\text{لو}\ ٢^{س - ١} = \text{لو}\ ٧$

∴ $(س - ١)\ \text{لو}\ ٢ = \text{لو}\ ٧$

∴ $س\ \text{لو}\ ٢ - \text{لو}\ ٢ = \text{لو}\ ٧$

∴ $س = \frac{\text{لو}\ ٧ + \text{لو}\ ٢}{\text{لو}\ ٢} \simeq ٣.٨١$

٣ ∵ $ه^{س + ١} = ٢^{٤س - ٣}$ وبأخذ لوغاريتم الطرفين

∴ $\text{لو}\ ه^{س + ١} = \text{لو}\ ٢^{٤س - ٣}$

∴ $(س + ١)\ \text{لو}\ ه = (٤س - ٣)\ \text{لو}\ ٢$

∴ $س\ \text{لو}\ ه + \text{لو}\ ه = ٤س\ \text{لو}\ ٢ - ٣\ \text{لو}\ ٢$

∴ $٤س\ \text{لو}\ ٢ - س\ \text{لو}\ ه = ٣\ \text{لو}\ ٢ + \text{لو}\ ه$

∴ $س (٤\ \text{لو}\ ٢ - \text{لو}\ ه) = ٣\ \text{لو}\ ٢ + \text{لو}\ ه$

∴ $س = \frac{٣\ \text{لو}\ ٢ + \text{لو}\ ه}{٤\ \text{لو}\ ٢ - \text{لو}\ ه} \simeq ٣.١٧$

٤ ∵ $ه^{س - ٢} = ٣ \times ٤^{س + ١}$ وبأخذ لوغاريتم الطرفين

∴ $(س - ٢)\ \text{لو}\ ه = \text{لو}\ ٣ + (س + ١)\ \text{لو}\ ٤$

∴ $س\ \text{لو}\ ه - ٢\ \text{لو}\ ه = \text{لو}\ ٣ + س\ \text{لو}\ ٤ + \text{لو}\ ٤$

∴ $س\ \text{لو}\ ه - س\ \text{لو}\ ٤ = \text{لو}\ ٣ + \text{لو}\ ٤ + ٢\ \text{لو}\ ه$

∴ $س (\text{لو}\ ه - \text{لو}\ ٤) = \text{لو}\ ٣ + \text{لو}\ ٤ + ٢\ \text{لو}\ ه$

∴ $س = \frac{\text{لو}\ ٣ + \text{لو}\ ٤ + ٢\ \text{لو}\ ه}{\text{لو}\ ه - \text{لو}\ ٤} \simeq ٢٥.٤٦$

حل آخر

∵ $ه^{س - ٢} = ٣ \times ٤^{س + ١}$

∴ $\frac{ه^{س}}{ه^{٢}} = ٣ \times ٤^{س} \times ٤$

∴ $\frac{ه^{س}}{٤^{س}} = ٣ \times ٤ \times ه^{٢}$

∴ $\left(\frac{ه}{٤}\right)^{س} = ٣٠٠$

∴ $س = \frac{\text{لو}\ ٣٠٠}{\text{لو}\ \frac{ه}{٤}} \simeq ٢٥.٤٦$

٥ ∵ $٣^{٢س} - ١٤ \times ٣^{س} + ٤٥ = ٠$ ، وبالتحليل ∴ $(٣^{س} - ٩)(٣^{س} - ٥) = ٠$

∴ إما $٣^{س} - ٩ = ٠$

∴ $٣^{س} = ٩$

∴ $٣^{س} = ٣^{٢}$

∴ $س = ٢$

أو $٣^{س} - ٥ = ٠$

∴ $٣^{س} = ٥$ وبأخذ لوغاريتم الطرفين

∴ $س\ \text{لو}\ ٣ = \text{لو}\ ٥$

∴ $س = \frac{\text{لو}\ ٥}{\text{لو}\ ٣} \simeq ١.٤٦$

ملاحظة هامة عند حل المعادلة اللوغاريتمية

إذا كانت $س \in ح^{*}$ ، م عددًا زوجيًا لا يساوى الصفر ، $أ \in ح^{+} - \{١\}$

فإن : $\text{لو}_{أ}\ س^{م} = م\ \text{لو}_{أ}\ |س|$ **فمثلا** : $\text{لو}_{٣}\ س^{٤} = ٤\ \text{لو}_{٣}\ |س|$

مثال ٦

أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

١ $٢\ \text{لو}\ س - \text{لو}\ (س + ٢) = ٠$

٢ $\text{لو}\ س^{٢} = \text{لو}\ ٤ + \text{لو}\ ٩$

٣ $\text{لو}_{٢}\ س + \text{لو}_{٢}\ (س - ٢) = ٣$

٤ $\text{لو}\ س + \text{لو}\ (س + ٢) = \text{لو}\ (س + ٦)$

٥ $\text{لو}\ \sqrt[٣]{٢س - ١} + \text{لو}\ \sqrt[٣]{س - ٢} = \text{لو}\ ٣٠ - ١$

٦ $\frac{\text{لو}\ ٤٩ - (\text{لو}\ ٧)^{٢}}{\text{لو}\ ٠.٠٧} = \text{لو}\ س$

الحل

١ ∵ $٢\ \text{لو}\ س - \text{لو}\ (س + ٢) = ٠$

∴ $\text{لو}\ س^{٢} = \text{لو}\ (س + ٢)$

∴ $س^{٢} = س + ٢$ ∴ $س^{٢} - س - ٢ = ٠$

∴ $(س - ٢)(س + ١) = ٠$

∴ إما $س = ٢$ (تحقق) أو $س = -١$ (مرفوض)

∴ مجموعة الحل = $\{٢\}$

تذكر أن

١ الدالة اللوغاريتمية أحادية أى أنه إذا كان $\text{لو}_{أ}\ س = \text{لو}_{أ}\ ص$ فإن $س = ص$

٢ نعوض بالقيم التى نحصل عليها فى المعادلة الأصلية ويكون الحل هو القيمة التى تحقق هذه المعادلة حيث إنه لا معنى للحديث عن لوغاريتم عدد غير موجب.

٢ ∵ لو س² = لو ٤ + لو ٩

∴ لو س² = لو ٣٦

∴ س = ± ٦ (تحقق)

حل آخر ∵ لو س² = لو ٤ + لو ٩

∴ لو س² = لو ٣٦ = لو ٦²

∴ |س| = ٦

∴ مجموعة الحل = {٦ ، -٦}

∴ لو س² = لو (٤ × ٩)

∴ س² = ٣٦

∴ مجموعة الحل = {٦ ، -٦}

∴ لو س² = لو (٤ × ٩)

∴ ٢ لو |س| = ٢ لو ٦

∴ س = ± ٦ (تحقق)

٣ ∵ لو$_٢$ س + لو$_٢$ (س − ٢) = ٣

∴ لو$_٢$ س (س − ٢) = ٣

∴ س² − ٢ س − ٨ = ٠

∴ س² − ٢ س = ٢³ = ٨

∴ (س − ٤) (س + ٢) = ٠

∴ إما س = ٤ (تحقق) أو س = −٢ (مرفوض)

∴ مجموعة الحل = {٤}

٤ ∵ لو س + لو (س + ٢) = لو (س + ٦)

∴ لو س (س + ٢) = لو (س + ٦)

∴ س (س + ٢) = س + ٦

∴ س² + ٢ س − س − ٦ = ٠

∴ س² + س − ٦ = ٠

∴ (س + ٣) (س − ٢) = ٠

∴ إما س = −٣ (مرفوض) أو س = ٢ (تحقق)

∴ مجموعة الحل = {٢}

٥ ∵ لو $\sqrt[3]{٢ س − ١}$ + لو $\sqrt[3]{س − ٢}$ = لو ٣٠ − ١

تذكر أن لو ١٠ = ١

∴ لو $\sqrt[3]{(٢ س − ١) (س − ٢)}$ = لو ٣٠ − لو ١٠

∴ لو $\sqrt[3]{٢ س² − ٥ س + ٢}$ = لو ٣

∴ $\sqrt[3]{٢ س² − ٥ س + ٢}$ = ٣ وبرفع الطرفين للقوة ٣

∴ ٢ س² − ٥ س + ٢ = ٢٧ ∴ ٢ س² − ٥ س − ٢٥ = ٠

∴ (٢ س + ٥) (س − ٥) = ٠

∴ إما س = $\frac{-٥}{٢}$ (مرفوض) أو س = ٥ (تحقق)

∴ مجموعة الحل = {٥}

٦ ∵ $\frac{\text{لو ٤٩} − (\text{لو ٧})^2}{\text{لو ٠,٧}}$ = لو س

∴ $\frac{\text{لو ٧}^2 − (\text{لو ٧})^2}{\text{لو} \frac{٧}{١٠}}$ = لو س

∴ $\frac{\text{٢ لو ٧} − (\text{لو ٧})^2}{\text{لو ٧} − \text{لو ١٠}}$ = لو س

∴ $\frac{\text{لو ٧ (٢ − لو ٧)}}{\text{لو ٧} − ٢}$ = لو س

تذكر أن لو ١٠٠ = لو ١٠² = ٢

∴ − لو ٧ = لو س

∴ لو ٧⁻¹ = لو س

∴ س = ٧⁻¹ = $\frac{١}{٧}$ (تحقق)

∴ مجموعة الحل = {$\frac{١}{٧}$}

مثال ٧

أوجد في ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

١ لو$_٣$ (س² − ٣ س + ٢) − لو$_٣$ (س − ٢) = لو$_٧$ ٤٩

٢ س$^{\text{لو س}}$ = ١٠

٣ لو$_٢$ س = لو$_٤$ ٢٥

٤ لو$_٣$ س × لو$_٩$ س = ٢

٥ لو$_٤$ س + لو$_س$ ٤ = ٢

الحل

١ ∵ لو$_٣$ (س² − ٣ س + ٢) − لو$_٣$ (س − ٢) = لو$_٧$ ٤٩

∴ لو$_٣$ $\frac{\text{س}^2 − ٣ \text{س} + ٢}{\text{س} − ٢}$ = لو$_٧$ ٧²

∴ لو$_٣$ $\frac{(\text{س} − ٢)(\text{س} − ١)}{\text{س} − ٢}$ = ٢ لو$_٧$ ٧

∴ لو$_٣$ (س − ١) = ٢

∴ س − ١ = ٣²

∴ س = ١ + ٩ = ١٠

∴ مجموعة الحل = {١٠}

٢ ∵ س$^{\text{لو س}}$ = ١٠ وبأخذ لوغاريتم الطرفين ∴ لو س$^{\text{لو س}}$ = لو ١٠

∴ لو س × لو س = ١

∴ (لو س)² = ١

∴ لو س = ± ١ وعندما لو س = ١

∴ س = ١٠¹ = ١٠

وعندما لو س = −١

∴ س = ١٠⁻¹ = ٠,١

∴ مجموعة الحل = {١٠ ، ٠,١}

٣ ∵ لو$_٢$ س = لو$_٤$ ٢٥

∴ $\frac{\text{لو س}}{\text{لو ٢}} = \frac{\text{لو ٢٥}}{\text{لو ٤}}$

∴ لو س = $\frac{\text{لو ٥}^2 × \text{لو ٢}}{\text{لو ٢}^2} = \frac{\text{٢ لو ٥} × \text{لو ٢}}{\text{٢ لو ٢}}$ = لو ٥

∴ س = ٥ (تحقق)

∴ مجموعة الحل = {٥}

٤ ∵ لو$_٣$ س × لو$_٩$ س = ٢

∴ لو$_٣$ س × $\frac{\text{لو}_٣ \text{س}}{\text{لو}_٣ ٩}$ = ٢

∴ (لو$_٣$ س)² = ٢ لو$_٣$ ٩ = ٢ لو$_٣$ ٣² = ٤ لو$_٣$ ٣ = ٤

∴ لو$_٣$ س = ± ٢

∴ س = ٣² = ٩ (تحقق) أو س = ٣⁻² = $\frac{١}{٩}$ (تحقق)

∴ مجموعة الحل = {٩ ، $\frac{١}{٩}$}

٥ ∵ لو$_{٤}$ س + لو$_{س}$ ٤ = ٢

∴ (لو$_{٤}$ س)^{٢} + ١ = ٢ لو$_{٤}$ س

∴ ((لو$_{٤}$ س) − ١)^{٢} = ٠

∴ س = ٤ (تحقق)

∴ لو$_{٤}$ س + $\frac{١}{لو_{٤} س}$ = ٢ (بالضرب × لو$_{٤}$ س)

∴ (لو$_{٤}$ س)^{٢} − ٢ لو$_{٤}$ س + ١ = ٠

∴ لو$_{٤}$ س = ١

∴ مجموعة الحل = {٤}

مثال ٨

أوجد في ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

١ لو ٤٩ × لو $\sqrt[٣]{٨}$ = لو ٣٤٣ × لو س^{٢}

٢ لو س^{٢} = (لو س)^{٢}

٣ (لو س + ١) (لو $\frac{س}{١٠}$) = ٣

٤ لو س − لو$_{س}$ ١٠٠ = ١

الحل

١ ∵ لو ٤٩ × لو $\sqrt[٣]{٨}$ = لو ٣٤٣ × لو س^{٢}

∴ لو س^{٢} = $\frac{لو ٤٩ × لو \sqrt[٣]{٨}}{لو ٣٤٣}$ = $\frac{لو ٧^{٢} × لو \sqrt[٣]{٢^{٣}}}{لو ٧^{٣}}$ = $\frac{٢ لو ٧ × لو ٢^{\frac{٣}{٢}}}{٣ لو ٧}$

∴ لو س^{٢} = $\frac{٢}{٣}$ × $\frac{٣}{٢}$ لو ٢

∴ لو س^{٢} = لو ٢

∴ س^{٢} = ٢

∴ س = $\sqrt{٢}$ (تحقق)

∴ مجموعة الحل = { $\sqrt{٢}$ }

٢ ∵ لو س^{٢} = (لو س)^{٢}

∴ ٢ لو س = (لو س)^{٢} حيث س > ٠

∴ (لو س)^{٢} − ٢ لو س = ٠

∴ لو س (لو س − ٢) = ٠

∴ إما لو س = ٠ ومنها س = (١٠)^{صفر} = ١ (تحقق)

أو لو س = ٢ ومنها س = ١٠^{٢} = ١٠٠ (تحقق)

∴ مجموعة الحل = {١ ، ١٠٠}

٣ ∵ (لو س + ١) (لو $\frac{س}{١٠}$) = ٣

∴ (لو س + ١) (لو س − لو ١٠) = ٣

∴ (لو س + ١) (لو س − ١) = ٣

∴ (لو س)^{٢} − ١ = ٣

∴ (لو س)^{٢} = ٤

∴ لو س = ± ٢

∴ إما لو س = ٢ ومنها س = ١٠^{٢} = ١٠٠ (تحقق)

أو لو س = −٢ ومنها س = ١٠$^{-٢}$ = ٠٫٠١ (تحقق)

∴ مجموعة الحل = {١٠٠ ، ٠٫٠١}

٤ ∵ لو س − لو$_{س}$ ١٠٠ = ١

∴ لو س − لو$_{س}$ ١٠^{٢} = ١

∴ لو س − ٢ لو$_{س}$ ١٠ = ١

∴ لو س − $\frac{٢}{لو س}$ = ١ (بالضرب × لو س)

∴ (لو س)^{٢} − ٢ = لو س

∴ (لو س)^{٢} − لو س − ٢ = ٠

∴ (لو س + ١) (لو س − ٢) = ٠

∴ إما لو س = −١ ومنها س = ١٠$^{-١}$ = ٠٫١ (تحقق)

أو لو س = ٢ ومنها س = ١٠^{٢} = ١٠٠ (تحقق)

∴ مجموعة الحل = {١٠٠ ، ٠٫١}

مثال ٩

إذا كان :

١ س ص = ١٦ **فأثبت أن :** ٣ لو$_{٢}$ س + ٤ لو$_{٢}$ ص − لو$_{٢}$ س ص^{٢} = ٨

٢ س^{٢} + ص^{٢} = ٦ س ص **فأثبت أن :** ٢ لو (س + ص) = لو س + لو ص + ٣ لو ٢

الحل

١ الطرف الأيمن = لو$_{٢}$ س^{٣} + لو$_{٢}$ ص^{٤} − لو$_{٢}$ س ص^{٢}

= لو$_{٢}$ $\frac{س^{٣} × ص^{٤}}{س ص^{٢}}$ = لو$_{٢}$ س^{٢} ص^{٢} = لو$_{٢}$ (س ص)^{٢}

= ٢ لو$_{٢}$ س ص = ٢ لو$_{٢}$ ١٦ = ٢ لو$_{٢}$ ٢^{٤} = ٢ × ٤ لو$_{٢}$ ٢

= ٨ = الطرف الأيسر.

٢ ∵ س^{٢} + ص^{٢} = ٦ س ص

∴ س^{٢} + ص^{٢} + ٢ س ص = ٦ س ص + ٢ س ص

∴ س^{٢} + ٢ س ص + ص^{٢} = ٨ س ص

∴ (س + ص)^{٢} = ٨ س ص وبأخذ لوغاريتم الطرفين

∴ لو (س + ص)^{٢} = لو ٨ س ص

∴ ٢ لو (س + ص) = لو ٨ + لو س + لو ص = لو ٢^{٣} + لو س + لو ص

= لو س + لو ص + ٣ لو ٢

مثال ⑩

إذا كانت درجة قوة الزلزال (د) على مقياس ريختر تحسب بالعلاقة $د = لو \frac{ش}{ش_0}$ حيث ش هى شدة الزلزال ، $ش_0$ هى الشدة الابتدائية وتعرف بالمقياس الصفرى لشدة الزلزال وهى أقل شدة لحركة الأرض بحيث لا يسجلها المقياس.

١ أوجد على مقياس ريختر درجة الزلزال الذى شدته تعادل $١٫٦ \times ١٠^{٨}$ مرة قدر الشدة الابتدائية.

٢ إذا كانت درجة الزلزال = ٧ درجات بمقياس ريختر أوجد كم مرة تعادل شدة هذا الزلزال من الشدة الابتدائية.

الحل

١ ∵ $د = لو \frac{ش}{ش_0}$ ، $ش = ١٫٦ \times ١٠^{٨} ش_0$

∴ $د = لو \frac{١٫٦ \times ١٠^{٨} ش_0}{ش_0} = لو (١٫٦ \times ١٠^{٨}) \simeq ٨٫٢$

أى أن : درجة الزلزال على مقياس ريختر = ٨٫٢

٢ ∵ درجة الزلزال (د) = ٧ ∴ $٧ = لو \frac{ش}{ش_0}$

∴ $\frac{ش}{ش_0} = ١٠^{٧}$ ∴ $ش = ١٠^{٧} \times ش_0$

أى أن : شدة الزلزال تعادل ... ... ١٠ مرة قدر الشدة الابتدائية.

معلومة إثرائية

لأى عدد $س \in ص_+$ إذا كان : $ن \leq لو س < ن + ١$

فإن عدد أرقام العدد $س = ن + ١$ حيث $ن \in ط$

فمثلًا : • لإيجاد عدد أرقام العدد $٥^{٣}$

∵ $لو ٥^{٣} = ٢٫٠٩٧$ أى أن : $٢ \leq لو ٥^{٣} < ٣$

∴ عدد أرقام العدد $٥^{٣}$ = ٣ أرقام

• لإيجاد عدد أرقام العدد $٣^{١٧}$

∵ $لو ٣^{١٧} = ٨٫١١١$ أى أن : $٨ \leq لو ٣^{١٧} < ٩$

∴ عدد أرقام العدد $٣^{١٧}$ = ٩ أرقام

تمارين 11

على بعض خواص اللوغاريتمات

اختبر نفسك

• فهم • تطبيق • مستويات عليا • من أسئلة الكتاب المدرسي

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① $لو_٢ ٥ \times لو_٥ ٢ =$ ....

(أ) ١ (ب) ١٠ (جـ) $لو_٢ ١٠$ (د) $لو_٥ ١٠$

② $١ + لو ٢ =$ ....

(أ) لو ٥ (ب) لو ٢ (جـ) لو ٢٠ (د) − لو ٥

③ قيمة المقدار : $٢ لو ٢٥ + لو \frac{٨}{١٥} + ٢ لو ٣ - لو ٣٠ =$ ....

(أ) ٦ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) −١

④ أى العبارات الآتية صحيحة ؟

(أ) $لو ٢ - لو \sqrt{٢} = لو \sqrt{٢}$ (ب) $لو_٢ ١ =$ صفر

(جـ) $لو \frac{٧}{٥} = \frac{لو ٧}{لو ٥}$ (د) $لو ٧ - لو ٢ = لو ٥$

⑤ إذا كان : $لو س - لو ٢ = لو ٤$ فإن : س = ...

(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ١٦

⑥ إذا كان : $لو س + لو ٥ = ٢$ فإن : س = ...

(أ) ٢ (ب) ٨ (جـ) ١٧ (د) ٢٠

⑦ $٢ لو_٦ ٣ + ٣ لو_٦ ٢ =$ ....

(أ) $لو_٦ ٦$ (ب) $٦ لو_٦ ٦$ (جـ) $لو_٦ ٧٢$ (د) $لو_٦ ٣٦$

⑧ $لو_ب أ \times لو_جـ ب \times لو_د جـ \times لو_أ د =$ ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) أ ب جـ د (د) أ د

⑨ $\sqrt{٣^{لو ٤} \times ٣^{لو ٢٥} + ٧^{لو_٧ ١٦}} =$ ....

(أ) ٩ (ب) ٢٥ (جـ) ٥ (د) ١٦

⑩ $\frac{١}{لو_٢ ٣٠} + \frac{١}{لو_٣ ٣٠} + \frac{١}{لو_٥ ٣٠} =$ ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٥ (د) ٣٠

(١١) ٢ لو$_{٢}$ س + لو$_{٢}$ ص − لو$_{٢}$(س ص) = ...

(أ) لو س (ب) لو$_{٢}$ س (جـ) لو$_{٢}$ س ص (د) لو$_{٢}$ س^{٢}

(١٢) أبسط صورة للمقدار لو$_{ب}$ أ^{٢} × لو$_{جـ}$ ب^{٢} × لو$_{أ}$ جـ = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٦ (د) ١

(١٣) لو $\left(\frac{أ^{٢}}{ب\,جـ}\right)$ = ... حيث أ ، ب ، جـ ∈ ح$^{+}$

(أ) ٢ لو أ + لو ب + لو جـ (ب) ٢ لو أ − لو ب + لو جـ

(جـ) ٢ لو أ − لو ب − لو جـ (د) ٢ (لو أ − لو ب − لو جـ)

(١٤) إذا كان : س − ٢ = لو$_{٢}$ ٣ فإن : س = ...

(أ) لو$_{٢}$ ٦ (ب) لو$_{٢}$ ٩ (جـ) لو$_{٢}$ ١٢ (د) لو$_{٢}$ ١٨

(١٥) لو$_{أب}$ $\frac{١}{أ}$ + لو$_{أب}$ $\frac{١}{ب}$ = ...

(أ) $\frac{أ}{ب}$ (ب) $\frac{ب}{أ}$ (جـ) −١ (د) ١

(١٦) المقدار $\frac{٣ \text{ لو } ٢}{\text{لو } ٤ + \text{لو } ٢}$ يكافئ المقدار ....

(أ) لو$_{٢}$ ٢ (ب) لو$_{٧}$ ٢ (جـ) لو$_{١٢}$ ٨ (د) لو$_{٧}$ ٨

(١٧) إذا كان : ٢^{س} = ٥ فإن : س = ...

(أ) ٣ (ب) لو$_{٢}$ ٥ (جـ) لو$_{٥}$ ٢ (د) $\frac{٥}{٢}$

(١٨) مجموعة حل المعادلة : لو$_{٢}$ (٢$^{س − ٤}$) = ٥ − س هي ....

(أ) {٤} (ب) {٤.٥} (جـ) {٥} (د) {٥.٤}

(١٩) مجموعة حل المعادلة : لو$_{\sqrt{٢}}$ س + لو$_{\sqrt{٢}}$ (س + ١) = ٢ هي ....

(أ) {١ ، ٢} (ب) {−٢} (جـ) {١ ، −٢} (د) {١}

(٢٠) مجموعة حل المعادلة : ٢ لو ٢ − لو س = لو (س + ٣) − لو ٧ هي ....

(أ) {٧} (ب) {٤} (جـ) {٧ ، ٤} (د) ∅

(٢١) إذا كان : لو$_{ب}$ س + لو$_{ب}$ ٣ = لو$_{ب}$ ٢٧ − ١ فإن قيمة س = ... بدلالة ب

(أ) ٩ ب (ب) $\frac{١}{٩}$ ب (جـ) $\frac{٩}{ب}$ (د) $\frac{١}{٩ ب}$

(٢٢) إذا كان : لو$_{٢}$ س = لو$_{٤}$ ٩ فإن : س = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٩ (د) ١٢

(٢٣) مجموعة حل المعادلة : لو$_{٢}$ س + لو$_{٤}$ س = ٣ هي ....

(أ) {٢} (ب) {٤} (جـ) {٢ ، ٤} (د) {٠}

(٢٤) إذا كان : لو$_{٦}$ س + لو$_{٦}$ س^{٢} = ٦ فإن : س = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٢١٦

(٢٥) مجموعة حل المعادلة : لو س^{٢} − (لو س)^{٢} = ٠ هي ....

(أ) {١} (ب) {١ ، ١٠} (جـ) {١ ، ١٠٠} (د) {١٠٠}

(٢٦) مجموعة حل المعادلة : (لو$_{٣}$ س)^{٢} − لو$_{٣}$ س^{٣} + ٢ = ٠ هي ....

(أ) {٣} (ب) {٣ ، ٩} (جـ) {٩} (د) {١ ، ٢}

(٢٧) مجموعة حل المعادلة : لو$_{٢}$ س − ٢ لو$_{س}$ ٢ = ١ في ح هي ....

(أ) {٨ ، ٢} (ب) {٨ ، $\frac{١}{٢}$} (جـ) {٩ ، $\frac{١}{٢}$} (د) {٨}

(٢٨) إذا كان : س$^{\text{لو}_{٢} س}$ = لو$_{٢}$ ١٦ فإن : س = ...

(أ) ٢ (ب) −٢ (جـ) ± ٢ (د) ٤

(٢٩) أي العبارات الآتية صحيحة ؟

(أ) لو ٣ + لو ٢ = لو ٦ (ب) ١ − لو ٥ = ٢

(جـ) لو ٢ × لو ٢ = لو ٤ (د) لو (١ + ٢ + ٣) = لو ١ + لو ٢ + لو ٣

(٣٠) إذا كان : س = $\sqrt{ص\,ع}$ حيث س ، ص ، ع أعدادًا موجبة فإن : لو ص = ...

(أ) $\frac{\text{لو } س^{٢}}{\text{لو } ع}$ (ب) $\frac{٢ \text{ لو } س}{\text{لو } ع}$

(جـ) ٢ لو س − لو ع (د) ٢ (لو س − لو ع)

(٣١) إذا كان : لو ٢٣ = أ فإن : لو ٢٣٠٠ = ...

(أ) أ + ٢ (ب) أ − ٢ (جـ) ١٠٠ أ (د) أ^{٢}

(٣٢) إذا كان : لو$_{٣}$ ٥ = أ فإن : لو$_{٩}$ ٥ = ...

(أ) أ^{٢} (ب) ٢ أ (جـ) $\frac{١}{أ + ٢}$ (د) $\frac{أ}{أ + ١}$

(٣٣) إذا كان : لو ٣ = س ، لو ٤ = ص فإن : لو ١٢ = ...

(أ) س + ص (ب) س ص (جـ) س − ص (د) لو س + لو ص

(٣٤) أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في أ فيه : أ ب = (لو$_{٤}$ ٣) سم ، أ جـ = (لو$_{٣}$ ٦٤) سم

فإن مساحة Δ أ ب جـ = ... سم^{٢}

(أ) ١,٥ (ب) ٣ (جـ) لو ١٦ (د) لو$_{٢}$ ١٦

(٣٥) إذا كان $\frac{\text{لو س}}{\text{لو ٥}} = \frac{\text{لو ٣٦}}{\text{لو ٦}} = \frac{\text{لو ٦٤}}{\text{لو ص}}$ فإن : س + ص = ...

(أ) ٢٥ (ب) ٨ (جـ) ١٧ (د) ٣٣

(٣٦) إذا كان : ل ، م هما جذرا المعادلة : ٣ $س^{٢}$ − ١٦ س + ١٢ = ٠

فإن قيمة : $\text{لو}_{٢}$ ل + $\text{لو}_{٢}$ م = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ١٢ (د) ١٦

(٣٧) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : $س^{٢}$ + س $\text{لو}_{٣}$ أ = ٩ وكان : $\frac{ل + م}{ل م} = \frac{١}{٢}$

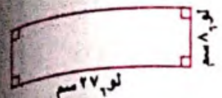
فإن : أ = ...

(أ) ١٢ (ب) ٢٤ (جـ) ٢٧ (د) ٧٢٩

(٣٨) مجموعة حل المعادلة : لو (س + ٥) = لو س + لو ٥ في ح هي ....

(أ) {٥} (ب) {٤} (جـ) $\{\frac{٤}{٥}\}$ (د) $\{\frac{٥}{٤}\}$

(٣٩) في الشكل المقابل :



محيط الشكل = ... سم

(أ) ٢ $\text{لو}_{٢}$ ٣٥ (ب) $\text{لو}_{٢}$ ٧٠ (جـ) ٢ (د) ٦

(٤٠) لو (حا θ) + لو (قا θ) = ... حيث θ ∈]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[

(أ) ١ (ب) صفر (جـ) ٢ (د) −١

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ بدون استخدام حاسبة الجيب أوجد قيمة كل مما يأتي :

(١) لو ٢ + لو ٥	«١»	(٢) $\text{لو}_{٥}$ ١٥ − $\text{لو}_{٥}$ ٣	«١»
(٣) $\text{لو}_{٢}$ ٥ × $\text{لو}_{٥}$ ٢	«١»	(٤) $\text{لو}_{٣}$ ٨١ × $\text{لو}_{٩}$ ٣	«٢»
(٥) $\text{لو}_{٧}$ ١٥ + $\text{لو}_{٧}$ ١٤ − $\text{لو}_{٧}$ ١٠٥	«١»	(٦) لو ٥٤ − ٣ لو ٣ − لو ٢	«صفر»
(٧) $\text{لو}_{٤}$ $\text{لو}_{٣}$ $\text{لو}_{٢}$ ٤	«صفر»	(٨) ١ + لو ٣ − لو ٢ − لو ١٥	«صفر»

(٩) لو ٩٠٠٠ − لو $\frac{٢٧}{١٦}$ + لو $\frac{٥}{٨}$ ١٥ − لو $\frac{١}{١٢}$ «صفر»

(١٠) $\text{لو}_{١٠}$ $\frac{٧}{١٧٠}$ − $\text{لو}_{١٠}$ $\frac{٣٥}{١٨}$ + $\text{لو}_{١٠}$ $\frac{١٧}{٣٦}$ «−١»

(١١) ٢ لو ٢٥ + لو $\left(\frac{١}{٢} + \frac{١}{٥}\right)$ + ٢ لو ٣ − لو ٣٠ «٢»

(١٢) لو ٢٥ + $\frac{\text{لو ٨} \times \text{لو ١٦}}{\text{لو ٦٤}}$ «٢»

(١٣) $\frac{\text{لو}_{٢} ٢٥ + \text{لو}_{٢} ٤}{\text{لو}_{٢} ٢٠ - \text{لو}_{٢} ٢}$	«٢»	(١٤) $\frac{(\text{لو ٢})^{٢} - \text{لو ٢}^{٢}}{\text{لو ٢} - \text{لو ١٠٠}}$	«لو ٢»
(١٥) $\text{لو}_{٣}$ $\text{لو}_{٢}$ $\frac{١ - \text{لو}_{٢} ٢}{(\frac{٣}{٢})}$	«١−»	(١٦) $\text{لو}_{٢}$ (لو $س^{١٥}$) − $\text{لو}_{٢}$ (لو $س^{٣}$)	«٢»

(١٧) لو$_{أ ب جـ}$ أ + لو$_{أ ب جـ}$ ب + لو$_{أ ب جـ}$ جـ «١»

(١٨) $\frac{١}{٢}$ $\text{لو}_{٢}$ أ + $\frac{١}{٢}$ $\text{لو}_{٢}$ ب + ٢ $\text{لو}_{٢}$ جـ − $\text{لو}_{٢}$ $\sqrt{أ ب}$ − $\text{لو}_{٢}$ ٢ $جـ^{٢}$ «−١»

(١٩) $\frac{١}{\text{لو}_{٣} ١٢} + \frac{١}{\text{لو}_{٨} ١٢} + \frac{١}{\text{لو}_{٩} ١٢}$ «٢»

٢ بدون استخدام حاسبة الجيب أثبت كلًا مما يأتي :

(١) ٢ $\text{لو}_{٣}$ ١٥ + $\text{لو}_{٣}$ $\frac{٧}{٣}$ − $\text{لو}_{٣}$ ١٧٥ = ٢ $\text{لو}_{٣}$ $\sqrt{٣}$

(٢) $\text{لو}_{٧}$ $\frac{٣}{١١}$ + $\text{لو}_{٧}$ $\frac{٢٩٧}{٩٨}$ − (٢ $\text{لو}_{٧}$ ٢ × $\text{لو}_{٧}$ $\frac{٩}{٧}$) = −١

(٣) (١ − لو ٥) (٢ − لو ٢٥) = ٢ $(\text{لو ٢})^{٢}$

(٤) $\frac{\text{لو ٧٢٩} - \text{لو ٦٤}}{\text{لو ٩} - \text{لو ٤}} = ٣$

(٥) $\frac{(\text{لو ٥})^{٢} - \text{لو ٥}^{٢}}{\text{لو ٥} - \text{لو ١٠٠}} = ١ - \text{لو ٢}$

(٦) $\frac{\text{لو}_{٢} \text{لو}_{٥} \text{لو}_{٣} ٢٤٣}{\text{لو}_{٧} \text{لو}_{٣} \text{لو}_{٢} ٥١٢}$ = صفر

٣ باستخدام حاسبة الجيب أوجد قيمة س لأقرب رقمين عشريين في كل مما يأتي :

(١) $٥^{س} = ١٣$	«١,٥٩»	(٢) $٣^{س + ٢} = ٦$	«−٠,٣٧»
(٣) $٣^{٧ - ٢ س} = ١٣,٤$	«٢,٣٢»	(٤) $٧^{س + ١} = ٣^{س - ٢}$	«−٤,٨٩»
(٥) $٣^{٢ س - ٣} = ١١^{١ - س}$	«١,٢٤»	(٦) $س^{١,٦} = ٩٤,٥$	«± ١٧,١٧»
(٧) $\frac{٥}{(١٠)^{٢ س}} = ٧$	«−٠,٠٧»	(٨) $٧^{س + ١} + ٧^{س - ١} = ٣٠٠$	«١,٩٢»
(٩) $٢^{س} \times ٣ = ٢ \times ٣^{س + ٢}$	«−٤,٤٢»	(١٠) $٣ \times ٢^{س - ١١} = ٨ \times ٦^{٥ س - ١}$	«−٠,٨٢»
(١١) $٢٥^{س} - ٢٧ \times ٥^{س} + ٥٠ = ٠$	«٠,٤٣ ، ٢,٠٠»	(١٢) $٨^{٣ - ٥ س} \div ٧^{٤ + س} = ٢$	«−٠,١٨»
(١٣) $\text{لو}_{٥} (٤^{س + ١})$ = س − ٢	«−٢٠,٦٤»		

٤ إذا كان : $\text{لو}_{٣}$ ٥ ≃ ١,٤٦٥ فأوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة :

(١) $\text{لو}_{٣}$ ١٥ (٢) $\text{لو}_{٣}$ ١٣٥ (٣) $\text{لو}_{٣}$ $\frac{٥}{٩}$

5 إذا كان لو ٢ = س ، لو ٣ = ص أوجد بدلالة س ، ص كلًا من :

(١) لو ٦ (٢) $\text{لو}_{١٨}$ ١٢

6 ناقش صحة كل مما يأتي مع تصحيح الخطأ منها ، [حيث س ، ص ∈ $ح^+$ ، ا ، ب ∈ $ح^+$ - {١} في المسائل (٣) إلى (٧)]

(١) $\text{لو}_{س}$ $س^{س}$ = س لكل س ∈ ح

(٢) لو $س^{ن}$ = ن لو س لكل س ∈ ح

(٣) $\text{لو}_{ا}$ (س + ص) = $\text{لو}_{ا}$ س + $\text{لو}_{ا}$ ص

(٤) $\text{لو}_{ا}$ (س + ص) = $\text{لو}_{ا}$ س × $\text{لو}_{ا}$ ص

(٥) $\text{لو}_{ا}$ (س ص) = $\text{لو}_{ا}$ س + $\text{لو}_{ا}$ ص

(٦) $\text{لو}_{ا}$ $(\frac{س}{ص})$ = $\text{لو}_{ا}$ س + $\text{لو}_{ا}$ $ص^{-١}$

(٧) $\frac{\text{لو}_{ا} س}{\text{لو}_{ا} ص} = \frac{\text{لو}_{ب} س}{\text{لو}_{ب} ص}$

(٨) إذا كان : س < صفر فإن : $\text{لو}_{ا}$ $س^{٤}$ = ٤ $\text{لو}_{ا}$ س ، ا ∈ $ح^+$ - {١}

7 أوجد في ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

(١) $\text{لو}_{٣}$ (س + ٦) = ٢ $\text{لو}_{٣}$ س — {٣}

(٢) $\text{لو}_{٤}$ س + $\text{لو}_{٤}$ (س + ٦) = ٢ — {-٣ + $\sqrt{٢٣}$}

(٣) $\text{لو}_{٣}$ س + $\text{لو}_{٣}$ $س^{٢}$ = ٣ — {٣}

(٤) $\text{لو}_{٣}$ (س - ١) + $\text{لو}_{٣}$ (س + ١) = $\text{لو}_{٣}$ ٨ — {٣}

(٥) لو (س + ٨) - لو (س - ١) = ١ — {٢}

(٦) $\text{لو}_{٤}$ س = ١ - $\text{لو}_{٤}$ (س - ٣) — {٤}

(٧) $\text{لو}_{٥}$ $س^{٢}$ + $\text{لو}_{٥}$ ٢ = $\text{لو}_{٥}$ ١٨ — {٣ ، -٣}

(٨) $\text{لو}_{٣}$ (٧ $س^{٢}$ - ٤) = ٢ $\text{لو}_{٣}$ س + $\frac{١}{٢}$ $\text{لو}_{٣}$ ٩ — {١}

(٩) ٥ $\text{لو}_{٣}$ (س + ٢) - $\text{لو}_{٣}$ $(س - ١)^{٥}$ = $\text{لو}_{٣}$ ٣٢ — {٤}

(١٠) لو (٨ - س) + ٢ لو $\sqrt{س - ٦}$ = ٠ — {٧}

(١١) لو (س + ٢) + لو (س - ٢) = ١ - لو ٢ — {٣}

(١٢) لو ٧ × لو ٧٢٩ = لو ٤٩ × لو $س^{٢}$ — {٣}

(١٣) $\text{لو}_{٥}$ ($س^{٢}$ + ٦ س + ٩) - $\text{لو}_{٥}$ (س - ١) = $\text{لو}_{٥}$ ٦٢٥ — {٥}

(١٤) لو س = $\frac{(\text{لو } ٣)^{٢} - \text{لو } ٢٧}{\text{لو } ٠,٠٠٣}$ — {٣}

(١٥) $(\text{لو } س)^{٢}$ - لو $س^{٢}$ = ٣ — {١٠٠٠ ، ٠,١}

(١٦) $(\text{لو } س)^{٢}$ + لو $س^{٢}$ + ١ = $(\text{لو } ٥)^{٢}$ — {$\frac{١}{٢٠}$ ، $\frac{١}{٢}$}

(١٧) ٢ $\text{لو}_{س}$ ٢ + $\text{لو}_{س}$ ١٤ - ٣ $\text{لو}_{س}$ ٣ = ٢ + $\text{لو}_{س}$ ٧ — {$\frac{٢}{٣}$}

(١٨) لو $\sqrt[٣]{٢س - ١}$ + لو $\sqrt[٣]{س - ٢}$ = لو ٢٠ - ١ — {٣}

8 أوجد في ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

(١) $\text{لو}_{٢}$ س = $\text{لو}_{٤}$ ٩ — {٣}

(٢) $٣^{\text{لو}_{٣} س}$ = $٢^{\text{لو}_{٢} ٢}$ — {٢}

(٣) $س^{\text{لو } س}$ = ١٠ — {٠,١ ، ١٠}

(٤) $\text{لو}_{٢}$ س = $\text{لو}_{س}$ ٣ — {$\frac{١}{٣}$ ، ٣}

(٥) $س^{\text{لو}_{س} س^{٢}}$ = لو $١٠^{٩}$ — {٣}

(٦) $٢^{٢ \text{لو } س}$ × $٥^{\text{لو } س}$ = ٨٠٠٠ — {١٠٠٠}

(٧) $٢^{(\text{لو } س)^{٢}}$ × ٦٤ = $٢^{\text{لو } س^{٥}}$ — {١٠٠ ، ١٠٠٠}

(٨) لو س - $\frac{١}{\text{لو } س}$ = $\frac{٣}{٢}$ — {$\frac{١}{\sqrt{١٠}}$ ، ١٠٠}

(٩) $\text{لو}_{٢}$ س + $\text{لو}_{س}$ ٢ = ٢ — {٢}

(١٠) لو س - $\text{لو}_{س}$ ١٠٠ = ١ — {$\frac{١}{١٠}$ ، ١٠٠}

(١١) لو $\frac{س}{٢}$ × لو $\frac{٢}{س}$ = -١ — {٢٠ ، ٠,٢}

(١٢) $(\text{لو } س)^{٣}$ = لو $س^{٩}$ — {١ ، ١٠٠٠ ، ٠,٠٠١}

(١٣) $س^{\text{لو } س}$ = ١٠٠ س — {١٠٠ ، $\frac{١}{١٠}$}

(١٤) (لو س + ٢) (لو $\frac{س}{١٠٠}$) = ٥ — {١٠٠٠ ، ٠,٠٠١}

(١٥) $\text{لو}_{٣}$ س + $\text{لو}_{٩}$ $س^{٢}$ + ٣ = صفر — {$\frac{١}{٣\sqrt{٣}}$}

(١٦) $\text{لو}_{٢}$ س = $\text{لو}_{٤}$ (س + ٦) — {٣}

(١٧) $\text{لو}_{٢}$ س + $\text{لو}_{٤}$ س = $\frac{-٣}{٢}$ — {$\frac{١}{٢}$}

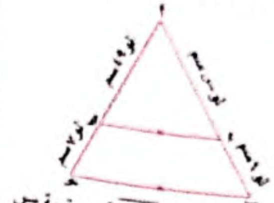
(١٨) $\sqrt{\text{لو}_{٢} س}$ = $\text{لو}_{٢}$ $\sqrt{س}$ — {١ ، ١٦}

(١٩) $\sqrt{س^{\text{لو} \sqrt{س}}}$ = ١٠ — {١٠٠ ، $\frac{١}{١٠٠}$}

(٢٠) $\sqrt{\text{لو } (٩١ + ٣\sqrt{\frac{س}{٢}})}$ = لو $\sqrt{١٠}$ — {٨}

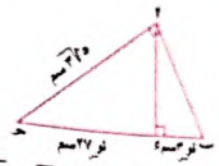
(٢١) لو $\frac{١}{٢^{س} + س - ١}$ = س (لو ٥ - ١) — {١}

٩ في كل من الأشكال الآتية أوجد ما هو مطلوب أسفل كل شكل في أبسط صورة :



① إذا كان $\overline{ءهـ} \parallel \overline{بجـ}$ أوجد قيمة س

② إذا كان مء = لو$_{٨١}$ ٢٤٣ سم ، أوجد طول $\overline{بجـ}$



③ إذا كان $\overline{أب} \perp \overline{أجـ}$ ، $\overline{أء} \perp \overline{بجـ}$

أوجد قيمة س

④ إذا كان $\overrightarrow{أء}$ ينصف ∠ أ أوجد قيمة س

١٠ أوجد مجموعة الحل لكل زوج من المعادلات الآتية آنيًا في ح × ح :

① لو س ص = ١ − لو ٥ ، لو ص^{٣} = ٣ − لو ١٢٥ — {(١ ، ٢)}

② لو$_{٢}$ س + لو$_{٢}$ ص + لو$_{٢}$ ٤ = ٢ + لو$_{٢}$ ٩ ، س + ص = ١٠ — {(١ ، ٩) ، (٩ ، ١)}

③ لو س^{٣} + لو ص^{٢} = ١١ ، لو س^{٢} − لو ص^{٣} = ٢ — {(١٠٠٠ ، ١٠)}

١١ أجب عما يأتي :

① إذا كان : س ص = ٩ $\sqrt{٣}$ فاثبت أن : ٥ لو$_{٣}$ س + ٤ لو$_{٣}$ ص − لو$_{٣}$ س^{٢} ص^{٢} = ٥

② إذا كان : $\frac{١}{٣}$ لو أ = $\frac{١}{٥}$ لو ب = لو جـ فاثبت أن : جـ^{٨} = أ ب

③ إذا كان : لو $\frac{س + ص}{٣}$ = $\frac{١}{٢}$ (لو س + لو ص) فاثبت أن : $\frac{س}{ص}$ + $\frac{ص}{س}$ = ٧

④ إذا كان : ٣$^{لو_{٢} س}$ = أ فاثبت أن : لو$_{أ}$ س معكوس ضربي للعدد لو$_{٢}$ ٣

ثم أوجد قيمة : لو$_{٩}$ س — ٢٠

⑤ أثبت أن : لو$_{أ^{٢}}$ ب^{٢} = لو$_{أ}$ ب ثم أثبت أن : لو$_{أ}$ ب^{٢} + لو$_{أ^{٢}}$ ب^{٤} = ٤ لو$_{أ}$ ب

⑥ إذا كان : ٣ لو س + ٤ لو ص − لو س ص^{٢} = ٢ (لو ٢ + لو ٣) فاثبت أن : س = $\frac{٦}{ص}$

⑦ إذا كان : س^{٢} + ص^{٢} = ٨ س ص

أثبت أن : ٢ لو (س + ص) = ١ + لو س + لو ص

⑧ إذا كان : لو (س + ص) = $\frac{١}{٢}$ (لو س + لو ص) + لو ٢ أثبت أن : س = ص

⑨ إذا كان : لو س ص^{٢} = ١ ، لو س^{٢} ص = ١ أوجد قيمة : لو س ص — $\frac{٢}{٣}$

⑩ أثبت أن : لو$_{ص}$ س = $\frac{١}{لو_{س} ص}$

ثم أوجد مجموعة حل المعادلة : لو$_{٣}$ س + ٢ لو$_{س}$ ٣ = ٤ — {٣ ، ٢٧}

⑪ إذا كانت : س ، ص ، ع أعدادًا صحيحة موجبة

وكان $\frac{٤}{لو_{س} ص}$ + $\frac{٧}{لو_{ع} ص}$ = ٣ لو$_{ص}$ ع أوجد قيمة : س ع — ١٠

⑫ إذا كان : ص = أ$^{لو_{أ} س}$ فاثبت أن : ص = س ومن ذلك أوجد قيمة : ٣$^{\frac{١}{٢} لو_{٣} ٤٩}$ — ٧

⑬ أثبت أن : لو$_{أ^{ص}}$ أ^{س} = $\frac{س}{ص}$ ومن ذلك أوجد قيمة : لو$_{\sqrt{٥}}$ ١٢٥ × لو$_{٨}$ $\sqrt{٢}$ — $\frac{١}{٢}$

⑭ أثبت أن : لو$_{ب}$ أ = $\frac{لو أ}{لو ب}$

ومن ثم استخدم العلاقة في إثبات أن : (لو$_{أ}$ أب)$^{-١}$ + (لو$_{ب}$ أب)$^{-١}$ = ١

⑮ إذا كان : لو$_{جـ}$ أ + لو$_{جـ}$ ب − ٢ لو$_{جـ}$ $\frac{أ + ب}{٢}$ = ٠ فاثبت أن : أ − ب = ٠

⑯ إذا كان : (س$^{لو س}$)^{٢} × س^{٣} = ١٠^{٥} فاوجد قيمة : س — ١٠ ، $\frac{١}{١٠٠ \sqrt{١٠}}$

⑰ بوضع أ^{س} = ص في المعادلة : أ^{س} − أ$^{-س}$ = ١

أوجد قيمة ص ومن ذلك أثبت أن : س = لو$_{أ}$ $\frac{١ + \sqrt{٥}}{٢}$ — $\frac{١ + \sqrt{٥}}{٢}$

⑱ إذا كانت : د (س) = لو س^{٢}

أوجد مجموعة حل المعادلة : د (س + ١) + د (س − ١) = د (٣) — {٢ ، −٢}

⑲ ابحث نوع الدالة د : د (س) = لو ($\sqrt{س^{٢} + ١}$ − س) من حيث كونها زوجية أم فردية.

⑳ استخدم الآلة الحاسبة في إيجاد عدد أرقام العدد ٤^{٤٧} — ٢٩

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كان : لو س = ع + لو ص فإن : س = ...

(أ) ص × ١٠^{ع} (ب) $\frac{ع}{ص}$

(جـ) ع − (١٠)^{ص} (د) $\frac{١}{ص}$ × (١٠)^{ع}

(٢) $\frac{1}{1 + لو_ب أ + لو_ب جـ} + \frac{1}{1 + لو_جـ أ + لو_جـ ب} + \frac{1}{1 + لو_أ ب + لو_أ جـ} = ...$

(أ) لو_أ ب جـ (ب) لو_ب أ جـ (جـ) لو_جـ أ ب (د) ١

(٣) مجموع جذري المعادلة $(٢٥)^{س} - ١٢ \times ٥^{س} + ٢٧ = ٠$ يساوي ....

(أ) لو_٥ ١٢ (ب) ١٢ (جـ) لو_٥ ٢٧ (د) ٢٧

(٤) $٣^{لو س} = ...$

(أ) ٣ لو س (ب) س لو ٣ (جـ) لو ٣ س (د) $س^{لو ٣}$

(٥) إذا كان أ > ب > جـ > ١ فإن $لو_جـ ب \cdot لو_ب أ \cdot لو_أ جـ = ...$

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) أ ب جـ

(٦) إذا كان $ب^{س} - ٢ ب^{-س} = ١$ حيث ب > ١ فإن : س = ...

(أ) ٢ (ب) لو ٢ (جـ) لو_ب ٢ (د) لو_٢ ب

(٧) إذا كان : $\frac{1}{لو_٢ س} + \frac{1}{لو_٤ س} + \frac{1}{لو_٨ س} + \frac{1}{لو_{١٦} س} = ٥$ فإن : س = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) ٨

(٨) إذا كان : لو أ ∈]٠ ، ١[فإن : أ ∈ ....

(أ)]٠ ، ١[(ب)]١ ، ٢[(جـ)]١ ، ١٠[(د)]١ ، ∞[

(٩) إذا كان : أ ∈]٠ ، ٩] فإن : لو_٣ أ ∈ ....

(أ)]-∞ ، ٢] (ب)]٢ ، ٨١] (جـ) [٢ ، ∞[(د)]-∞ ، ٠]

(١٠) مجموعة حل المعادلة : $٢^{لو_٢ (س + ٤)} + ٣^{لو_٣ (س + ٥)} = (٢٥)^{لو_٥ ٧}$ هي ....

(أ) {٢ ، ٣} (ب) {-٤ ، -٥} (جـ) {٢ ، -٢} (د) {٢٠}

(١١) إذا كانت : س ، ص ∈ ح⁺ - {١} وكان : لو_ص س = لو_س ص فإن : ....

(أ) س = ص (ب) $س = \frac{1}{ص}$ (جـ) س = ±١ (د) أ ، ب معًا.

(١٢) إذا كان : $٣^{أ} = ٥^{ب} = ٧^{جـ}$ فإن : $\frac{أ}{ب} + \frac{أ}{جـ} = ...$

(أ) ٣٥ (ب) ٧ (جـ) لو_٥ ٧ (د) لو_٣ ٣٥

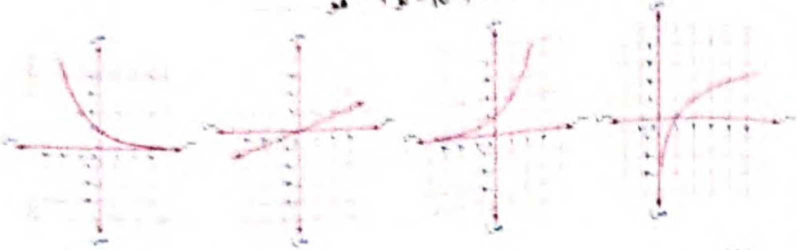
(١٣) إذا كان : لو_٢ س + لو_٤ س + لو_٨ س = ١١ فإن : س = ...

(أ) ٣٢ (ب) ٣٦ (جـ) ٦٤ (د) ١٢١

(١٤) إذا كان : لو_٢ ٣ × لو_٣ ٤ × لو_٤ ٥ × ... × لو_ن (ن + ١) = ١٠ فإن : ن = ...

(أ) ٩ (ب) ١٠ (جـ) ١٠٢٣ (د) ١٠٢٤

(١٥) الشكل البياني الذي يمثل الدالة د : د (س) = لو ٢^س هو ....



(أ) (ب) (جـ) (د)

٢ بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة كل مما يأتي :

(١) $لو_٣ \frac{1}{٢} + لو_٣ \frac{٢}{٣} + لو_٣ \frac{٣}{٤} + ... + لو_٣ \frac{٨٠}{٨١}$ «-٤»

(٢) لو (ظا ١°) + لو (ظا ٢°) + لو (ظا ٣°) + ... + لو (ظا ٨٩°) «صفر»

(٣) لو ظا ١° × لو ظا ٢° × لو ظا ٣° × ... × لو ظا ٧٣° «صفر»

٣ أثبت أن : $لو_س س + لو_{س^٢} س^٢ + لو_{س^٣} س^٣ + ... + لو_{س^ن} س^ن = لو_س س^ن$

تطبيقات حياتية على الوحدة الثالثة

من أسئلة الكتاب المدرسي

١ الربط بالهندسة : إذا كان طول نصف قطر كرة نق يعطى بدلالة الحجم ح من العلاقة نق = $\left(\frac{٣ح}{٤\pi}\right)^{\frac{١}{٣}}$

أوجد الزيادة فى طول نصف القطر عندما يتغير الحجم من $\frac{٣٢}{٣}\pi$ إلى ٣٦π وحدة مكعبة. «١ وحدة طولية»

٢ الربط بالأعداد : إذا كان مجموع الأعداد ٢ + ٤ + ٨ + ١٦ + ... + $٢^{ن}$

يعطى بالعلاقة حـ$_{ن}$ = ٢ ($٢^{ن}$ − ١)

① أوجد مجموع العشرة أعداد الأولى فى النمط. «٢٠٤٦»

② أوجد عدد الحدود فى النمط ابتداء من الحد الأول ليكون مجموعها ١٣١٠٧٠ «١٦»

٣ الربط بالتعليم :

إذا كانت العلاقة بين درجات تذكر أحد الطلاب بالمعلومات التى درسها فى الصف الأول الثانوى وعدد الأشهر (ن) التى تبدأ من نهاية تدريس الصف هى

د (ن) = ٧٠ − ٤ لو$_{٢}$ (ن + ١) فأوجد درجات هذا الطالب :

① فى نهاية تدريس الصف الأول الثانوى (ن = ٠) «٧٠ درجة»

② بعد مرور ٧ أشهر من تدريس الصف الأول الثانوى. «٥٨ درجة»

٤ فى دراسة لقياس مدى احتفاظ الطلبة لما تم دراسته فى إحدى المواد يعاد امتحانهم من فترة إلى أخرى فى نفس المادة. فإذا كانت درجات أحد الطلبة تتبع العلاقة د (ن) = ٨٥ − ٢٥ لو (ن + ١) حيث ن عدد الأشهر بعد اكتمال الدراسة، د (ن) درجة الطالب (نسبة مئوية). أوجد :

① درجة الطالب فى أول امتحان لهذه المادة. «٨٥٪»

② درجة الطالب بعد مرور ٣ أشهر من دراسته لهذه المادة. «٦٩,٩٥٪»

③ درجة الطالب بعد مرور عام كامل من دراسته لهذه المادة. «٥٧,١٥٪»

٥ تطبق إحدى الدول نظامًا ضريبيًا بحيث يدفع الممول الضريبة المستحقة سنويًا وفقًا للدالة :

$$د(س) = \begin{cases} ١٠٪\ س & \text{عندما } س \le ٥٠٠٠ \\ ١٠٪\ س + ١٠٠ \text{ لو } (س - ٤٩٩٩) & \text{عندما } س > ٥٠٠٠ \end{cases}$$

حيث س هى صافى الربح السنوى. أوجد :

① الضريبة المستحقة على أحد الممولين الذين يبلغ صافى ربحهم السنوى ٣٦٠٠ جنيه.

② الضريبة المستحقة على أحد الممولين الذين يبلغ صافى ربحهم السنوى ٨٠٠٠ جنيه.

«٣٦٠ جنيهًا»

٦ الربط بالكيمياء : يعرف الرقم الهيدروجينى للمحلول (PH) على أنه سالب لوغاريتم تركيز الهيدروجين فى المحلول (H^+) أى أن $PH = -\log(H^+)$

① احسب الرقم الهيدروجينى لمحلول تركيز الهيدروجين فيه 10^{-3}

② احسب تركيز الهيدروجين فى محلول رقمه الهيدروجينى 9

٧ الربط بالسكان : إذا كان عدد سكان إحدى المدن يتزايد بمعدل سنوى قدره ٧ ٪

① أوجد العلاقة التى توضح عدد السكان بعد عام.

② بعد كم سنة يتضاعف عدد السكان إذا استمرت الزيادة بهذا المعدل ؟

٨ إذا كان عدد سكان إحدى المدن ابتداءً من عام ٢٠١٠ يُعطى بالعلاقة

ع = ١٠^{٥} $(١,٣)^{ن - ٢٠١٠}$ ، حيث ع عدد السكان ، ن السنة.

① احسب عدد سكان هذه المدينة عام ٢٠١٥

② فى أى سنة يصبح عدد سكان هذه المدينة ١,٤ مليون نسمة ؟ «٣٧١٢٩٣ نسمة»

٩ إذا كانت درجة قوة الزلزال (د) على مقياس ريختر تحسب بالعلاقة د = لو $\frac{ش}{ش_{٠}}$

حيث ش هى شدة الزلزال ، ش$_{٠}$ هى الشدة الابتدائية.

① أوجد بمقياس ريختر درجة الزلزال الذى شدته تعادل ١,٥ × ١٠^{٦} مرة قدر الشدة الابتدائية.

② إذا كانت درجة قوة الزلزال = ٨ درجات بمقياس ريختر أوجد كم مرة تعادل شدة هذا الزلزال من الشدة الابتدائية.

١٠ إذا كانت كفاءة عمل إحدى الآلات تتناقص سنويًا طبقًا للعلاقة ك = ك$_{٠}$ $(٠,٩)^{ن}$ حيث ك كفاءة الآلة ، ك$_{٠}$ الكفاءة الابتدائية للآلة، ن عدد سنوات عمل الآلة. فإذا عُلِمَ أنَّ الآلة تتوقف عن العمل إذا بلغت كفاءتها ٤٠٪ من كفاءتها الابتدائية فما عدد السنوات التى تعملها هذه الآلة قبل أنْ تتوقف عن العمل ؟ «٩ سنوات»

١١ الربط بالصناعة : إذا كانت كفاءة آلة تتناقص سنويًا بمعدل ٥ ٪ فإذا علم أن الآلة تتوقف عن التشغيل إذا بلغت كفاءتها ٦٠ ٪ من كفاءتها الابتدائية.

فما عدد السنوات التى تعملها هذه الآلة ؟ «١٠ سنوات»

ثانيًا التفاضل وحساب المثلثات

الوحدة 3 النهايات والاتصال.

الوحدة 4 حساب المثلثات.

الوحدة 3

النهايات والاتصال

دروس الوحدة

الدرس 1 مقدمة فى النهايات «تقدير النهاية عددياً وبيانياً».

الدرس 2 إيجاد نهاية الدالة جبرياً.

الدرس 3 نظرية (٤) «القانون».

الدرس 4 نهاية الدالة عند اللا نهاية.

الدرس 5 نهايات الدوال المثلثية.

الدرس 6 بحث وجود نهاية للدالة مجزأة المجال.

الدرس 7 الاتصال.

الدرس 1 مقدمة في النهايات
• تقدير النهاية عدديا وبيانيا .

الكميات المعينة وغير المعينة وغير المعرفة

عند إجراء العمليات الحسابية على ح نتعرض إلى واحدة من ثلاثة أنواع من الكميات وهي

١ الكمية المعينة : هي الكمية التي لها ناتج محدد

فمثلاً : $\frac{٨}{٥}$ كمية معينة أي لها ناتج محدد هو ١.٦

أي العدد الحقيقي الذي إذا ضرب في ٥ كان الناتج ٨ هو ١.٦

ومن أمثلة الكميات المعينة $\frac{٢}{٣}$ ، ٥ ، ٤ ، ٧ ، ٣ ، ......

٢ الكمية غير المعينة : هي الكمية التي ليس لها جواب محدد

فمثلاً : $\frac{صفر}{صفر}$ كمية غير معينة أي لها عدد لا نهائي في ح من الإجابات الصحيحة

أي حاصل ضرب أي عدد حقيقي × صفر = صفر

مع ملاحظة أنه توجد كميات أخرى غير معينة سنتعرض لها في دراستنا لاحقًا.

٣ الكمية غير المعرفة : هي الكمية التي ليس لها معنى

فمثلاً : $\frac{٥}{صفر}$ كمية غير معرفة أي ليس لها معنى.

أي لا يوجد عدد حقيقي إذا ضرب × صفر كان الناتج = ٥

وبصفة عامة $\frac{أ}{صفر}$ حيث أ ∈ ح − {٠} كمية غير معرفة.

الرمزان ∞ ، −∞

• الرمز ∞ (لا نهاية) ليس عددًا حقيقيًا ولكنه يعبر عن كمية أكبر من أي عدد حقيقي موجب يمكن إدراكه.

• الرمز −∞ (سالب لا نهاية) ليس عددًا حقيقيًا ولكنه يعبر عن كمية أصغر من أي عدد حقيقي سالب يمكن إدراكه.

• والرمزان ∞ ، −∞ لا تخضع لجميع العمليات الحسابية وتخضع للقواعد الآتية

بفرض أن أ عدد حقيقي فإن

(١) ∞ + أ = ∞ ، −∞ + أ = −∞

(٢) ∞ × أ = ∞ عندما أ > ٠ ، −∞ عندما أ < ٠ ، كمية غير معينة عندما أ = ٠

−∞ × أ = −∞ عندما أ > ٠ ، ∞ عندما أ < ٠ ، كمية غير معينة عندما أ = ٠

فمثلاً : ∞ + ٧ = ∞ ، −∞ + ٢ = −∞

∞ × ١٤ = ∞ ، −∞ × ٧ = −∞

∞ + ∞ = ∞ ، −∞ × ٣٠ = −∞

معلومة إثرائية

الصور غير المعينة سبع صور هي

$\frac{صفر}{صفر}$ ، $\frac{∞}{∞}$ ، ∞ − ∞ ، صفر × ∞ ، (صفر)^صفر ، (∞)^صفر ، (١)^∞

مفهوم نهاية الدالة عند نقطة

مثال توضيحي

إذا أردنا إيجاد قيمة الدالة د : د(س) = $\frac{س^٢ - ١}{س - ١}$ عند س = ١

فإننا نجد أن د(١) = $\frac{١ - ١}{١ - ١}$ = $\frac{صفر}{صفر}$ وهي كمية غير معينة

أي أننا لم نستطع تعيين قيمة للدالة عند س = ١

ولذلك نلجأ إلى دراسة اقتراب د(س) من قيمة معينة كلما اقتربت س من العدد ١

وذلك بإحدى الطريقتين التاليتين

١ تقدير النهاية عدديا

نأخذ قيمًا للمتغير س تقترب شيئًا فشيئًا من العدد ١ من خلال قيم أكبر من ١ وقيم أصغر من ١ دون أن تأخذ س القيمة ١ وملاحظة ما يحدث لقيم د(س) المناظرة كما بالجدول التالي

س تقترب من ١ (من اليمين) ⟵ ⟶ س تقترب من ١ (من اليسار)

س	١.٥	١.٤	١.٣	١.٢	١.١		٠.٩	٠.٨	٠.٧	٠.٦	٠.٥
د(س)	٢.٥	٢.٤	٢.٣	٢.٢	٢.١		١.٩	١.٨	١.٧	١.٦	١.٥

د(س) تقترب من ٢ (من اليمين) ⟵ ⟶ د(س) تقترب من ٢ (من اليسار)

نجد أنه :

• كلما اقتربت س من العدد ١ من جهة اليمين أي (من خلال قيم للمتغير س أكبر من ١) ونكتب رياضيًا ($س \to ١^{+}$) ونقرأ «س تؤول إلى ١ من اليمين»

فإن د (س) تقترب من العدد ٢ ويسمى العدد ٢ بالنهاية اليمنى للدالة

ونكتب رياضيًا $\lim\limits_{س \to ١^{+}} د(س) = ٢$ أو $د(١^{+}) = ٢$

ونقرأ نهاية الدالة عندما ($س \to ١^{+}$) تساوى ٢

• وكلما اقتربت س من العدد ١ من جهة اليسار أي (من خلال قيم للمتغير س أصغر من ١)

ونكتب رياضيًا ($س \to ١^{-}$) ونقرأ «س تؤول إلى ١ من اليسار»

فإن : د (س) تقترب من العدد ٢ ويسمى العدد ٢ بالنهاية اليسرى للدالة.

ونكتب رياضيًا : $\lim\limits_{س \to ١^{-}} د(س) = ٢$ أو $د(١^{-}) = ٢$

ونقرأ نهاية الدالة عندما ($س \to ١^{-}$) تساوى ٢

تعريف

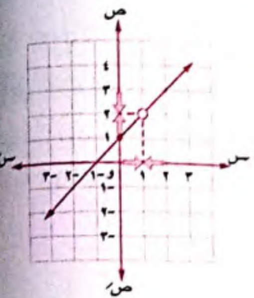
إذا كانت قيمة الدالة د تقترب من قيمة وحيدة ل عندما تقترب س من أ من جهتى اليمين واليسار

فإن نهاية د (س) تساوى ل ونكتب رمزيًا $\lim\limits_{س \to أ} د(س) = ل$

أى أنه إذا كان : $د(أ^{-}) = د(أ^{+}) = ل$ فإن : $\lim\limits_{س \to أ} د(س) = ل$

ففى المثال السابق : ∵ $د(١^{+}) = د(١^{-}) = ٢$ ∴ $\lim\limits_{س \to ١} د(س) = ٢$

٢ تقدير النهاية بيانيًا



∵ $د(س) = \frac{س^{٢} - ١}{س - ١}$ دالة غير معرفة عند س = ١

∴ $د(س) = \frac{(س - ١)(س + ١)}{(س - ١)} = س + ١$

أى أنها تمثل بخط مستقيم به ثقب عند النقطة التى إحداثيها السينى = ١ كما بالشكل المقابل

ومن الرسم نلاحظ أنه : عند س $\xrightarrow{\text{تؤول إلى}}$ ١ (من اليمين واليسار)

فإن : د (س) $\xrightarrow{\text{تؤول إلى}}$ ٢ أى أن : $\lim\limits_{س \to ١} د(س) = ٢$

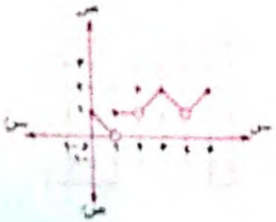
ملاحظات

١ عند إيجاد $\lim\limits_{س \to أ} د(س)$ ليس من الضرورى أن تكون الدالة معرفة عند س = أ ، فقط يجب أن تكون معرفة فى فترة على يسار أ وفترة أخرى على يمين أ

٢ إذا كانت : $د(أ^{+}) \neq د(أ^{-})$ فإن $\lim\limits_{س \to أ} د(س)$ غير موجودة

ملاحظات هامة عند إيجاد نهاية الدالة بيانيًا

١ فى الشكل المقابل نجد أن :



أولًا : عند س = صفر :

$\lim\limits_{س \to ٠^{+}} د(س) = ١$ ، $\lim\limits_{س \to ٠^{-}} د(س)$

، $\lim\limits_{س \to ٠} د(س)$ غير موجودة

[لأن الدالة غير معرفة على يسار س = صفر]

ثانيًا : عند س = ١ : $\lim\limits_{س \to ١^{+}} د(س) = ٠$ ، $\lim\limits_{س \to ١^{-}} د(س) = ١$

∴ $\lim\limits_{س \to ١} د(س)$ غير موجودة

[لأن النهاية اليمنى ≠ النهاية اليسرى]

لاحظ أنه : بالرغم من أن د معرفة عند س = ١ ، د (١) = ١ ، إلا أن النهاية غير موجودة

ثالثًا : عند س = ٢ : $\lim\limits_{س \to ٢^{+}} د(س) = \lim\limits_{س \to ٢^{-}} د(س) = \lim\limits_{س \to ٢} د(س) = ١$

[لاحظ أنه ليس من الضرورى أن قيمة الدالة تساوى قيمة النهاية حيث د (٢) = ٢]

رابعًا : عند س = ٣ :

$\lim\limits_{س \to ٣^{+}} د(س) = \lim\limits_{س \to ٣^{-}} د(س) = \lim\limits_{س \to ٣} د(س) = د(٣) = ٢$

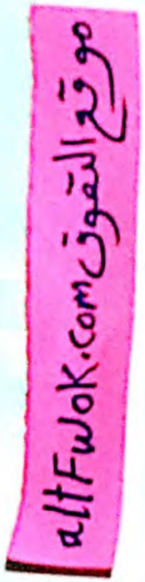
خامسًا : عند س = ٤ : $\lim\limits_{س \to ٤^{+}} د(س) = \lim\limits_{س \to ٤^{-}} د(س) = \lim\limits_{س \to ٤} د(س) = ١$

[لاحظ أن د (٤) غير معرفة أى أن النهاية موجودة على الرغم من أن الدالة غير معرفة]

سادسًا : عند س = ٥ : $\lim\limits_{س \to ٥^{-}} د(س) = ٢$

، $\lim\limits_{س \to ٥^{+}} د(س)$ ، $\lim\limits_{س \to ٥} د(س)$ غير موجودتين

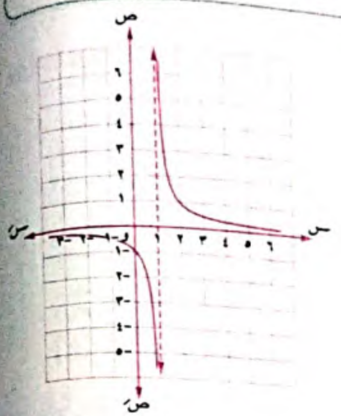
[لأن الدالة غير معرفة على يمين س = ٥]



ملاحظة

من الرسم البيانى للدالة فى الشكل السابق نجد أن :

- النقطة التى تمثل بفجوة لا تؤثر فى وجود نهاية عندها كما فى ثالثًا وخامسًا.
- النقطة التى عندها قفزة تؤدى إلى عدم وجود نهاية كما فى ثانيًا.



[٢] الشكل المقابل يمثل الدالة

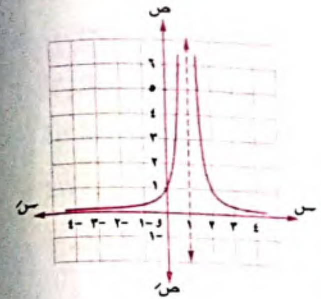
د : د (س) = $\frac{١}{س - ١}$

ونجد أن : د (١⁺) = ∞

، د (١⁻) = - ∞

∴ د (١⁺) ≠ د (١⁻)

∴ $\underset{س \leftarrow ١}{نهـا}$ د (س) غير موجودة



[٣] الشكل المقابل يمثل الدالة

د : د (س) = $\frac{١}{(س - ١)^٢}$

ونجد أن : د (١⁺) = ∞

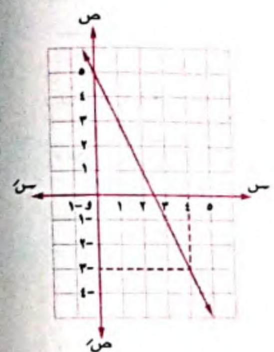
، د (١⁻) = ∞

، $\underset{س \leftarrow ١}{نهـا}$ د (س) = ∞

مثال ١

قدّر : $\underset{س \leftarrow ٤}{نهـا}$ (٥ - ٢ س) بيانيًا وعدديًا

الحل



- بيانيًا : نمثل الدالة الخطية د : د (س) = ٥ - ٢ س

كما بالشكل المقابل.

نلاحظ أنه عندما س ⟵ ٤

فإن : د (س) ⟵ -٣

أى أن : $\underset{س \leftarrow ٤}{نهـا}$ (٥ - ٢ س) = -٣

- عدديًا : نكون جدولاً لقيم د (س) وذلك باختيار قيم س تقترب من العدد ٤ من اليمين واليسار كما يلى :

س	٤٫١	٤٫٠١	٤٫٠٠١	... ٤ ...	٣٫٩٩٩	٣٫٩٩	٣٫٩
د (س)	-٣٫٢	-٣٫٠٢	-٣٫٠٠٢	... -٣ ...	-٢٫٩٩٨	-٢٫٩٨	-٢٫٨

نلاحظ من الجدول أنه كلما تقترب س من العدد ٤ من اليمين أو اليسار

فإن : قيم د (س) تقترب من العدد -٣

∴ $\underset{س \leftarrow ٤}{نهـا}$ (٥ - ٢ س) = -٣

مثال ٢

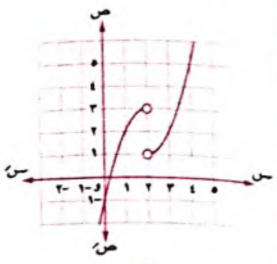
ادرس كلًا من الأشكال الآتية ثم أوجد قيمة :

[١] د (٢)

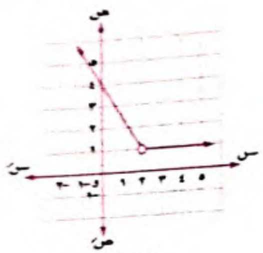
[٢] $\underset{س \leftarrow ٢^+}{نهـا}$ د (س)

[٣] $\underset{س \leftarrow ٢^-}{نهـا}$ د (س)

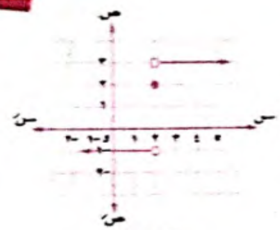
[٤] $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا}$ د (س)



شكل(١)



شكل(٢)



شكل(٣)

الحل

فى شكل(١) : د (٢) غير معرفة

، $\underset{س \leftarrow ٢^+}{نهـا}$ د (س) = ١

، $\underset{س \leftarrow ٢^-}{نهـا}$ د (س) = ٢

، $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا}$ د (س) غير موجودة

فى شكل(٢) : د (٢) غير معرفة

، $\underset{س \leftarrow ٢^+}{نهـا}$ د (س) = ١

، $\underset{س \leftarrow ٢^-}{نهـا}$ د (س) = ١

، $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا}$ د (س) = ١

فى شكل(٣) : د (٢) = ٢ ، $\underset{س \leftarrow ٢^+}{نهـا}$ د (س) = ٢ ، $\underset{س \leftarrow ٢^-}{نهـا}$ د (س) = -١

، $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا}$ د (س) غير موجودة.

مثال ٣

ادرس كلاً من الأشكال الآتية ثم أوجد قيمة :

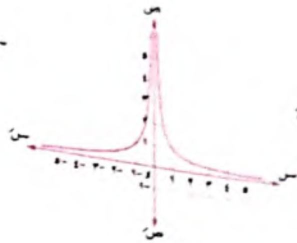
١ د (٠)

٢ د (٠^+)

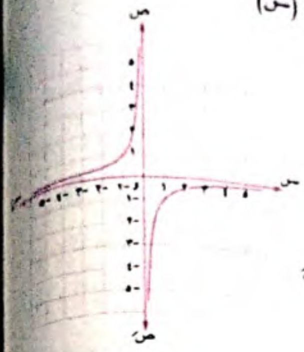
٣ د (٠^-)

٤ نهـــا د (س) حيث س ← ٠

شكل (١)



شكل (٢)



شكل (٣)

الحل

في شكل (١) : د (٠) = ٢ ، د (٠^+) = د (٠^-) = ١ ∴ نهـــا د (س) = ١ (س ← ٠)

في شكل (٢) : د (٠) غير معرفة ، د (٠^+) = د (٠^-) = ∞ ∴ نهـــا د (س) = ∞ (س ← ٠)

في شكل (٣) : د (٠) غير معرفة ، د (٠^+) = −∞ ، د (٠^-) = ∞

∴ نهـــا د (س) غير موجودة. (س ← ٠)

تمارين 12 على مقدمة في النهايات «تقدير النهاية عدديا وبيانيا»

• فهم • تطبيق • مستويات عليا • من أسئلة الكتاب المدرسي

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

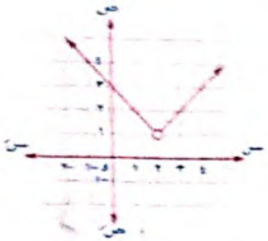
اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ كل الكميات الآتية غير معينة ماعدا ....

(أ) صفر ÷ صفر (ب) ∞ − ∞ (جـ) ∞ + ∞ (د) ∞ − ∞

٢ في الشكل المقابل :

نهـــا د (س) = ... (س ← ٢)



(أ) ١

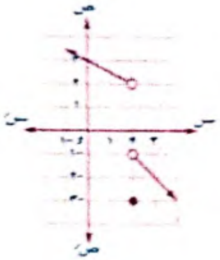
(ب) −١

(جـ) غير موجودة.

(د) ٢

٣ في الشكل المقابل :

نهـــا د (س) = ... (س ← ٢)



(أ) −٣

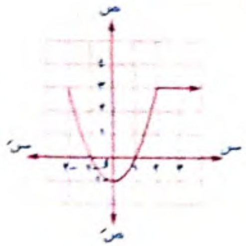
(ب) ٢

(جـ) −١

(د) غير موجودة.

٤ في الشكل المقابل :

نهـــا د (س) = ... (س ← ٢)



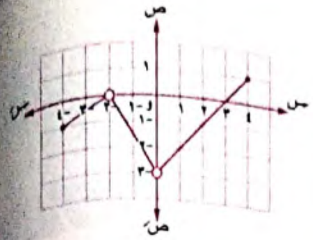
(أ) صفر

(ب) ٢

(جـ) ٣

(د) غير موجودة.

⑤ من الشكل البيانى المقابل :



أولًا : نهــا (س ← -٢) د (س) = ...

(أ) صفر (ب) -٣ (جـ) -٢ (د) غير موجودة.

ثانيًا : نهــا (س ← ٠) د (س) = ...

(أ) صفر (ب) -٢ (جـ) ٣ (د) غير موجودة.

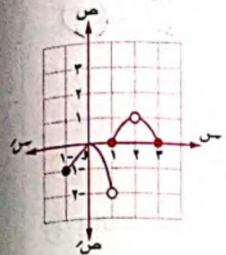
ثالثًا : نهــا (س ← -٤) د (س) = ...

(أ) صفر (ب) -٤ (جـ) -١ (د) غير موجودة.

رابعًا : نهــا (س ← ٤) د (س) = ...

(أ) صفر (ب) ٤ (جـ) ١ (د) غير موجودة.

⑥ بالاستعانة بالشكل المقابل :



أولًا : نهــا (س ← ١) د (س) = ...

(أ) صفر (ب) -٢ (جـ) ١ (د) غير موجودة.

ثانيًا : نهــا (س ← -١) د (س) = ...

(أ) صفر (ب) -٢ (جـ) ١ (د) غير موجودة.

ثالثًا : نهــا (س ← ١) د (س) = ...

(أ) صفر (ب) -٢ (جـ) ١ (د) غير موجودة.

رابعًا : نهــا (س ← -١) د (س) = ...

(أ) صفر (ب) -١ (جـ) -٢ (د) غير موجودة.

خامسًا : نهــا (س ← -١) د (س) = ...

(أ) صفر (ب) -١ (جـ) -٢ (د) غير موجودة.

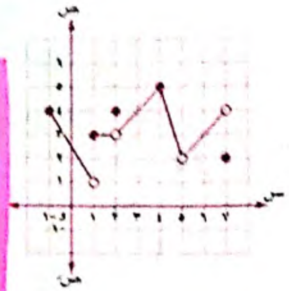
سادسًا : نهــا (س ← ٢) د (س) = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) غير موجودة.

سابعًا : نهــا (س ← ٠) د (س) = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) -١ (د) غير موجودة.

⑦ بالاستعانة بالشكل المقابل :



أولًا : نهــا (س ← -١) د (س) = ...

(أ) صفر (ب) -١ (جـ) ٤ (د) غير موجودة.

ثانيًا : نهــا (س ← -١) د (س) = ...

(أ) صفر (ب) -١ (جـ) ٤ (د) غير موجودة.

ثالثًا : نهــا (س ← -١) د (س) = ...

(أ) صفر (ب) -١ (جـ) ٢ (د) غير موجودة.

رابعًا : د (٢) = ...

(أ) صفر (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) غير معرفة.

خامسًا : د (٥) = ...

(أ) صفر (ب) ٢ (جـ) ٥ (د) غير معرفة.

سادسًا : نهــا (س ← ٥) د (س) = ...

(أ) صفر (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) غير موجودة.

سابعًا : نهــا (س ← ٥) د (س) = ...

(أ) صفر (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) غير موجودة.

ثامنًا : نهــا (س ← ٥) د (س) = ...

(أ) صفر (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) غير موجودة.

تاسعًا : نهــا (س ← ٧) د (س) = ...

(أ) صفر (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) غير موجودة.

عاشرًا : نهــا (س ← ٧) د (س) = ...

(أ) صفر (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) غير موجودة.

ثانيًا الأسئلة المقالية

① أكمل الجدول الآتى واستنتج : نهــا (س ← ٢) د (س) حيث د (س) = ٥ س + ٤

س	١,٩	١,٩٩	١,٩٩٩	←	٢	→	٢,٠٠١	٢,٠١	٢,١
د (س)			....	←	؟	→			

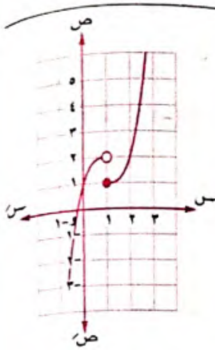
٢ قدّر كلا من النهايتين الآتيتين بيانيا وعدديا:

① $\lim_{س \to ٢}$ (١ - ٣ س)　② $\lim_{س \to ٢}$ (س^٢ - ٢)

٣ من الشكل المقابل أوجد:

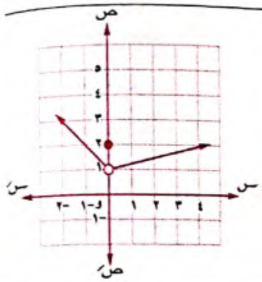
① د(١) [غير موجودة]
② د(١$^+$) [٣]
③ د(١$^-$) [٢]
④ $\lim_{س \to ١}$ د(س) [غير موجودة]

٤ ادرس الشكل المقابل ثم أوجد:



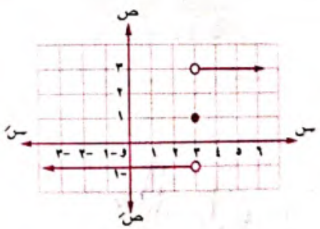
① د(١) [١]
② د(١$^+$) [٢]
③ د(١$^-$) [١]
④ $\lim_{س \to ١}$ د(س) [غير موجودة]

٥ ادرس الشكل المقابل ثم أوجد:



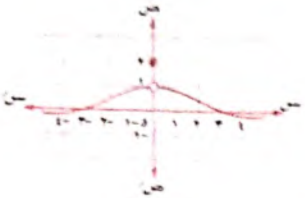
① د(٠) [٢]　② د(٠$^-$) [١]
③ د(٠$^+$) [١]　④ $\lim_{س \to ٠}$ د(س) [١]
⑤ د(٢) [١,٥]　⑥ $\lim_{س \to ٢}$ د(س) [١,٥]

٦ من الشكل المقابل أوجد ما يأتي:



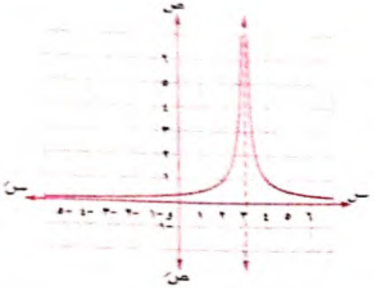
① د(٣) [١]
② $\lim_{س \to ٣^-}$ د(س) [-١]
③ $\lim_{س \to ٣^+}$ د(س) [٣]
④ $\lim_{س \to ٣}$ د(س) [غير موجود]

٧ من الشكل المقابل أوجد:



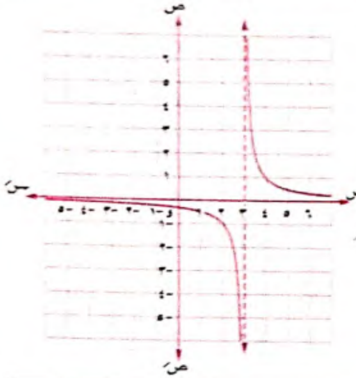
① د(٠) [٢]
② د(٠$^+$) [١]
③ د(٠$^-$) [١]
④ $\lim_{س \to ٠}$ د(س) [١]

٨ من الشكل المقابل أوجد إن أمكن ما يلي:



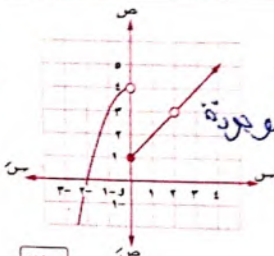
① د(٣) [غير معرفة]
② $\lim_{س \to ٣^+}$ د(س) [∞]
③ $\lim_{س \to ٣^-}$ د(س) [∞]
④ $\lim_{س \to ٣}$ د(س) [∞]

٩ من الشكل المقابل أوجد إن أمكن ما يلي:



① د(٣) [غير معرفة]
② د(٣$^+$) [∞]
③ د(٣$^-$) [-∞]
④ $\lim_{س \to ٣}$ د(س) [غير موجودة]

١٠ من الشكل المقابل أوجد:

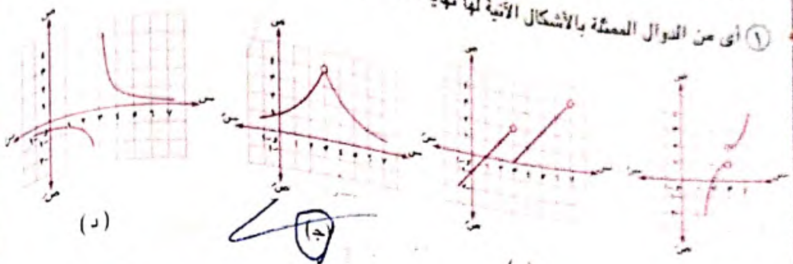


① د(٠) [١]　② د(٠$^+$) [١]
③ د(٠$^-$) [٤]　④ $\lim_{س \to ٠}$ د(س) [غير موجودة]
⑤ د(٢) [غير معرفة]　⑥ د(٢$^+$) [٣]
⑦ د(٢$^-$) [غير موجودة]　⑧ $\lim_{س \to ٢}$ د(س)

ثالثاً مسائل تقيس مهارات التفكير

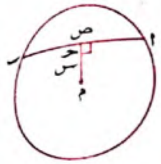
اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) أى من الدوال الممثلة بالأشكال الآتية لها نهاية عند س = ٣ ؟



(أ) (ب) (جـ) (د)

(٢) الشكل المقابل يمثل دائرة م



طول نصف قطرها ٥ سم ، $\overline{مح} \perp \overline{أب}$

، طول $\overline{مح}$ = س ، طول $\overline{أب}$ = ص عندما س ← .

فإن : ص ← .... سم

(أ) ٢.٥ (ب) ٥ (جـ) ١٠ (د) ٢٠

(٣) في الشكل المقابل :

عندما θ ← $\frac{\pi}{2}$

فإن : ص ← .... سم

(أ) صفر (ب) ٥ (جـ) ١٠ (د) ١٠$\sqrt{2}$

(٤) إذا قطع منحنى الدالة د الكثيرة الحدود محور السينات عند س = ٢ فإن : ....

(أ) نهـــا (س ← ٢) د (س) = صفر (ب) نهـــا (س ← .) د (س) = ٢

(جـ) نهـــا (س ← .) د (س) = صفر (د) نهـــا (س ← ٢) د (س) = ٢

(٥) إذا قطع منحنى الدالة د الكثيرة الحدود محور الصادات عند ص = ٢ فإن : ....

(أ) نهـــا (س ← ٢) د (س) = صفر (ب) نهـــا (س ← ٢) د (س) = ٢

(جـ) نهـــا (س ← .) د (س) = صفر (د) نهـــا (س ← .) د (س) = ٢

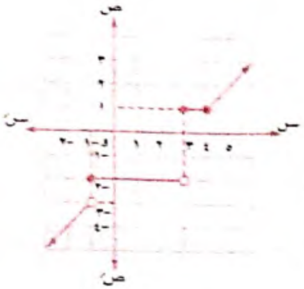
(٦) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة ص = د (س)

وكان : نهـــا (س ← أ) د (س) = نهـــا (س ← ١) د (س) + نهـــا (س ← ٢) د (س)

فإن : أ = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

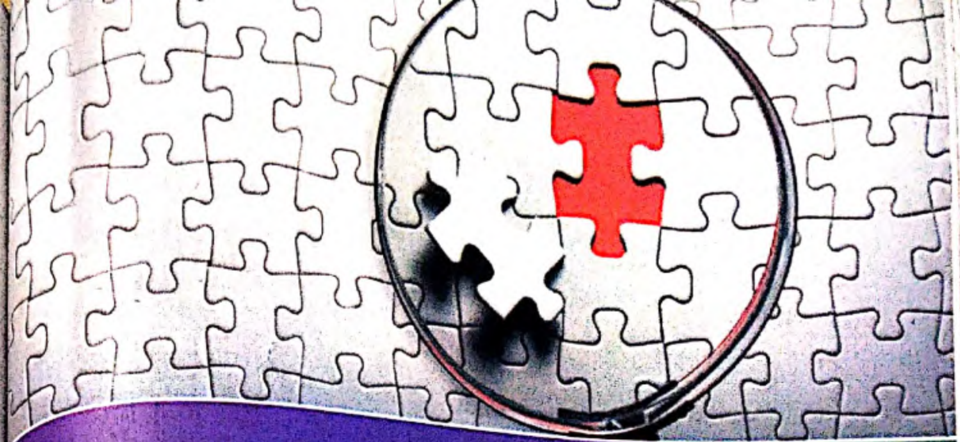
(٧) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة ص = د (س)



وكان : نهـــا (س ← أ) د (س) = نهـــا (س ← ١) د (س) + نهـــا (س ← ٢) د (س)

فإن أكبر قيمة للعدد أ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤



الدرس 2 إيجاد نهاية الدالة جبريًا

سنعرض الآن بعض النظريات والنتائج التى تساعد فى إيجاد نهاية دالة دون اللجوء إلى الرسم البيانى أو دراسة قيم الدالة.

نظرية ١ نهاية الدالة كثيرة الحدود

إذا كانت : د (س) كثيرة حدود فى المتغير س فإن : نهـا(س ← أ) د (س) = د (أ)

فمثلًا : نهـا(س ← ٢) (٢ س + ٥) = د (٢) = ٢ × ٢ + ٥ = ٩

، نهـا(س ← ١) (س^{٢} − ٣ س + ٢) = د (١) = ١ − ٣ + ٢ = ٠

نتيجة

نهاية الدالة الثابتة

إذا كانت : د (س) = ك حيث ك ثابت فإن : نهـا(س ← أ) د (س) = نهـا(س ← أ) ك = ك

فمثلًا : نهـا(س ← ٢) ٤ = ٤ ، نهـا(س ← −١) −٥ = −٥

نظرية ٢

إذا كانت د ، ر دالتين فى المتغير س وكانت : نهـا(س ← أ) د (س) = ل

، نهـا(س ← أ) ر (س) = م حيث ل ، م ∈ ح فإن :

١ نهـا(س ← أ) [د (س) ± ر (س)] = نهـا(س ← أ) د (س) ± نهـا(س ← أ) ر (س) = ل ± م

أى أن نهاية المجموع الجبرى لدالتين = المجموع الجبرى لنهايتيهما

ويمكن تعميم ذلك بالنسبة للمجموع الجبرى لعدد منته من الدوال.

٢ نهـا(س ← أ) [د (س) × ر (س)] = نهـا(س ← أ) د (س) × نهـا(س ← أ) ر (س) = ل × م

أى أن نهاية حاصل ضرب دالتين = حاصل ضرب نهايتيهما

ويمكن تعميم ذلك بالنسبة لحاصل ضرب عدد منته من الدوال.

٣ نهـا(س ← أ) ك × د (س) = ك × نهـا(س ← أ) د (س) = ك × ل حيث ك مقدار ثابت.

أى أن نهاية حاصل ضرب ثابت × دالة = الثابت × نهاية هذه الدالة.

٤ نهـا(س ← أ) د (س) / ر (س) = ل / م بشرط أن م ≠ ٠ .

أى أن

نهاية خارج قسمة دالتين = خارج قسمة نهايتيهما بشرط ألا تكون نهاية المقسوم عليه = ٠

ويمكن تعميم ذلك بالنسبة لحاصل ضرب عدد منته من الدوال مقسومًا على حاصل ضرب عدد منته من الدوال بشرط أن أيًا من نهايات المقسوم عليه لا يساوى الصفر.

٥ نهـا(س ← أ) [د (س)]^{ن} = [نهـا(س ← أ) د (س)]^{ن} = ل^{ن} ، ن ∈ ص$^{+}$

مثال ١

أوجد كلاً من النهايات الآتية :

١ نهـا(س ← ٠) س^{٢} + ٣ س − ٢ + ٢ س / (س − ١)

٢ نهـا(س ← −٢) (س^{٢} + ٣) (س^{٣} − ٢ س^{٢} + ٤ س − ١)

٣ نهـا(س ← ١) (٢ س^{٢} − ٥ س + ٦) (س + ١) / (س^{٢} + ٢) (٣ س − ١)

الحل

١ نهـا(س ← ٠) س^{٢} + ٣ س − ٢ + ٢ س / (س − ١) = نهـا(س ← ٠) (س^{٢} + ٣ س − ٢) + نهـا(س ← ٠) ٢ س / (س − ١)

= نهـا(س ← ٠) (س^{٢} + ٣ س − ٢) + نهـا(س ← ٠) ٢ س / نهـا(س ← ٠) (س − ١) = −٢ + ٠ / −١ = −٢

٢ نهـا(س ← −٢) (س^{٢} + ٣) (س^{٣} − ٢ س^{٢} + ٤ س − ١)

= نهـا(س ← −٢) (س^{٢} + ٣) × نهـا(س ← −٢) (س^{٣} − ٢ س^{٢} + ٤ س − ١)

= (٤ + ٣) (−٨ − ٨ − ٨ − ١) = ٧ × −٢٥ = −١٧٥

[٣] $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \frac{(٢\text{س}^٢ - ٥\text{س} + ٦)(\text{س} + ١)}{(\text{س}^٢ + ٢)(٣\text{س} - ١)}$

$$= \frac{\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} (٢\text{س}^٢ - ٥\text{س} + ٦) \times \underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} (\text{س} + ١)}{\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} (\text{س}^٢ + ٢) \times \underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} (٣\text{س} - ١)} = \frac{(٢ - ٥ + ٦)(١ + ١)}{(١ + ٢)(٣ - ١)} = \frac{٣ \times ٢}{٣ \times ٢} = ١$$

يمكنك حل المثال السابق مباشرة باستخدام التعويض المباشر دون تقسيم النهايات.

ملاحظـة

يمكن استخدام التعويض المباشر وتكون $\underset{\text{س}\to \text{أ}}{\text{نهـا}}\ \text{د}(\text{س}) = \text{د}(\text{أ})$

إذا كانت الدالة د كثيرة حدود أو دالة كسرية مقامها ≠ صفر عند التعويض عن س = أ

نظرية / ٣

إذا كانت : د ، ع دالتين فى المتغير س وكانت : د (س) = ع (س) لجميع قيم س ∈ ح − {أ}

وكانت : $\underset{\text{س}\to \text{أ}}{\text{نهـا}}\ \text{ع}(\text{س}) = \text{ل}$ فإن : $\underset{\text{س}\to \text{أ}}{\text{نهـا}}\ \text{د}(\text{س}) = \text{ل}$

استخدام النظرية السابقة :

تستخدم هذه النظرية لإيجاد نهاية دالة كسرية جبرية

(أى نهاية كسر كل من بسطه ومقامه عبارة عن دالة كثيرة حدود)

ولتكن د (س) عندما س ← أ وذلك عندما تكون

د (أ) = $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ وهذا معناه أن (س − أ)

يكون عاملًا مشتركًا بين البسط والمقام.

ولإيجاد $\underset{\text{س}\to \text{أ}}{\text{نهـا}}$ د (س) فى هذه الحالة فإننا نختصر العامل (س − أ) وذلك عن طريق

التحليل أو القسمة المطولة فنحصل على دالة جديدة ولتكن ع (س) تكـون مساويـة للدالـة د (س) عندما س ≠ أ

فتكون $\underset{\text{س}\to \text{أ}}{\text{نهـا}}\ \text{د}(\text{س}) = \underset{\text{س}\to \text{أ}}{\text{نهـا}}\ \text{ع}(\text{س})$ والمثال التالى يوضح ذلك.

لاحظ أن

س ← أ تعنى أن

(س − أ) ← صفر

أى أن (س − أ) ≠ صفر

ولهذا السبب تم الاختصار

مثال ٢

أوجد كلاً مما يأتى :

[١] $\underset{\text{س}\to ٤}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^٢ - ١٦}{\text{س} - ٤}$ [٢] $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^٣ - ٨}{\text{س}^٢ - ٥\text{س} + ٦}$ [٣] $\underset{\text{س}\to -١}{\text{نهـا}} \frac{(٢\text{س} + ٣)^٢ - ١}{\text{س}^٢ + \text{س}}$

الحـل

[١] بفرض د (س) = $\frac{\text{س}^٢ - ١٦}{\text{س} - ٤}$ ∴ د (٤) = $\frac{٤^٢ - ١٦}{٤ - ٤} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

∴ $\underset{\text{س}\to ٤}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^٢ - ١٦}{\text{س} - ٤} = \underset{\text{س}\to ٤}{\text{نهـا}} \frac{(\text{س} - ٤)(\text{س} + ٤)}{\text{س} - ٤} = \underset{\text{س}\to ٤}{\text{نهـا}} (\text{س} + ٤) = ٤ + ٤ = ٨$

[٢] بفرض د (س) = $\frac{\text{س}^٣ - ٨}{\text{س}^٢ - ٥\text{س} + ٦}$ ∴ د (٢) = $\frac{٢^٣ - ٨}{٢^٢ - ٥(٢) + ٦} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

∴ $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^٣ - ٨}{\text{س}^٢ - ٥\text{س} + ٦} = \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{(\text{س} - ٢)(\text{س}^٢ + ٢\text{س} + ٤)}{(\text{س} - ٢)(\text{س} - ٣)}$

$= \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^٢ + ٢\text{س} + ٤}{\text{س} - ٣} = \frac{٢^٢ + ٢(٢) + ٤}{٢ - ٣} = -١٢$

[٣] بفرض د (س) = $\frac{(٢\text{س} + ٣)^٢ - ١}{\text{س}^٢ + \text{س}}$ ∴ د (−١) = $\frac{(-٢ + ٣)^٢ - ١}{(-١)^٢ - ١} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

∴ $\underset{\text{س}\to -١}{\text{نهـا}} \frac{(٢\text{س} + ٣)^٢ - ١}{\text{س}^٢ + \text{س}} = \underset{\text{س}\to -١}{\text{نهـا}} \frac{(٢\text{س} + ٣ - ١)(٢\text{س} + ٣ + ١)}{\text{س}(\text{س} + ١)}$

$= \underset{\text{س}\to -١}{\text{نهـا}} \frac{(٢\text{س} + ٢)(٢\text{س} + ٤)}{\text{س}(\text{س} + ١)} = \underset{\text{س}\to -١}{\text{نهـا}} \frac{٢(\text{س} + ١) \times ٢(\text{س} + ٢)}{\text{س}(\text{س} + ١)}$

$= \underset{\text{س}\to -١}{\text{نهـا}} \frac{٤(\text{س} + ٢)}{\text{س}} = \frac{٤(-١ + ٢)}{-١} = -٤$

مثال ٣

أوجد : $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^٣ - ٧\text{س} + ٦}{٣\text{س}^٢ - ٨\text{س} + ٤}$

الحـل

بفرض د (س) = $\frac{\text{س}^٣ - ٧\text{س} + ٦}{٣\text{س}^٢ - ٨\text{س} + ٤}$

∴ د (٢) = $\frac{(٢)^٣ - ٧(٢) + ٦}{٣(٢)^٢ - ٨(٢) + ٤} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

∴ (س − ٢) عامل مشترك بين البسط والمقام

وبإجراء قسمة مطولة للبسط على (س − ٢)

∴ س³ − ٧س + ٦ ÷ (س − ٢) ، ناتج القسمة : س² + ٢س − ٣

س³ − ٧س + ٦

⊖س³ ⊕− ٢س²

―――――

٢س² − ٧س + ٦

⊖٢س² ⊕− ٤س

―――――

− ٣س + ٦

⊕− ٣س ⊖+ ٦

―――――

.. ..

∴ البسط = (س − ٢) (س² + ٢س − ٣)

∴ $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^٣ - ٧\text{س} + ٦}{٣\text{س}^٢ - ٨\text{س} + ٤} = \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{(\text{س} - ٢)(\text{س}^٢ + ٢\text{س} - ٣)}{(\text{س} - ٢)(٣\text{س} - ٢)} = \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^٢ + ٢\text{س} - ٣}{٣\text{س} - ٢}$

$= \frac{٤ + ٤ - ٣}{٦ - ٢} = \frac{٥}{٤}$

تذكر أنه

فى عملية القسمة المطولة :

(١) نرتب حدود كل من المقسوم والمقسوم عليه بحسب قوى س ترتيبًا تصاعديًا أو تنازليًا بنفس الطريقة مع ترك مكان فارغ للقوى غير الموجودة.

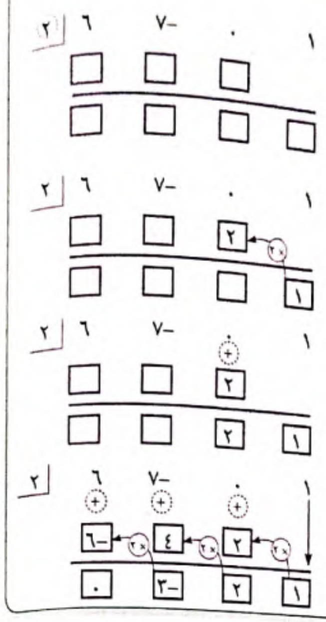
(٢) نقسم الحد الأول من المقسوم على الحد الأول من المقسوم عليه ونكتب ناتج القسمة.

(٣) نضرب ناتج القسمة فى المقسوم عليه ونطرح الناتج من المقسوم للحصول على الباقى.

(٤) نستمر بنفس الطريقة حتى الانتهاء من عملية القسمة.

ملاحظة

يمكن فى حالة القسمة على مقدار من الدرجة الأولى ومعامل س = ١ أى على الصورة (س − أ) استخدام طريقة القسمة التركيبية كتسهيل لطريقة القسمة المطولة ويمكن استخدامها فى المثال السابق كما يلى لقسمة $(س^{٣} - ٧س + ٦)$ على (س − ٢)



١ نرتب المعاملات حسب قوى س التصاعدية أو التنازلية مع وضع (٠) كمعامل للقوى غير الموجودة مع وضع الـ ٢ (وهى صفر المقسوم عليه) فى خانة المقسوم عليه.

٢ يترك معامل أكبر قوى لينزل للصف الثالث مباشرة ثم يضرب فى الـ ٢ ونضع ناتج الضرب فى خانة الصف الثانى بالعمود المجاور مباشرة.

٣ اجمع معامل القوة التالية مع ناتج الضرب الذى حصلت عليه توًا.

٤ كرر الضرب والجمع لتحصل على معاملات خارج القسمة وهى ١ ، ٢ ، −٣

∴ خارج القسمة هو $س^{٢} + ٢س - ٣$

حل آخر للمثال السابق :

يمكن استخدام التحليل بالتقسيم وذلك بمعلومية أن (س − ٢) عامل من عوامل البسط كالتالى.

$$\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \frac{س^{٣} - ٧س + ٦}{٣س^{٢} - ٨س + ٤} = \underset{س \to ٢}{\text{نها}} \frac{(س^{٣} - ٨) + (-٧س + ١٤)}{(س - ٢)(٣س - ٢)}$$

$$= \underset{س \to ٢}{\text{نها}} \frac{(س - ٢)(س^{٢} + ٢س + ٤) - ٧(س - ٢)}{(س - ٢)(٣س - ٢)}$$

$$= \underset{س \to ٢}{\text{نها}} \frac{\cancel{(س - ٢)}(س^{٢} + ٢س + ٤ - ٧)}{\cancel{(س - ٢)}(٣س - ٢)} = \frac{٢^{٢} + ٢ \times ٢ - ٣}{٣ \times ٢ - ٢} = \frac{٥}{٤}$$

ملاحظة هامة

فى حالة وجود فرق بين جذرين تربيعيين لمقدارين جبريين (فى البسط أ، فى المقام أ، فى كليهما) فإننا نضرب كلاً من البسط والمقام فى مرافق (البسط أ، المقام أ، كليهما) وذلك عندما تكون نتيجة التعويض المباشر $\frac{صفر}{صفر}$ والمثال التالى يوضح ذلك.

مثال ④

أوجد كلاً مما يأتى : ١ $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{س^{٢} + ٢س}{\sqrt{س + ٩} - ٣}$ ٢ $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\sqrt{٤ + س} - ٢}{\sqrt{٩ + س} - \sqrt{٩ - س}}$

الحل

بالتعويض عن س = ٠ فى كل من الدالتين السابقتين سنجد أن قيمة كل منهما = $\frac{صفر}{صفر}$

١ $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{س^{٢} + ٢س}{\sqrt{س + ٩} - ٣} = \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{س^{٢} + ٢س}{\sqrt{س + ٩} - ٣} \times \frac{\sqrt{س + ٩} + ٣}{\sqrt{س + ٩} + ٣}$

(وذلك بالضرب بسطًا ومقامًا فى مرافق المقام)

$$= \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{س(س + ٢)(\sqrt{س + ٩} + ٣)}{(س + ٩) - ٩}$$

$$= \underset{س \to ٠}{\text{نها}} (س + ٢)(\sqrt{س + ٩} + ٣) = (٠ + ٢)(\sqrt{٠ + ٩} + ٣) = ١٢$$

٢ $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\sqrt{٤ + س} - ٢}{\sqrt{٩ + س} - \sqrt{٩ - س}}$

$$= \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{(\sqrt{٤ + س} - ٢)(\sqrt{٤ + س} + ٢)(\sqrt{٩ + س} + \sqrt{٩ - س})}{(\sqrt{٩ + س} - \sqrt{٩ - س})(\sqrt{٩ + س} + \sqrt{٩ - س})(\sqrt{٤ + س} + ٢)}$$

(وذلك بالضرب بسطًا ومقامًا فى مرافق البسط ومرافق المقام)

$$= \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{(٤ + س - ٤)(\sqrt{٩ + س} + \sqrt{٩ - س})}{(٩ + س - ٩ + س)(\sqrt{٤ + س} + ٢)}$$

$$= \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{س(\sqrt{٩ + س} + \sqrt{٩ - س})}{٢س(\sqrt{٤ + س} + ٢)} = \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\sqrt{٩ + س} + \sqrt{٩ - س}}{٢(\sqrt{٤ + س} + ٢)}$$

$$= \frac{\sqrt{٩ + ٠} + \sqrt{٩ - ٠}}{٢(\sqrt{٤ + ٠} + ٢)} = \frac{٣}{٤}$$

مما سبق نستنتج أن

لإيجاد $\underset{س \to أ}{\text{نها}}$ د(س) نوجد د(أ) بالتعويض المباشر عن س = أ فى الدالة فإذا كان الناتج :

١ عدد حقيقى ب فإن : $\underset{س \to أ}{\text{نها}}$ د(س) = ب

٢ $\frac{صفر}{صفر}$ «كمية غير معينة» نقوم بقسمة كل من البسط والمقام على (س − أ)

• فهم • تطبيق • مستويات عليا • من أسئلة الكتاب المدرسي

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(1) نهـا $_{س \to \frac{1}{2}}$ (10) = ……………

(أ) 5 (ب) 20 (جـ) 10 (د) $\frac{1}{2}$ 10

(2) نهـا $_{س \to 4}$ $(3س - \sqrt{س})$ = ……………

(أ) 8 (ب) [illegible] (جـ) 14 (د) 16

(3) نهـا $_{س \to 2}$ $(3أ^2)$ = ……………

(أ) 3 (ب) 6 (جـ) $3أ^2$ (د) 12

(4) نهـا $_{س \to أ}$ $(2س^2 - أس - أ^2)$ = …………… حيث أ ∈ ع

(أ) صفر (ب) أ (جـ) $4أ^2$ (د) $أ^2 - 2أ$

(5) نهـا $_{س \to \frac{\pi}{2}}$ (2 س − جا س) = ……………

(أ) π (ب) $\pi + 1$ (جـ) $\pi - 1$ (د) $2\pi - 1$

(6) نهـا $_{س \to 0}$ $\sqrt{\frac{3 + 2س}{4س - 1}}$ = ……………

(أ) −3 (ب) [illegible] (جـ) $\frac{1}{2}$ (د) $-\frac{1}{2}$

(7) نهـا $_{س \to 3}$ $\frac{2س - 6}{7س - 21}$ = ……………

(أ) $\frac{2}{3}$ (ب) $\frac{2}{7}$ (جـ) $\frac{3}{7}$ (د) 3

(8) نهـا $_{س \to 0}$ $\frac{س^2 - س}{س}$ = ……………

(أ) صفر (ب) −1 (جـ) غير موجودة. (د) 1

(9) نهـا $_{س \to 3}$ $\frac{س^2 - 7س + 12}{س - 3}$ = ……………

(أ) 1 (ب) −1 (جـ) 7 (د) −2

(10) نهـا $_{س \to -1}$ $\frac{س^2 + س}{س^3 + 1}$ =

(أ) صفر (ب) $-\frac{1}{2}$ (جـ) −1 (د) ليس لها وجود.

(11) 📖 نهـا $_{س \to 3}$ $\frac{س^2 - س - 6}{س^2 + س - 12}$ = ……………

(أ) $\frac{5}{7}$ (ب) $\frac{1}{7}$ (جـ) −1 (د) −5

(12) نهـا $_{س \to -4}$ $\frac{3س^2 - 48}{س + 4}$ = ……………

(أ) 32 (ب) −32 (جـ) 24 (د) −24

(13) نهـا $_{س \to 2}$ $\frac{س^2 + س - 6}{س^2 - 4}$ = ……………

(أ) $\frac{4}{5}$ (ب) $\frac{5}{4}$ (جـ) $\frac{2}{5}$ (د) $\frac{-2}{5}$

(14) نهـا $_{س \to 0}$ $\frac{3س + 2س^{-1}}{س + 4س^{-1}}$ = ……………

(أ) 2 (ب) 4 (جـ) $\frac{1}{2}$ (د) $\frac{1}{4}$

(15) نهـا $_{س \to \sqrt{5}}$ $\frac{س^4 - س^2 - 20}{س - \sqrt{5}}$ = ……………

(أ) 9 (ب) $2\sqrt{5}$ (جـ) $9\sqrt{5}$ (د) $18\sqrt{5}$

(16) نهـا $_{س \to 4}$ $\frac{(س - 3)^2 - 1}{س - 4}$ = ……………

(أ) صفر (ب) 2 (جـ) 3 (د) 4

(17) نهـا $_{س \to 0}$ $\frac{\sqrt{س + 1} - 1}{س}$ = ……………

(أ) صفر (ب) $\sqrt{2}$ (جـ) $\frac{1}{2}$ (د) ليس لها وجود.

(18) نهـا $_{س \to 3}$ $\frac{\sqrt{س + 1} - 2}{س - 3}$ = ……………

(أ) 4 (ب) $\frac{1}{4}$ (جـ) 6 (د) $\frac{1}{6}$

(19) نهـا $_{س \to 9}$ $\frac{\sqrt{س - 7} - \sqrt{2}}{س - 9}$ = ……………

(أ) $2\sqrt{2}$ (ب) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (جـ) $\frac{-\sqrt{2}}{4}$ (د) $-2\sqrt{2}$

(20) نهـا $_{س \to 1}$ $\frac{4 - \sqrt{س + 15}}{1 - س^2}$ = ……………

(أ) 4 (ب) $\frac{1}{8}$ (جـ) $\frac{1}{16}$ (د) −4

(٢١) $\underset{س \to ٤}{\text{نها}} \frac{\sqrt{س} - ٢}{٥ س^٢ - ٢٣ س + ١٢} = ...$

(أ) $\frac{١}{٩٢}$ (ب) $\frac{١}{٦٨}$ (جـ) ٦٨ (د) ٩٢

(٢٢) $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \frac{(س - ٣)^٢ - ١}{\sqrt{س + ٢} - ٢} = ...$

(أ) −٦ (ب) −٨ (جـ) −٢ (د) غير موجودة.

(٢٣) $\underset{س \to ١}{\text{نها}} \frac{\sqrt{٢ س - ١} - ١}{\sqrt{٣ س + ١} - ٢} = ...$

(أ) ١ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{٤}{٣}$

(٢٤) $\underset{س \to ١}{\text{نها}} \left(\frac{س^٢}{س - ١} - \frac{١}{س - ١}\right) = ...$

(أ) صفر (ب) −٢ (جـ) ٢ (د) غير موجودة.

(٢٥) $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \frac{س^٢ - ٧ س + ٦}{٢ س^٢ - ٨ س + ٤} = ...$

(أ) $\frac{٥}{٤}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) $\frac{٤}{٥}$ (د) $\frac{١}{٣}$

(٢٦) $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \frac{٣ (س - ٢)^٢ + ٢ س^٢ - ٨}{س - ٢} = ...$

(أ) صفر (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) ٨

(٢٧) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{٧ + ٢ س}{\text{حتا}\, س} = ...$

(أ) ٧ (ب) ٨ (جـ) ٩ (د) ١

(٢٨) $\underset{س \to \frac{\pi}{٤}}{\text{نها}} \frac{\text{طا}\, س}{س} = ...$

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) $\frac{٤}{\pi}$ (د) ليس لها وجود.

(٢٩) $\underset{س \to ٥}{\text{نها}}$ د (س) = ٤ فإن : $\underset{س \to ٥}{\text{نها}}$ [د (س) − ٤] = ...

(أ) ٤ (ب) صفر (جـ) ٥ (د) ٨

(٣٠) $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \frac{س - ٣}{س - ٢} = ...$

(أ) −١ (ب) $\frac{-٣}{٢}$ (جـ) $\frac{٣}{٢}$ (د) ليس لها وجود.

(٣١) إذا كانت : $\underset{س \to م}{\text{نها}} \frac{٢ س^٢ - س - ٣}{٤ س^٢ - ٩} = \frac{٥}{١٢}$ فإن : م = ...

(أ) $\frac{٣}{٢}$ (ب) $\frac{-٣}{٢}$ (جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) $\frac{-٢}{٣}$

(٣٢) إذا كانت : $\underset{س \to ١}{\text{نها}} \frac{س^٢ + ٣ س - ٤}{س + أ} = ٥$ فإن : أ = ...

(أ) −١ (ب) ١ (جـ) صفر (د) ٤

(٣٣) إذا كانت : $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \frac{س^٢ - ٤ أ}{س - ٢}$ لها وجود فإن : أ = ...

(أ) −١ (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٤

(٣٤) إذا كان : $\underset{س \to ٣}{\text{نها}} \frac{س^٢ - ٢ س + ك}{س^٢ - ٩} =$ م حيث م ∈ ع فإن : ك × م = ...

(أ) $\frac{٢}{٣}$ (ب) −٣ (جـ) −٢ (د) −١

(٣٥) إذا كانت : $\underset{س \to -١}{\text{نها}} \frac{س^٢ + ك س + م}{س^٢ - ١} = ٢$ فإن : ك + م = ...

(أ) −٤ (ب) −٥ (جـ) −٨ (د) −٩

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ أوجد كلاً مما يأتى :

(١) $\underset{س \to ٥}{\text{نها}} \frac{س^٢ - ٢٥}{س - ٥}$ «١٠»

(٢) $\underset{س \to ٣}{\text{نها}} \frac{س^٢ - ٨ س + ١٥}{س - ٣}$

(٣) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{س^٢}{٣ س^٢ - ٢ س^٢}$ «$\frac{١}{٢}$»

(٤) $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \frac{٥ س - ١٠}{٤ س - ٨}$

(٥) $\underset{س \to ٤}{\text{نها}} \frac{٤ س^٢ - ٦٤}{س - ٤}$ «٣٢»

(٦) $\underset{س \to ٤}{\text{نها}} \frac{٢ س - ٨}{س^٢ - س - ١٢}$ «$\frac{٢}{٧}$»

(٧) $\underset{س \to -٢}{\text{نها}} \frac{س^٢ + ٤ س + ٢}{س^٢ - ٩}$ «$\frac{١}{٣}$»

(٨) $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \frac{س^٢ - ٢ س}{س^٢ - س - ٢}$ «$\frac{٢}{٣}$»

(٩) $\underset{س \to -١}{\text{نها}} \frac{س^٢ - ٣ س - ٤}{س^٢ - س - ٢}$ «$\frac{٥}{٣}$»

(١٠) $\underset{س \to \frac{١}{٢}}{\text{نها}} \frac{٢ س^٢ - ٥ س + ٢}{٢ س - ١}$ «$\frac{-٣}{٢}$»

(١١) $\underset{س \to ٩}{\text{نها}} \frac{٩ - س}{س^٢ - ٨١}$ «$-\frac{١}{١٨}$»

(١٢) $\underset{س \to ١}{\text{نها}} \frac{٣ س^٢ + س - ٤}{س^٢ - ١}$ «$\frac{٧}{٢}$»

(١٣) $\underset{س \to \frac{٣}{٤}}{\text{نها}} \frac{١٦ س^٢ - ٩}{٨ س - ٦}$ «٣»

(١٤) $\underset{س \to ٣}{\text{نها}} \frac{٢ س^٢ - ٥ س - ٣}{٢ س^٢ - ٣ س - ٩}$ «$\frac{٧}{٩}$»

(١٥) $\underset{س \to ٣}{\text{نها}} \frac{س^٢ + ٢ س - ١٥}{٥ س^٢ - ٤٥}$ «$\frac{٤}{١٥}$»

(١٦) $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \frac{س^٣ - ٨}{٣ س^٢ - ١٢}$ «١»

٢ أوجد كلاً مما يأتى :

(١) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{(س + ٢)^٢ - ٤}{س^٢ + س}$ «٤»

(٢) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{(٢ س - ١)^٢ - ١}{٥ س}$ «$\frac{-٤}{٥}$»

③ $\lim_{س \to ١} \frac{(س - ٣)^٢ - ١}{٢ س^٢ - ٣ س - ٢}$ ..... $\frac{٢}{٥}$

④ $\lim_{س \to -٢} \frac{(س + ٢)^٢ + ١}{٣ س^٢ + ٦ س}$ ..... $\frac{١}{٦}$

⑤ $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٣ + س^٢ - ٣٠}{س - ٣}$ ٣٦

⑥ $\lim_{س \to ٢} \frac{(س^٢ - ٤)^٢}{س - ٢}$ ..... صفر

⑦ $\lim_{س \to ١} \frac{٣ س - ٣}{(س - ١)^٢ + ٣ س - ٣}$ ١

⑧ $\lim_{س \to -٢} \frac{س + ٢}{س^٤ - ١٦}$ ..... $-\frac{١}{٣٢}$

⑨ $\lim_{س \to ٢} \frac{س + \sqrt{س} - ١٢}{س - ٢}$ ..... [illegible]

⑩ $\lim_{س \to ٠} \frac{\frac{١}{س + ٢} - \frac{١}{٢}}{س}$ ..... $-\frac{١}{٤}$

⑪ $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٤ - ٢ س^٣ - ٦ س + ١٢}{س^٢ + س - ٦}$ ..... $\frac{٢}{٥}$

⑫ $\lim_{س \to ٢} \left(\frac{٦}{س} + \frac{س^٢ - ٣ س}{س - ٢} \right)$ ..... $\frac{١٢}{٢}$

⑬ $\lim_{س \to ١} \left(\frac{س^٢}{س - ١} - \frac{٣ س + ٤}{س^٢ - ١} \right)$ ..... $\frac{٥}{٢}$

⑭ $\lim_{س \to ١} \left(\frac{١}{س - ١} - \frac{٣}{س^٣ - ١} \right)$ ١

③ أوجد كلاً مما يأتي :

① $\lim_{س \to ٤} \frac{س^٣ - ١٥ س - ٤}{س - ٤}$ ٣٣

② $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٣ - ٣ س + ٢}{س^٢ + س - ٢}$ ..... $\frac{١}{٣}$

③ $\lim_{س \to ٤} \frac{س^٤ - ٢١ س^٢ + ٢٠ س}{س - ٤}$ ١٠٨

④ $\lim_{س \to -٢} \frac{٢ س^٣ + ٣ س^٢ + ٤}{س^٣ + ٨}$ ١

⑤ $\lim_{س \to -٢} \frac{س^٢ + ٤ س + ٤}{س^٣ + س^٢ - ٨ س - ١٢}$ ..... $-\frac{١}{٤}$

⑥ $\lim_{س \to ١} \frac{س^٣ - ٥ س^٢ + ٧ س - ٣}{س^٣ - ٢ س^٢ + س}$ ..... -٢

④ أوجد كلاً مما يأتي :

① $\lim_{س \to ٩} \frac{\sqrt{س} - ٣}{س - ٩}$ ..... $\frac{١}{٦}$

② $\lim_{س \to ٥} \frac{\sqrt{س - ١} - ٢}{س - ٥}$ ..... $\frac{١}{٤}$

③ $\lim_{س \to -١} \frac{س + ١}{\sqrt{س + ٥} - ٢}$ ٤

④ $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{٣ - ٢ س} - \sqrt{٣}}{س}$ ..... $-\frac{١}{\sqrt{٣}}$

⑤ $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{٢ س + ٩} - ٣}{س^٢ + س}$ ..... $\frac{١}{٣}$

⑥ $\lim_{س \to ٠} \frac{س^٢ - ٥ س}{\sqrt{س + ٤} - ٢}$ ..... -٢٠

⑦ $\lim_{س \to ١} \frac{س^٢ - س - ٦}{\sqrt{٥ س - ٦} - ٢}$ ..... [illegible]

⑧ $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{١ + س} - \sqrt{١ - س}}{٩ س}$ ..... [illegible]

⑨ $\lim_{س \to ١} \frac{س - ١}{\sqrt{٢ س - ١} - \sqrt{س}}$ ١

⑩ $\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{س^٢ + ٨} - ٣}{س - ١}$ ..... [illegible]

⑪ $\lim_{س \to ١} \frac{س - ١}{٢ - \sqrt{س^٢ + ٣}}$ ..... [illegible]

⑫ $\lim_{س \to ٣} \frac{\sqrt{س + ٦} - ٣}{\sqrt{س - ٢} - ١}$ ..... [illegible]

⑬ $\lim_{س \to ٤} \frac{\sqrt{٢٤ - ٥ س} - ٢}{٣ - \sqrt{س + ٥}}$ ..... [illegible]

⑭ $\lim_{س \to ٤} \frac{س - ٢}{س - \sqrt{س} - ٦}$ ..... [illegible]

⑤ إذا كانت : $\lim_{س \to ١} \frac{د(س) - ٥}{س - ٢} = ١$ حيث د (س) كثيرة حدود فأوجد : $\lim_{س \to ١} د(س)$ ٤

⑥ إذا كانت : $\lim_{س \to ٠} \frac{د(س)}{س^٢} = ٥$ فأوجد :

① $\lim_{س \to ٠} د(س)$ ② $\lim_{س \to ٠} \frac{د(س)}{س}$ ..... صفر ، صفر

⑦ إذا كانت : $\lim_{س \to -١} \frac{س^٢ - (أ - ١) س - أ}{س + ١} = ٤$ أوجد : قيمة أ ..... -٥

⑧ إذا كانت : $\lim_{س \to ١} \frac{س^٢ + أ س + ب}{س - ١} = ٥$ أوجد : قيمة كل من أ ، ب ..... ٣ ، -٤

⑨ الربط بالتجارة : وجدت شركة أنها لو أنفقت س من الجنيهات للدعاية لمنتجها ، فإن ربحها يعطى بالعلاقة د (س) = ٠,٠٢ س² + ٤٠ س + ١٥٠ ، أوجد مقدار ربح الشركة عندما يقترب إنفاقها على الدعاية من ١٠٠ جنيه. ..... ٤١٥٠ جنيهاً

ثالثاً مسائل تقيس مهارات التفكير

① اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت د دالة تحقق أن س (د (س) + ١) = د (س) + س²

فإن : $\lim_{س \to ١} د(س) = \text{.........}$

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) صفر

② إذا كانت : $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{م س + ك} - ٣}{س} = ٢$ فإن $\frac{م}{ك} = \text{.........}$

(أ) ٨ (ب) ٤ (جـ) ٢ (د) $\frac{٤}{٣}$

(٣) إذا كانت: $\underset{س \to م}{نهـا} (٢ د(س) - ٥ هـ(س)) = ١٠$ ، $\underset{س \to م}{نهـا} (د(س) + هـ(س)) = ٦$ فإن: $\underset{س \to م}{نهـا} \frac{د(س)}{هـ(س)} = ...$

(أ) $\frac{٤}{٧}$ (ب) $\frac{٢}{٧}$ (جـ) ١٠ (د) ٢٠

(٤) إذا كانت: ن(س) دالة وكانت $\underset{س \to ٢}{نهـا} \frac{ن(س) - ٨}{س - ٢} = ٧$

فإن: $\underset{س \to ٢}{نهـا} \frac{٢س^٢ - ن(س)}{س - ٢} = ...$

(أ) ١ (ب) ٧ (جـ) ٨ (د) ١٥

٢ أوجد كلاً مما يأتى:

(١) $\underset{س \to ٥}{نهـا} \left(\frac{س^٢ - ٤س - ٥}{س^٢ - ٦س + ٥}\right)^٢$ « $\frac{٩}{٤}$ »

(٢) $\underset{س \to ١}{نهـا} \sqrt{\frac{س^٢ + ٢س - ٣}{س^٢ - س}}$ « ٢ »

(٣) $\underset{س \to \sqrt{٢}}{نهـا} \frac{س^٢ - ٢}{س^٢ + \sqrt{٢}س - ٤}$ « $\frac{٢}{٣}$ »

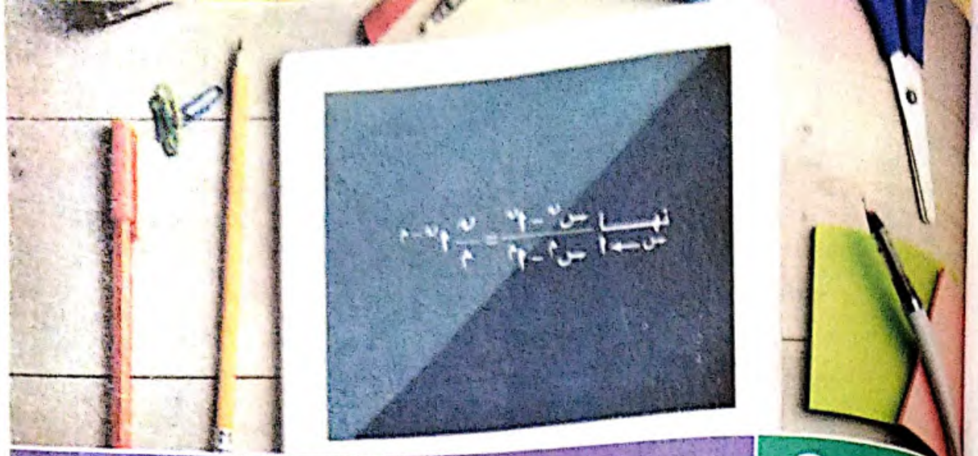
(٤) $\underset{س \to ١}{نهـا} \frac{٥س^{-٢} + ٢س^{-١} - ٧}{٣س^{-٢} + س^{-١} - ٤}$ « $\frac{١٧}{٩}$ »

(٥) $\underset{ظاس \to ٣}{نهـا} \frac{ظا^٢س - ٢ظاس - ٣}{ظا^٢س - ٤ظاس + ٣}$ « ٢ »

(٦) $\underset{س \to ٠}{نهـا} \frac{جتا^٢س - ٥جتاس + ٤}{جا^٢س}$ « $\frac{٣}{٢}$ »

(٧) $\underset{س \to ٨}{نهـا} \frac{(\sqrt[٣]{س} - ٢)(\sqrt[٣]{س^٢} + ٢\sqrt[٣]{س} + ٤)}{س^٢ - ٦٤}$ « $\frac{١}{١٦}$ »

(٨) $\underset{س \to ١}{نهـا} \left(\frac{\sqrt{س^٢ + ٣} + ٢}{س^٢ - س} - \frac{٢}{\sqrt{س^٢ + ٣} - ٢}\right)$ « ٢- »



الدرس 3

نظرية (٤) «القانون»

نظرية ٤

$$\underset{س \to أ}{نهـا} \frac{س^ن - أ^ن}{س - أ} = ن أ^{ن-١} \quad لكل\ ن \in ح - \{٠\}$$

ولاستخدام هذه النظرية يراعى الآتى:

١ أن تكون الدالة على الصورة (أو يمكن وضعها على الصورة) $\frac{س^ن - أ^ن}{س - أ}$

٢ أن يكون المطلوب إيجاد النهاية عندما س ← أ

مثال ١

أوجد كلاً مما يأتى:

١ $\underset{س \to ٣}{نهـا} \frac{س^٤ - ٨١}{س - ٣}$

٢ $\underset{س \to \sqrt{٥}}{نهـا} \frac{س^٧ - ١٢٥\sqrt{٥}}{س - \sqrt{٥}}$

٣ $\underset{س \to -٢}{نهـا} \frac{س^٥ + ٣٢}{س^٢ + ٥س + ٦}$

٤ $\underset{س \to \frac{١}{٢}}{نهـا} \frac{٣٢س^٥ - ١}{٢س - ١}$

الحل

١ $\underset{س \to ٣}{نهـا} \frac{س^٤ - ٨١}{س - ٣} = \underset{س \to ٣}{نهـا} \frac{س^٤ - ٣^٤}{س - ٣} = ٤ \times ٣^٣ = ١٠٨$

لاحظ أنه: **عند التعويض المباشر نجد أن: د (٣) =** $\frac{صفر}{صفر}$

٢ $\underset{س \to \sqrt{٥}}{نهـا} \frac{س^٧ - ١٢٥\sqrt{٥}}{س - \sqrt{٥}} = \underset{س \to \sqrt{٥}}{نهـا} \frac{س^٧ - (\sqrt{٥})^٧}{س - \sqrt{٥}} = ٧ \times (\sqrt{٥})^٦ = ٨٧٥$

٣ $\underset{س \to -٢}{نهـا} \frac{س^٥ - ٣٢}{(س + ٢)(س + ٣)} = \underset{س \to -٢}{نهـا} \frac{س^٥ - (-٣٢)}{س - (-٢)} \times \underset{س \to -٢}{نهـا} \frac{١}{س + ٣}$

$= \underset{س \to -٢}{نهـا} \frac{س^٥ - (-٢)^٥}{س - (-٢)} \times ١ = ٥ \times (-٢)^٤ = ٨٠$

$$\lim_{س\to\frac{1}{2}}\frac{32س^5-1}{2س-1}=\lim_{س\to\frac{1}{2}}\frac{32\left[س^5-\frac{1}{32}\right]}{2\left[س-\frac{1}{2}\right]}=\lim_{س\to\frac{1}{2}}16\times\frac{س^5-\left(\frac{1}{2}\right)^5}{س-\frac{1}{2}}$$ ٤

$$=16\lim_{س\to\frac{1}{2}}\frac{س^5-\left(\frac{1}{2}\right)^5}{س-\frac{1}{2}}=16\times5\times\left(\frac{1}{2}\right)^4=5$$

حل آخر :

عندما $س\to\frac{1}{2}$ فإن : $2س\to1$

$$\therefore\lim_{س\to\frac{1}{2}}\frac{32س^5-1}{2س-1}=\lim_{2س\to1}\frac{(2س)^5-(1)^5}{2س-1}=5\times1^4=5$$

حل ثالث :

بوضع $2س=ص$ فعندما $س\to\frac{1}{2}$ فإن : $ص\to1$

$$\therefore\lim_{س\to\frac{1}{2}}\frac{32س^5-1}{2س-1}=\lim_{س\to\frac{1}{2}}\frac{(2س)^5-(1)^5}{(2س)-1}$$

$$=\lim_{ص\to1}\frac{(ص)^5-(1)^5}{ص-1}=5\times1^4=5$$

نتيجتان

١ $\lim_{س\to0}\frac{(س+أ)^ن-أ^ن}{س}=ن\,أ^{ن-1}$

٢ $\lim_{س\to أ}\frac{س^ن-أ^ن}{س^م-أ^م}=\frac{ن}{م}أ^{ن-م}$ حيث $ن\in ح-\{0\}$ ، $م\in ح-\{0\}$

مثال ٢

أوجد كلاً مما يأتي :

١ $\lim_{س\to1}\frac{س^5-1}{س^3-1}$

٢ $\lim_{س\to-3}\frac{س^5+243}{س^4-81}$

٣ $\lim_{س\to3}\frac{س^4-27س}{3س^4-243}$

٤ $\lim_{س\to1}\frac{(س+1)^6-64}{(س+1)^3-8}$

الحل

١ $\lim_{س\to1}\frac{س^5-1}{س^3-1}=\lim_{س\to1}\frac{س^5-1^5}{س^3-1^3}=\frac{5}{3}\times1^{5-3}=\frac{5}{3}$

٢ $\lim_{س\to-3}\frac{س^5+243}{س^4-81}=\lim_{س\to-3}\frac{س^5-(-3)^5}{س^4-(-3)^4}=\frac{5}{4}\times(-3)^{5-4}=-\frac{15}{4}$

٣ $\lim_{س\to3}\frac{س^4-27س}{3س^4-243}=\lim_{س\to3}\frac{س(س^3-27)}{3(س^4-81)}=\lim_{س\to3}\frac{س}{3}\times\lim_{س\to3}\frac{س^3-3^3}{س^4-3^4}$

$$=\frac{3}{3}\times\frac{3}{4}\times3^{3-4}=\frac{1}{4}$$

٤ $\because س\to1$

$\therefore س+1\to2$

$$\therefore\lim_{س\to1}\frac{(س+1)^6-64}{(س+1)^3-8}=\lim_{س+1\to2}\frac{(س+1)^6-2^6}{(س+1)^3-2^3}=\frac{6}{3}\times2^{6-3}=16$$

حل آخر :

بتحليل البسط كفرق بين مربعين :

$$\therefore\lim_{س\to1}\frac{(س+1)^6-64}{(س+1)^3-8}=\lim_{س\to1}\frac{[(س+1)^3-8][(س+1)^3+8]}{(س+1)^3-8}$$

$$=\lim_{س\to1}\left((س+1)^3+8\right)=(1+1)^3+8=16$$

مثال ٣

أوجد كلاً مما يأتي :

١ $\lim_{س\to0}\frac{(س+5)^4-625}{س}$

٢ $\lim_{س\to6}\frac{(س-5)^7-1}{س-6}$

٣ $\lim_{هـ\to0}\frac{(أ+2هـ)^6-أ^6}{5هـ}$

الحل

١ $\lim_{س\to0}\frac{(س+5)^4-625}{س}=\lim_{س\to0}\frac{(س+5)^4-5^4}{س}=4\times5^3=500$

٢ $\lim_{س\to6}\frac{(س-5)^7-1}{س-6}=\lim_{س-5\to1}\frac{(س-5)^7-1^7}{(س-5)-1}=7\times1^6=7$

٣ $\lim_{هـ\to0}\frac{(أ+2هـ)^6-أ^6}{5هـ}=\lim_{هـ\to0}\frac{\frac{2}{5}[(أ+2هـ)^6-أ^6]}{\frac{2}{5}\times5هـ}=\lim_{2هـ\to0}\frac{\frac{2}{5}[(أ+2هـ)^6-أ^6]}{2هـ}$

$$=\frac{2}{5}\times6\times أ^5=\frac{12}{5}أ^5$$

ملاحظتان

- $\sqrt[ن]{أ}=أ^{\frac{1}{ن}}$ حيث $ن\in ص^+-\{1\}$ ، $أ\in ح^+$

  فمثلاً : $\sqrt{س}=س^{\frac{1}{2}}$ ، $\sqrt[3]{8}=8^{\frac{1}{3}}=2$

- $\sqrt[ن]{أ^م}=أ^{\frac{م}{ن}}$ حيث $ن\in ص^+-\{1\}$ ، $أ\in ح^+$ ، $م\in ص$

  فمثلاً : $\sqrt[4]{س^5}=س^{\frac{5}{4}}$ ، $\sqrt[5]{64}=\sqrt[5]{2^6}=2^{\frac{6}{5}}$

مثال ٤

أوجد كلاً مما يأتي :

١ $\underset{س \to ٩}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{س} - ٣}{س - ٩}$

٢ $\underset{س \to ١}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt[٥]{س} - ١}{\sqrt[٣]{س} - ١}$

٣ $\underset{س \to ١٦}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt[٤]{س^{٥}} - ٣٢}{\sqrt{س^{٣}} - ٦٤}$

الحل

١ $\underset{س \to ٩}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{س} - ٣}{س - ٩} = \underset{س \to ٩}{\text{نها}} \dfrac{س^{\frac{١}{٢}} - ٩^{\frac{١}{٢}}}{س - ٩} = \frac{١}{٢} \times ٩^{\frac{١}{٢} - ١} = \frac{١}{٢} \times ٩^{-\frac{١}{٢}} = \dfrac{١}{٢\sqrt{٩}} = \frac{١}{٦}$

حل آخر :

بتحليل المقام كفرق بين مربعين :

$\therefore \underset{س \to ٩}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{س} - ٣}{س - ٩} = \underset{س \to ٩}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{س} - ٣}{(\sqrt{س} - ٣)(\sqrt{س} + ٣)} = \underset{س \to ٩}{\text{نها}} \dfrac{١}{(\sqrt{س} + ٣)}$

$= \dfrac{١}{\sqrt{٩} + ٣} = \frac{١}{٦}$

٢ $\underset{س \to ١}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt[٥]{س} - ١}{\sqrt[٣]{س} - ١} = \underset{س \to ١}{\text{نها}} \dfrac{س^{\frac{١}{٥}} - ١^{\frac{١}{٥}}}{س^{\frac{١}{٣}} - ١^{\frac{١}{٣}}} = \dfrac{\frac{١}{٥}}{\frac{١}{٣}} \times ١^{\frac{١}{٥} - \frac{١}{٣}} = \frac{٣}{٥}$

٣ $\underset{س \to ١٦}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt[٤]{س^{٥}} - ٣٢}{\sqrt{س^{٣}} - ٦٤} = \underset{س \to ١٦}{\text{نها}} \dfrac{س^{\frac{٥}{٤}} - (١٦)^{\frac{٥}{٤}}}{س^{\frac{٣}{٢}} - (١٦)^{\frac{٣}{٢}}}$

$= \dfrac{\frac{٥}{٤}}{\frac{٣}{٢}} \times ١٦^{(\frac{٥}{٤} - \frac{٣}{٢})}$

$= \frac{٥}{٦} \times ١٦^{-\frac{١}{٤}} = \frac{٥}{١٢}$

لاحظ أن

$١٦^{\frac{٥}{٤}} = (٢^{٤})^{\frac{٥}{٤}} = ٢^{٤ \times \frac{٥}{٤}}$

$= ٢^{٥} = ٣٢$

أى أن $٣٢ = ١٦^{\frac{٥}{٤}}$

وكذلك : $٦٤ = ١٦^{\frac{٣}{٢}}$

مثال ٥

أوجد كلاً مما يأتي :

١ $\underset{س \to ٣}{\text{نها}} \dfrac{س^{٣} + س^{٢} - ٣٦}{س^{٤} - ٨١}$

٢ $\underset{س \to ١}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt[٤]{٢س + ١٤} - ٢}{س - ١}$

٣ $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt[٣]{٣س + ٢} - ٢}{\sqrt[٥]{س - ٣} + ١}$

الحل

١ $\underset{س \to ٣}{\text{نها}} \dfrac{س^{٣} + س^{٢} - ٣٦}{س^{٤} - ٨١} = \underset{س \to ٣}{\text{نها}} \dfrac{س^{٣} - ٢٧ + س^{٢} - ٩}{س^{٤} - ٨١}$

$= \underset{س \to ٣}{\text{نها}} \dfrac{س^{٣} - ٣^{٣}}{س^{٤} - ٣^{٤}} + \underset{س \to ٣}{\text{نها}} \dfrac{س^{٢} - ٣^{٢}}{س^{٤} - ٣^{٤}}$

$= \frac{٣}{٤} \times ٣^{٣-٤} + \frac{٢}{٤} \times ٣^{٢-٤} = \frac{١}{٤} + \frac{١}{١٨} = \frac{١١}{٣٦}$

٢ $\underset{س \to ١}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt[٤]{٢س + ١٤} - ٢}{س - ١} = \underset{س \to ١}{\text{نها}} \dfrac{(٢س + ١٤)^{\frac{١}{٤}} - (١٦)^{\frac{١}{٤}}}{س - ١} \times \frac{٢}{٢}$

$= ٢ \underset{٢س + ١٤ \to ١٦}{\text{نها}} \dfrac{(٢س + ١٤)^{\frac{١}{٤}} - (١٦)^{\frac{١}{٤}}}{(٢س + ١٤) - ١٦}$

$= ٢ \times \frac{١}{٤} (١٦)^{\frac{١}{٤} - ١} = \frac{١}{١٦}$

٣ $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt[٣]{٣س + ٢} - ٢}{\sqrt[٥]{س - ٣} + ١} = \underset{س \to ٢}{\text{نها}} \dfrac{(٣س + ٢)^{\frac{١}{٣}} - ٨^{\frac{١}{٣}}}{٣س + ٢ - ٨} \times \dfrac{٣س + ٢ - ٨}{(س - ٣)^{\frac{١}{٥}} + ١}$

$= \underset{٣س + ٢ \to ٨}{\text{نها}} \dfrac{(٣س + ٢)^{\frac{١}{٣}} - ٨^{\frac{١}{٣}}}{(٣س + ٢) - ٨} \times \underset{س \to ٢}{\text{نها}} \dfrac{٣(س - ٢)}{(س - ٣)^{\frac{١}{٥}} + ١}$

$= \frac{١}{٣} \times ٨^{\frac{١}{٣} - ١} \times ٣ \underset{س \to ٢}{\text{نها}} \dfrac{س - ٢}{(س - ٣)^{\frac{١}{٥}} - (-١)^{\frac{١}{٥}}}$

$= \frac{١}{٤} \underset{س - ٣ \to -١}{\text{نها}} \dfrac{(س - ٣) - (-١)}{(س - ٣)^{\frac{١}{٥}} - (-١)^{\frac{١}{٥}}} = \frac{١}{٤} \times \dfrac{١}{\frac{١}{٥}} \times (-١)^{١ - \frac{١}{٥}} = \frac{٥}{٤}$

تمارين 14 على نظرية (٤) «القانون»

اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسي — مستويات عليا — تذكر — تطبيق — فهم

أولاً: أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① $\lim_{س \to ٢} \frac{س^ن - ٢^ن}{س^م - ٢^م} = \dots$

(أ) $\frac{م}{ن}$ (ب) $\frac{م}{ن}(٢)^{ن-م}$ (ج) $\frac{ن}{م}(٢)^{م-ن}$ (د) $\frac{ن}{م}(٢)^{ن-م}$

② $\lim_{ص \to ٢} \frac{ص^٥ - ٣٢}{ص - ٢} = \dots$

(أ) $٣١ ص^٤$ (ب) ٣٢×٢^٤ (ج) ٦٤ (د) ٥×٢^٤

③ $\lim_{س \to ١} \frac{س^{١٠} - ١}{س - ١} = \dots$

(أ) صفر (ب) ١ (ج) ٩ (د) ١٠

④ $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{-٥} - ٢^{-٥}}{س^{-٢} - ٢^{-٢}} = \dots$

(أ) ٢ (ب) $\frac{١}{٢}$ (ج) $\frac{١}{٣٢}$ (د) ٨

⑤ $\lim_{س \to -١} \frac{س^٥ + ١}{س + ١} = \dots$

(أ) ٥ (ب) ٤ (ج) −٥ (د) −٤

⑥ $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٥ - ٣٢}{س^٣ - ٨} = \dots$

(أ) ٤ (ب) $\frac{٥}{٣}$ (ج) صفر (د) $٦\frac{٢}{٣}$

⑦ $\lim_{س \to \frac{١}{٢}} \frac{٤ س^٢ - ١}{٣٢ س^٥ - ١} = \dots$

(أ) $\frac{٢}{٥}$ (ب) $\frac{٥}{٢}$ (ج) $\frac{٢}{٩}$ (د) $\frac{١}{٨}$

⑧ $\lim_{س \to -٢} \frac{س^٧ + ١٢٨}{س^٤ - ١٦} = \dots$

(أ) ٩ (ب) −٩ (ج) −١٤ (د) ١٤

⑨ $\lim_{س \to ١٦} \frac{\sqrt[٤]{س^٥} - ٣٢}{س - ١٦} = \dots$

(أ) ٥ (ب) $\frac{٥}{٢}$ (ج) $\frac{٥}{٤}$ (د) $\frac{٥}{٨}$

⑩ $\lim_{هـ \to ٠} \frac{(س + هـ)^ن - س^ن}{هـ} = \dots$

(أ) $س^ن$ ...

⑪ $\lim_{هـ \to ٠} \frac{(٢ + هـ)^٧ - ١٢٨}{هـ} = \dots$

(أ) ٢٢٦ [illegible]

⑫ $\lim_{هـ \to ٠} \frac{(٢ هـ - ١)^{١٠} - ١}{هـ} = \dots$

(أ) −٢ [illegible]

⑬ $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٦ - ٦٤}{س - ٢} = \dots$

(أ) $٦(٢)^٥$ (ب) ١٢٨ (ج) $٦٤(٢)^٥$ (د) ٣٢

⑭ $\lim_{س \to ١} \frac{س^{\frac{١٣}{٢}} - س}{س^{\frac{٧}{٢}} - س} = \dots$

(أ) $\frac{١٣}{٧}$ (ب) ١ (ج) ٠ (د) −س

⑮ $\lim_{س \to ١} \frac{س^ن - س^م}{س - س^ل} = \dots$

(أ) صفر (ب) ١ (ج) ... (د) −٢

⑯ $\lim_{س \to ٠} \frac{(س + ٢)^٥ - ٣٢}{س} = \dots$

(أ) ٢٥ (ب) ٦٤ (ج) ٨٠ (د) ١٠٠

⑰ $\lim_{س \to ٥} \frac{(س - ٣)^٧ - ١٢٨}{س - ٥} = \dots$

(أ) ٧ (ب) ٢٨ (ج) ٦٤ (د) ٤٤٨

⑱ $\lim_{س \to ٢} \frac{(س + ١)^٤ - ٨١}{س - ٢} = \dots$

(أ) ١٨ (ب) ٨١ (ج) −١٠٨ (د) ١٠٨

⑲ $\lim_{س \to ١} \frac{س^أ - س^ب}{س^أ - س^د} = \dots$

(أ) $\frac{أ + ب}{أ + د}$ (ب) $أ س^{ب - د}$ (ج) $\frac{أ - ب}{أ - د}$ (د) $\frac{ب}{د}$

⑳ $\lim_{س \to ١} \frac{١ - \sqrt[ن]{س}}{١ - \sqrt[م]{س}} = \dots$

(أ) ١ (ب) $\frac{م}{ن}$ (ج) −١ (د) $\frac{ن}{م}$

(٢١) $\lim_{س \to ٩} \frac{٣-\sqrt{س}}{٢٧-\sqrt{س^٣}} = \dots\dots$

(أ) $\frac{١}{٩}$ (ب) $\frac{١}{٢٧}$ (جـ) ٣ (د) $\frac{-١}{٢٧}$

(٢٢) $\lim_{س \to -٢} \frac{(س+٣)^٥ - ١}{س^٢ - ٤} = \dots\dots$

(أ) $\frac{٥}{٤}$ (ب) $-\frac{٥}{٤}$ (جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) $-\frac{١}{٤}$

(٢٣) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٥ - ٣٢}{س^٢ + ٢س - ١٠} = \dots\dots$

(أ) ٨٠ (ب) $\frac{٨٠}{٧}$ (جـ) $\frac{٧}{٨٠}$ (د) $\frac{١}{٨٠}$

(٢٤) $\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt[٤]{س} + ٢\sqrt{س} - ٣}{س - ١} = \dots\dots$

(أ) $\frac{٦}{٥}$ (ب) ٢ (جـ) ٥ (د) ٣

(٢٥) إذا كان : د (س) = $س^٥$ ، ر (س) = $س^٢ - ٤$

فإن : $\lim_{س \to ٢} \frac{د(س) - ٣٢}{ر(س)} = \dots\dots$

(أ) -٢٠ (ب) ٢٠ (جـ) ± ٢٠ (د) ٣٢

(٢٦) إذا كان : $\lim_{س \to أ} \frac{س^ن - أ^ن}{س^م - أ^م} = \frac{ن}{م}$ فإن : أ = ...

(أ) ١ (ب) ن (جـ) م (د) $\frac{م}{ن}$

(٢٧) إذا كانت : $\lim_{س \to ٢} \frac{(س)^ن - (٢)^ن}{س - ٢} = ٣٢$ فإن : ن = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٩ (د) ١٢

(٢٨) إذا كانت : $\lim_{س \to أ} \frac{س^٨ - أ^٨}{س^٦ - أ^٦} = ٤٨$ فإن : أ = ...

(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ± ٤ (د) ± ٦

(٢٩) $\lim_{س \to ٥} \frac{\sqrt[٣]{س+٣} - ٢}{س - ٥} = \dots\dots$

(أ) $\frac{١}{١٢}$ (ب) $\frac{٢}{٥}$ (جـ) $\frac{٣}{٥}$ (د) ١

(٣٠) $\lim_{س \to ٠} \frac{(١+س)^{\frac{٥}{٢}} - ١}{س} = \dots\dots$

(أ) $\frac{٥}{٢}$ (ب) صفر (جـ) $\frac{٢}{٥}$ (د) ليس لها وجود.

(٣١) $\lim_{س \to ٠} \frac{(س+٢)^٦ - ٦٤}{س^٢ + ١٦س} = \dots\dots$

(أ) ٦ (ب) ١٢ (جـ) ١٦ (د) ٦٤

(٣٢) $\lim_{س \to ١} \left(\frac{س^٦ - س^٧ + س^٨ - س^٩}{س - ١} \right) = \dots\dots$

(أ) ٣٠ (ب) -٢ (جـ) ٣ (د) ٩

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ أوجد كلاً مما يأتى :

① $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٣ - ٨}{س - ٢}$ «١٢»

② $\lim_{س \to -٥} \frac{س^٤ - ٦٢٥}{س + ٥}$ «-٥٠٠»

③ $\lim_{س \to أ} \frac{س^٥ - أ^٥}{س - أ}$ «٥ $أ^٤$»

④ $\lim_{س \to -٣} \frac{س^٤ - ٨١}{س^٥ + ٢٤٣}$ «$-\frac{٤}{١٥}$»

⑤ $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٦ - ٦٤}{س^٧ - ١٢٨}$ «$\frac{٣}{٧}$»

⑥ $\lim_{س \to ٢} \frac{٢س^٦ - ١٢٨}{س^٢ - ٤}$ «٩٦»

⑦ $\lim_{س \to -٢} \frac{س^٦ - ٦٤}{٣س + ٦}$ «-٦٤»

⑧ $\lim_{س \to -١} \frac{س^{١٠} + س}{س^٧ - س}$ «$\frac{-٣}{٢}$»

⑨ $\lim_{س \to ١} \frac{١ - س^٩}{س^٧ - ١}$ «$\frac{-٩}{٧}$»

⑩ $\lim_{س \to -\frac{١}{٢}} \frac{٣٢س^٥ + ١}{٦٤س^٦ - ١}$ «$\frac{-٥}{٦}$»

⑪ $\lim_{س \to -\frac{٢}{٣}} \frac{٢٤٣س^٥ + ٣٢}{٢٧س^٣ + ٨}$ «$\frac{٢٠}{٣}$»

⑫ $\lim_{س \to ٢} \frac{١٦س^٤ - ٨١س}{٢س^٣ - ٣س^٢}$ «٧٢»

٢ أوجد كلاً مما يأتى :

① $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{-٧} - (٢)^{-٧}}{س - ٢}$ «$\frac{-٧}{٢٥٦}$»

② $\lim_{س \to ١} \frac{س^{-٤} - ١}{س^{-١٨} - ١}$ «$\frac{٢}{٩}$»

③ $\lim_{س \to \sqrt{٢}} \frac{س^٧ - ٨\sqrt{٢}}{س^٢ - ٢}$ «$١٤\sqrt{٢}$»

④ $\lim_{س \to -\sqrt{٢}} \frac{س^٨ - ١٦}{س^٥ + ٤\sqrt{٢}}$ «$\frac{-١٦\sqrt{٢}}{٥}$»

⑤ $\lim_{س \to \frac{-٣}{\sqrt{٢}}} \frac{٨س^٦ - ٧٢٩}{\sqrt{٢}س + ٣}$ «-١٤٥٨»

⑥ $\lim_{س \to \frac{\pi}{٦}} \frac{جا^٣ س - \frac{١}{٨}}{جا س - \frac{١}{٢}}$ «$\frac{٣}{٤}$»

⑦ $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{-٥} - \frac{١}{٣٢}}{س^{-٧} - \frac{١}{١٢٨}}$ «$\frac{٢٠}{٧}$»

⑧ $\lim_{س \to -٢} \frac{٨س^{-٣} + ١}{س^{-٨} - \frac{١}{٢٥٦}}$ «-٩٦»

⑨ $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{-٨} - (١٦)^{-٢}}{س - ٢}$ «$\frac{-١}{٦٤}$»

⑩ $\lim_{س \to ٤} \frac{س^{\frac{٧}{٢}} - ١٢٨}{س^{\frac{٥}{٢}} - ٣٢}$ «$\frac{٢٨}{٥}$»

⑪ $\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt[٧]{س} - ١}{س - ١}$ «$\frac{١}{٧}$»

⑫ $\lim_{س \to ٤} \frac{\sqrt{س^٣} - ٨}{س^٢ - ١٦}$ «$\frac{٣}{٨}$»

⑬ $\lim_{س \to ١٦} \frac{\sqrt[٤]{س^٧} - ١٢٨}{س - ١٦}$ «١٤»

⑭ $\lim_{س \to ١} \frac{س\sqrt[٥]{س} - ١}{س^٢ - ١}$ «$\frac{٣}{٥}$»

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

أوجد كلاً مما يأتى :

① $\lim\limits_{\text{س} \to 1} \dfrac{\sqrt{\text{س}^3} - \sqrt{\text{س}}}{\sqrt{\text{س}^{11}} - \sqrt{\text{س}}}$ «$\frac{1}{5}$»

② $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \dfrac{(1 + 5\text{س})^{10} - 1}{(1 + 7\text{س})^{8} - 1}$ «$\frac{25}{28}$»

③ $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{\text{س} + 8} - 2}{(\text{س} + 3)^5 - 243}$ «$\frac{1}{4860}$»

④ $\lim\limits_{\text{س} \to 2} \dfrac{\sqrt[3]{2\text{س} - 3} - 1}{\sqrt[5]{3\text{س} - 5} - 1}$ «$\frac{10}{9}$»

⑤ $\lim\limits_{\text{س} \to 2} \dfrac{(\text{س}^2 - 3)^5 - 1}{\text{س} - 2}$ «200»

⑥ $\lim\limits_{\text{س} \to -1} \dfrac{(4\text{س} + 5)^6 + 7\text{س} + 6}{\text{س} + 1}$ «31»

⑦ $\lim\limits_{\text{س} \to 1} \dfrac{(5\text{س} - 4)^{10} + 4\text{س} - 5}{\text{س} - 1}$ «54»

⑧ $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \dfrac{\sqrt[5]{\text{س} + 1} - \sqrt[4]{\text{س} + 1}}{\text{س}}$ «$\frac{-1}{20}$»

⑨ $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \dfrac{\sqrt[5]{\text{س} + 1} - (\text{س} + 1)^7}{\text{س}}$ «$-6\frac{4}{5}$»

⑩ $\lim\limits_{\text{س} \to 2} \dfrac{5\sqrt{\text{س} - 1} + \sqrt[3]{\text{س} - 1} - 6}{\text{س} - 2}$ «$\frac{17}{6}$»

⑪ $\lim\limits_{\text{س} \to 1} \dfrac{\text{س}^7 + \text{س}^9 + \text{س}^{11} - 3}{\text{س} - 1}$ «27»

⑫ $\lim\limits_{\text{س} \to 2} \dfrac{\text{س}^4 (\text{س} - 1)^6 - 16}{\text{س} - 2}$ «128»

⑬ $\lim\limits_{\text{س} \to 2} \dfrac{\text{س}^5 \sqrt[3]{\text{س} + 6} - 64}{\text{س} - 2}$ «$162\frac{2}{3}$»

الدرس 4 نهاية الدالة عند اللا نهاية

المقصود ببحث نهاية الدالة عند اللانهاية هو التعرف على سلوك هذه الدالة عندما تكبر س (المتغير المستقل) كبرًا بلا حد ، فإذا كانت د (س) تقترب من عدد حقيقى معين (ل مثلاً) كلما كبرت س فإننا نقول إن الدالة د لها نهاية ل عندما تقترب س من اللانهاية ونكتب $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \text{د}(\text{س}) = \text{ل}$

مثال توضيحى ①

إذا كانت د : د (س) = $\dfrac{2\text{س} + 1}{\text{س}}$ وأردنا دراسة سلوك الدالة د عندما تكبر س بدون حد أى عندما تقترب س من اللانهاية فإننا نفرض أن س تأخذ القيم ١ ، ١٠ ، ١٠٠ ، ١٠٠٠ ، ١٠٠٠٠ ، ... إلخ فنحصل على الجدول الآتى :

س	١	١٠	١٠٠	١٠٠٠	١٠٠٠٠	....
د (س) = $\frac{2\text{س} + 1}{\text{س}}$	٢	٢,١	٢,٠١	٢,٠٠١	٢,٠٠٠١	....

ومن هذا الجدول نلاحظ أنه عندما تأخذ س قيمًا متدرجة فى الكبر فإن د (س) تقترب أكثر وأكثر من القيمة ٢ وبلغة النهايات

فإننا نقول إن د (س) ⟵ ٢ عندما س ⟵ ∞

ونكتب $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \text{د}(\text{س}) = 2$

ونلاحظ فى هذا المثال :

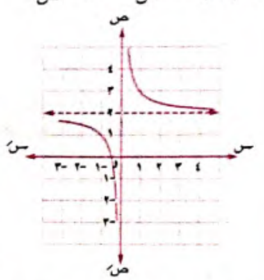
أننا لا نستطيع الحصول على نفس النتيجة عن طريق التعويض المباشر عن س = ∞

حيث سنحصل على $\frac{\infty}{\infty}$ (كمية غير معينة).

الحل البيانى

عند رسم الدالة

د : د (س) = $\dfrac{2\text{س} + 1}{\text{س}} = 2 + \dfrac{1}{\text{س}}$



نلاحظ من الرسم أنه عندما س ⟵ ∞ فإن د (س) ⟵ ٢

مثال توضيحي ٢

إذا أردنا دراسة سلوك الدالة د حيث د (س) = $\frac{1}{س}$ عندما تأخذ س قيمًا متدرجة فى الكبر فإننا نكون الجدول التالى :

س	١	١٠	١٠٠	١٠٠٠	١٠٠٠٠	....
د (س) = $\frac{1}{س}$	١	٠,١	٠,٠١	٠,٠٠١	٠,٠٠٠١	....

ونلاحظ من هذا الجدول أن :

د (س) ⟵ صفر

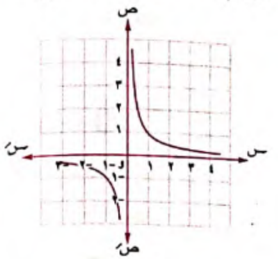
عندما س ⟵ ∞

أى أن : $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{1}{س}$ = صفر

وهذا المثال التوضيحى يقودنا للنظرية الآتية :

الحل البيانى

عند رسم الدالة د : د (س) = $\frac{1}{س}$



نلاحظ من الرسم أنه عندما س ⟵ ∞

فإن د (س) ⟵ صفر

نظرية ٥

$\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{1}{س}$ = صفر

نتيجتان

إذا كانت : أ ∈ ح فإن :

١) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{أ}{س}$ = صفر　　٢) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{أ}{س^{ن}}$ = صفر ، ن ∈ $ح_+$

قواعد أساسية

* $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}}$ جـ = جـ حيث جـ ثابت
* $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} س^{ن}$ = ∞ حيث ن عدد موجب
* نظرية (٢) المتعلقة بنهاية مجموع أو فرق أو ضرب أو قسمة دالتين عند س = أ السابق دراستها صحيحة عندما نضع س ⟵ ∞ بدلًا من س ⟵ أ

مثال ١

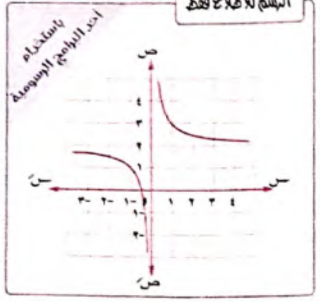
أوجد كلاً مما يأتى : ١) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} (\frac{1}{س} + 2)$　　٢) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} (3 - \frac{1}{س^2})$

الحل

١) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} (\frac{1}{س} + 2)$

= $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{1}{س} + \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} 2$

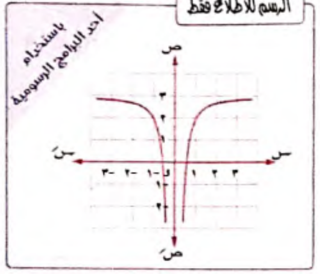
= ٠ + ٢ = ٢



٢) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} (3 - \frac{1}{س^2})$

= $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} 3 - \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{1}{س^2}$

= ٣ − صفر = ٣



إيجاد نهاية دالة كسرية جبرية عند اللانهاية

إذا كان التعويض المباشر عن س = ∞ يعطى $\frac{\infty}{\infty}$ فإننا نقسم كلاً من البسط والمقام على المتغير س مرفوعًا لأعلى قوة فى المقام (درجة المقام) ، ثم نستخدم النظرية ونتيجتيها لإيجاد النهاية (إن وجدت)

مثال ٢

أوجد كلاً مما يأتى :

١) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{2س - 5}{3س - 7}$

٢) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{5س^2 - 3س + 6}{2س - 7س^2}$

٣) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{3س^2 - 5س}{2س^3 - 6س^2 + 4س - 1}$

٤) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{س^5 - 2س^2}{س^4 + 3س^2 - 1}$

الحل

١) بقسمة كل من البسط والمقام على س

∴ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{2س - 5}{3س - 7} = \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{2 - \frac{5}{س}}{3 - \frac{7}{س}} = \frac{2 - 0}{3 - 0} = \frac{2}{3}$

[٢] بقسمة كل من البسط والمقام على س^2

$$\therefore \lim_{\text{س}\to\infty} \frac{5\text{س}^2 - 3\text{س} + 6}{2\text{س} - 7\text{س}^2} = \lim_{\text{س}\to\infty} \frac{5 - \frac{3}{\text{س}} + \frac{6}{\text{س}^2}}{\frac{2}{\text{س}} - 7} = -\frac{5}{7}$$

[٣] بقسمة كل من البسط والمقام على س^3

$$\therefore \lim_{\text{س}\to\infty} \frac{3\text{س}^2 - 5\text{س}}{2\text{س}^3 - 6\text{س}^2 + 4\text{س} - 1} = \lim_{\text{س}\to\infty} \frac{\frac{3}{\text{س}} - \frac{5}{\text{س}^2}}{2 - \frac{6}{\text{س}} + \frac{4}{\text{س}^2} - \frac{1}{\text{س}^3}} = \frac{0}{2} = 0$$

[٤] بقسمة كل من البسط والمقام على س^4

$$\therefore \lim_{\text{س}\to\infty} \frac{\text{س}^5 - 2\text{س}^2}{\text{س}^4 + 3\text{س}^3 - 1} = \lim_{\text{س}\to\infty} \frac{\text{س} - \frac{2}{\text{س}^2}}{1 + \frac{3}{\text{س}} - \frac{1}{\text{س}^4}} = \frac{\infty - 0}{1 + 0 - 0} = \infty$$

ملاحظة هامة

* عند إيجاد $\lim_{\text{س}\to\infty} \frac{\text{د}(\text{س})}{\text{ر}(\text{س})}$ حيث كل من د (س) ، ر (س) دالة كثيرة حدود فإن :

[١] النهاية = عدد حقيقي لا يساوى الصفر «إذا كانت درجة البسط = درجة المقام».

[٢] النهاية = صفر «إذا كانت درجة البسط أصغر من درجة المقام».

[٣] النهاية = $\pm\infty$ «إذا كانت درجة البسط أكبر من درجة المقام».

مثال ③

أوجد كلاً مما يأتى :

[١] $\lim_{\text{س}\to\infty} \frac{(\text{س} - 1)(\text{س}^2 + 1)}{\text{س}^2(5\text{س} - 1)}$ [٢] $\lim_{\text{س}\to\infty} \frac{(3\text{س}^3 + 2)^2(\text{س}^2 - 1)^3}{\text{س}^5(\text{س} + 1)^7}$

الحل

[١] بقسمة كل من البسط والمقام على س^3

$$\therefore \lim_{\text{س}\to\infty} \frac{(\text{س} - 1)(\text{س}^2 + 1)}{\text{س}^2(5\text{س} - 1)} = \lim_{\text{س}\to\infty} \frac{(1 - \frac{1}{\text{س}})(1 + \frac{1}{\text{س}^2})}{1(5 - \frac{1}{\text{س}})} = \frac{1 \times 1}{1 \times 5} = \frac{1}{5}$$

[٢] بقسمة كل من البسط والمقام على س^{12}

$$\therefore \lim_{\text{س}\to\infty} \frac{(3\text{س}^3 + 2)^2(\text{س}^2 - 1)^3}{\text{س}^5(\text{س} + 1)^7} = \lim_{\text{س}\to\infty} \frac{(3 + \frac{2}{\text{س}^3})^2(1 - \frac{1}{\text{س}^2})^3}{1(1 + \frac{1}{\text{س}})^7} = \frac{3^2 \times 1^3}{1 \times 1^7} = 9$$

مثال ④

أوجد كلّا مما يأتى :

[١] $\lim_{\text{س}\to\infty} \frac{2\text{س}^3 - 9}{|3\text{س}|^3 + 7}$ [٢] $\lim_{\text{س}\to\infty} \frac{5\text{س} - 6}{\sqrt{9\text{س}^2 + 7}}$

[٣] $\lim_{\text{س}\to\infty} \frac{\sqrt[3]{8\text{س}^3 - 5\text{س} + 1}}{3\text{س} - 2}$ [٤] $\lim_{\text{س}\to\infty} \frac{\sqrt[5]{\text{س}^5 + \text{س}^3}}{\sqrt[7]{\text{س}^7 - \text{س}^2}}$

[٥] $\lim_{\text{س}\to\infty} \left(\sqrt{\text{س}^2 - \text{س} + 1} - \sqrt{\text{س}^2 + \text{س} + 1}\right)$

الحل

[١] $\because \text{س} \to \infty \quad \therefore |\text{س}| = \text{س}$ $\therefore$ النهاية $= \lim_{\text{س}\to\infty} \frac{2\text{س}^3 - 9}{27\text{س}^3 + 7}$

وبقسمة كل من البسط والمقام على س^3

$$\therefore \lim_{\text{س}\to\infty} \frac{2\text{س}^3 - 9}{27\text{س}^3 + 7} = \lim_{\text{س}\to\infty} \frac{2 - \frac{9}{\text{س}^3}}{27 + \frac{7}{\text{س}^3}} = \frac{2}{27}$$

[٢] بقسمة كل من البسط والمقام على $\text{س} = \sqrt{\text{س}^2}$

$$\therefore \lim_{\text{س}\to\infty} \frac{5\text{س} - 6}{\sqrt{9\text{س}^2 + 7}} = \lim_{\text{س}\to\infty} \frac{5 - \frac{6}{\text{س}}}{\sqrt{9 + \frac{7}{\text{س}^2}}} = \frac{5}{\sqrt{9}} = \frac{5}{3}$$

لاحظ أنه

عندما $\text{س} \to \infty$

فإن : $\text{س} = |\text{س}| = \sqrt{\text{س}^2} = \sqrt[3]{\text{س}^3} = \sqrt[4]{\text{س}^4} = \dots$

[٣] بقسمة كل من البسط والمقام على $\text{س} = \sqrt[3]{\text{س}^3}$

$$\therefore \lim_{\text{س}\to\infty} \frac{\sqrt[3]{8\text{س}^3 - 5\text{س} + 1}}{3\text{س} - 2} = \lim_{\text{س}\to\infty} \frac{\sqrt[3]{8 - \frac{5}{\text{س}^2} + \frac{1}{\text{س}^3}}}{3 - \frac{2}{\text{س}}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{3} = \frac{2}{3}$$

[٤] بقسمة كل من البسط والمقام على $\text{س} = \sqrt[5]{\text{س}^5} = \sqrt[7]{\text{س}^7}$

$$\therefore \lim_{\text{س}\to\infty} \frac{\sqrt[5]{\text{س}^5 + \text{س}^3}}{\sqrt[7]{\text{س}^7 - \text{س}^2}} = \lim_{\text{س}\to\infty} \frac{\sqrt[5]{1 + \frac{1}{\text{س}^2}}}{\sqrt[7]{1 - \frac{1}{\text{س}^5}}} = \frac{\sqrt[5]{1}}{\sqrt[7]{1}} = 1$$

[٥] $\lim_{\text{س}\to\infty} \left(\sqrt{\text{س}^2 - \text{س} + 1} - \sqrt{\text{س}^2 + \text{س} + 1}\right)$

$$= \lim_{\text{س}\to\infty} \left[\left(\sqrt{\text{س}^2 - \text{س} + 1} - \sqrt{\text{س}^2 + \text{س} + 1}\right) \times \frac{\sqrt{\text{س}^2 - \text{س} + 1} + \sqrt{\text{س}^2 + \text{س} + 1}}{\sqrt{\text{س}^2 - \text{س} + 1} + \sqrt{\text{س}^2 + \text{س} + 1}}\right]$$

$$= \lim_{\text{س}\to\infty} \frac{\text{س}^2 - \text{س} + 1 - (\text{س}^2 + \text{س} + 1)}{\sqrt{\text{س}^2 - \text{س} + 1} + \sqrt{\text{س}^2 + \text{س} + 1}}$$

$$= \lim_{\text{س}\to\infty} \frac{-2\text{س}}{\sqrt{\text{س}^2 - \text{س} + 1} + \sqrt{\text{س}^2 + \text{س} + 1}}$$

وبقسمة كل من البسط والمقام على $\text{س} = \sqrt{\text{س}^2}$

$$= \lim_{\text{س}\to\infty} \frac{-2}{\sqrt{1 - \frac{1}{\text{س}} + \frac{1}{\text{س}^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{\text{س}} + \frac{1}{\text{س}^2}}} = \frac{-2}{\sqrt{1} + \sqrt{1}} = -1$$

مثال ⑤

أوجد كلاً مما يأتى :

1. $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\frac{٥}{س^{٢}} - \frac{٧ س^{٣}}{س^{٤}} + ٢ \right)$
2. $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} (٤ س^{٢} + ٣ س + ٧)$
3. $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} (٥ س^{٤} - س^{٢} - ٣)$
4. $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} (٤ س^{٢} - ٥ س^{٣} + ١٣)$

الحل

1. $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\frac{٥}{س^{٢}} - \frac{٧ س^{٣}}{س^{٤}} + ٢ \right) =$ صفر − صفر $+ ٢ = ٢$
2. $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} (٤ س^{٢} + ٣ س + ٧)$ [لاحظ التعويض المباشر يعطى $\infty + \infty + ٧$]

   $\therefore \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} (٤ س^{٢} + ٣ س + ٧) = \infty$
3. $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} (٥ س^{٤} - س^{٢} - ٣)$ [لاحظ التعويض المباشر يعطى $\infty - \infty - ٣$ أى كمية غير معينة]

   $= \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} س^{٤} \left(٥ - \frac{١}{س^{٢}} - \frac{٣}{س^{٤}} \right)$ [نأخذ س عامل مشترك بأكبر أس]

   $= \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} س^{٤} \times \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(٥ - \frac{١}{س^{٢}} - \frac{٣}{س^{٤}} \right) = \infty \times ٥ = \infty$
4. $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} (٤ س^{٢} - ٥ س^{٣} + ١٣)$ [لاحظ التعويض المباشر يعطى $\infty - \infty$ أى كمية غير معينة]

   $= \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} س^{٣} \left(\frac{٤}{س} - ٥ + \frac{١٣}{س^{٣}} \right)$ [نأخذ س عامل مشترك بأكبر أس]

   $= \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} س^{٣} \times \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\frac{٤}{س} - ٥ + \frac{١٣}{س^{٣}} \right) = \infty \times -٥ = -\infty$

تمارين 15 على نهاية الدالة عند اللانهاية

اختبر نفسك

• فهم • تطبيق • مستويات عليا — من أسئلة الكتاب المدرسي

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\frac{٣}{س^{٢}} - ٢ \right) = \dots\dots\dots$

(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) −٣ (د) −٢

② $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٣ س}{٤ س + ٥} = \dots\dots\dots$

(أ) ∞ (ب) $\frac{٣}{٤}$ (جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) صفر

③ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٢ س^{٢} + ١}{س^{٢} + ١} = \dots\dots\dots$

(أ) صفر (ب) غير موجودة. (جـ) ∞ (د) ٢

④ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢} + ٥}{٦} = \dots\dots\dots$

(أ) صفر (ب) $\frac{٥}{٦}$ (جـ) ١ (د) ∞

⑤ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{س} - ٣}{س} = \dots\dots\dots$

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) −٢ (د) ∞

⑥ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} (٣ س^{-٥} + ٤ س^{-٢} + ٥) = \dots\dots\dots$

(أ) ١٢ (ب) ∞ (جـ) ٥ (د) صفر

⑦ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٣ س^{-٣} + ٤ س^{-٢} - ٢}{٧ س^{-٣} - س^{-٢} + ٦} = \dots\dots\dots$

(أ) ∞ (ب) صفر (جـ) $\frac{٣}{٧}$ (د) $\frac{١}{٢}$

⑧ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{س^{٧} - ٢ س^{٣}}{٢ س^{٤} - ٣ س^{٢} - ١} = \dots\dots\dots$

(أ) صفر (ب) ٣ (جـ) ∞ (د) $\frac{١}{٢}$

⑨ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٣ س^{٢}}{س (٢ س - ١)} = \dots\dots\dots$

(أ) $\frac{٣}{٢}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) صفر (د) ٣

⑩ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \sqrt{\frac{٣ + ٢ س}{٤ س - ١}} = \dots\dots\dots$

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{٣}{٤}$ (جـ) $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ (د) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

(11) $\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\text{س}^2 + 5}{\text{س}(2\text{س}^2 + 3)} = \dots\dots$

(أ) $\frac{5}{8}$ (ب) 1 (جـ) $\frac{1}{2}$ (د) $\frac{5}{2}$

(12) $\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{5 + \text{س}^{-2}}{2\text{س}^{-2} + 1} = \dots\dots$

(أ) $\frac{5}{4}$ (ب) $\frac{5}{2}$ (جـ) 5 (د) $\frac{1}{2}$

(13) $\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{1}{\text{س}} \sqrt{8 + 9\text{س}^2} = \dots\dots$

(أ) $2\sqrt{2}$ (ب) 3 (جـ) $-2\sqrt{2}$ (د) -3

(14) $\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\sqrt[3]{64\text{س}^3 + 7\text{س} - 2}}{3\text{س} + 2} = \dots\dots$

(أ) 4 (ب) 2 (جـ) $\frac{2}{3}$ (د) $\frac{4}{3}$

(15) $\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\sqrt[3]{8\text{س}^3 + 1}}{|\text{س}|} = \dots\dots$

(أ) 2 (ب) 8 (جـ) صفر (د) 4

(16) $\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\sqrt{9\text{س}^2 + 2}}{\sqrt[3]{1 - 8\text{س}^3}} = \dots\dots$

(أ) $\frac{-2}{3}$ (ب) $\frac{-9}{8}$ (جـ) $\frac{3}{2}$ (د) $\frac{-3}{2}$

(17) $\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{4 - 3\text{س}^2}{\sqrt{\text{س}^4 + 9}} = \dots\dots$

(أ) -3 (ب) 1 (جـ) صفر (د) ∞

(18) $\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\sqrt{\text{س} + 2} + \sqrt{\text{س} + 3}}{\sqrt{2\text{س} + 5}} = \dots\dots$

(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) 1 (جـ) $\sqrt{2}$ (د) $\frac{1}{\sqrt{5}}$

(19) $\lim_{\text{س} \to \infty} \left(\frac{3\text{س}^2 + 2\text{س} + 1}{\text{س}^2 - 3\text{س} + 2}\right)^4 = \dots\dots$

(أ) 3 (ب) 9 (جـ) 27 (د) 81

(20) $\lim_{\text{س} \to \infty} \text{س}\left[\left(\text{أ} + \frac{1}{\text{س}}\right)^{\text{ن}} - \text{أ}^{\text{ن}}\right] = \dots\dots$

(أ) ن أ (ب) $\text{ن أ}^{\text{ن}-1}$ (جـ) صفر (د) غير موجودة.

(21) $\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{(12)^{\frac{1}{\text{س}}}}{\text{س} + 7} = \dots\dots$

(أ) 1 (ب) صفر (جـ) $\frac{12}{7}$ (د) ∞

(22) $\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\text{ك}^{\frac{1}{\text{س}}}}{2} = \dots\dots$ حيث ك ثابت موجب.

(أ) $\frac{\text{ك}}{2}$ (ب) $\frac{1}{2}$ (جـ) 2 (د) 2 ك

(23) إذا كانت : $\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\text{أ س} + 6}{2\text{س} - 7} = 4$ فإن : أ = ... حيث أ ∈ ع

(أ) 2 (ب) 4 (جـ) 6 (د) 8

(24) إذا كانت $\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\text{أ}^2\text{س} + 7}{2\text{س} - 5} = 8$ فإن : أ = ... حيث أ ∈ ع

(أ) 2 (ب) صفر (جـ) ± 4 (د) ± 8

(25) $\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\text{أ س}^2 - 5\text{س}}{2\text{س} + 3\text{س}^2} = 2$ فإن : أ = ...

(أ) 3 (ب) 6 (جـ) 9 (د) 12

(26) إذا كان : م ∈ ع وكان : $\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{(\text{م} + 2)\text{س}^2 - \text{س} + 4}{2\text{م س}^2 - 2\text{س} + 5} = 2$ فإن : م = ...

(أ) صفر (ب) $\frac{1}{2}$ (جـ) $\frac{2}{3}$ (د) 1

(27) $\lim_{\text{س} \to \infty} (3 + 2\text{س} - 5\text{س}^2) = \dots\dots$

(أ) ∞ (ب) $-\infty$ (جـ) صفر (د) 7

(28) $\lim_{\text{س} \to \infty} (\text{س}^3 + 7\text{س}^2 + 8) = \dots\dots$

(أ) ∞ (ب) صفر (جـ) $-\infty$ (د) 1

(29) $\lim_{\text{س} \to \infty} \left(\sqrt{\text{س}^2 + \text{س}} - \text{س}\right) = \dots\dots$

(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) صفر (جـ) $\sqrt{2}$ (د) ليس لها وجود.

(30) $\lim_{\text{س} \to \infty} \text{س}^{\text{ن}} =$ صفر إذا كانت ن ∈ ......

(أ) ط (ب) ص (جـ) ع^+ (د) ع^-

(31) $\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\sqrt{4\text{س} + \sqrt{\text{س} + \sqrt{\text{س}}}}}{8\sqrt{\text{س}}} = \dots\dots$

(أ) 1 (ب) $\frac{1}{4}$ (جـ) $\frac{1}{2}$ (د) $\frac{1}{8}$

(32) إذا كان : أ > ب فإن : $\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\text{س}^{\text{أ}}}{\text{س}^{\text{ب}}} = \dots\dots$

(أ) صفر (ب) ∞ (جـ) 1 (د) أ − ب

(33) إذا كان : أ < ب < صفر فإن : $\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\text{س}^{\text{أ}}}{\text{س}^{\text{ب}}} = \dots\dots$

(أ) ∞ (ب) $-\infty$ (جـ) صفر (د) أ − ب

♣ ㉞ إذا كانت : د (س) كثيرة حدود من الدرجة الثالثة ، ر (س) كثيرة حدود من الدرجة الخامسة

فإن : $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \frac{\text{ر}(\text{س})}{\text{س}^{٢}\,\text{د}(\text{س})} = \text{.........}$

(أ) $\pm\infty$ (ب) صفر

(ج) عدد حقيقى $\neq$ صفر (د) ليس لها وجود.

ثانياً الأسئلة المقالية

١ أوجد كلاً من النهايات الآتية :

① $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \frac{٢\text{س} - ٥}{٣\text{س} + ٨}$ «$\frac{٢}{٣}$»

② $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \frac{٢\text{س} - ٥}{٣\text{س}^{٢} + ٨}$ «صفر»

③ $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \frac{٢\text{س}^{٢} - ٥}{٣\text{س} + ٨}$ «∞»

④ $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \frac{٤ - ٢\text{س}}{٣\text{س} - ١}$ «$\frac{-٢}{٣}$»

⑤ 📖 $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \frac{٥ - ٦\text{س} - ٣\text{س}^{٢}}{٢\text{س}^{٢} + \text{س} + ٤}$ «$-\frac{٣}{٢}$»

⑥ 📖 $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{٣} - ٢}{|\text{س}|^{٣} + ١}$ «١»

⑦ $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \frac{٦\text{س} - ٤\text{س}^{٣}}{٢ - ٧\text{س}^{٣}}$ «$\frac{٤}{٧}$»

⑧ $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \frac{٤\text{س}^{٥} + ٥}{٨\text{س}^{٥} + \text{س}^{٤} - ٢}$ «$\frac{١}{٢}$»

⑨ $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \frac{٧\text{س}^{٢} + ١}{٤\text{س}^{٢} - ٨\text{س} + ١}$ «صفر»

⑩ $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \frac{٥\text{س}^{٧} + ٢\text{س} - ١}{٦\text{س}^{٤} + ١٣}$ «∞»

⑪ $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \frac{٥ - ٧\text{س}^{٨} + ٣\text{س}^{١٤}}{٧ - ٦\text{س}^{١٤} + ٢\text{س}^{٦}}$ «$\frac{-١}{٢}$»

⑫ $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \left(\frac{٧}{\text{س}^{٢}} + \frac{٢}{\text{س}} - ٣\right)$ «-٣»

⑬ $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \frac{٥\text{س}^{-٣} + ٤\text{س}^{-٢} - ٣}{٧\text{س}^{-٣} - ٢\text{س}^{-٢} + ٨}$ «$\frac{-٣}{٨}$»

⑭ 📖 $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \frac{٥\text{س}^{٣} - ٤\text{س}^{٢} + ٢}{٧ - \text{س} + |٢\text{س}|^{٣}}$ «$\frac{٥}{٨}$»

⑮ 📖 $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} (\text{س}^{٣} + ٥\text{س}^{٢} + ١)$ «∞»

⑯ $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \left[\sqrt{\text{س}^{٢} + ٥\text{س} + ٧} + \text{س}\right]$ «∞»

⑰ 📖 $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} (٥ + \text{س} - \text{س}^{٢})$ «$-\infty$»

٢ أوجد كلاً مما يأتى :

① $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \frac{(٣\text{س} + ٩)(٢\text{س} + ٧)}{(\text{س} + ١)(٥\text{س} + ٤)}$ «$\frac{٦}{٥}$»

② $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \frac{٣\text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ٥}{(\text{س} + ٢)^{٢}}$ «٣»

③ $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \frac{٦\text{س}^{٢} - ٥\text{س}}{(٣ - \text{س})(٢ + \text{س})}$ «-٦»

④ $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \frac{٨\text{س}^{٣} - \text{س} + ١}{(\text{س} + ١)(٢\text{س}^{٢} - ٣)}$ «٤»

⑤ 📖 $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{٣} - ٤\text{س} + ٥}{(٢\text{س} - ١)^{٣}}$ «$\frac{١}{٨}$»

⑥ $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \frac{(٢\text{س} + ٣)(٤\text{س}^{٢} - ٥)}{(٣\text{س}^{٢} - ٨)(٥\text{س} - ٣)}$ «$\frac{٨}{١٥}$»

⑦ $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \frac{(٢\text{س} + ٣)(٥\text{س} - ١)(\text{س} - ٢)}{\text{س}(\text{س} + ١)(٣\text{س} - ١)}$ «$\frac{١٠}{٣}$»

⑧ $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \frac{(٧ + \sqrt{\text{س}})(٣ + \sqrt{\text{س}})}{٤\text{س} - ٢}$ «$\frac{١}{٤}$»

⑨ $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \frac{(٦\text{س} - ٥)(٣\text{س} - ٤)^{٢}}{(٣\text{س} - ٢)^{٣}}$ «٢»

⑩ 📖 $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \frac{(\text{س} + ٢)^{٣}(٣ - ٢\text{س}^{٢})}{٣\text{س}(\text{س}^{٢} + ٧)^{٢}}$ «$-\frac{٢}{٣}$»

⑪ $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \frac{(٣\text{س}^{٢} - ١)^{٢}}{١٨\text{س}^{٤} + \text{س}^{٢} + ١}$ «$\frac{١}{٢}$»

٣ أوجد كلاً مما يأتى :

① $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \frac{٢\text{س} + ٣}{\sqrt{٩\text{س}^{٢} + ٢٥}}$ «$\frac{٢}{٣}$»

② 📖 $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \frac{١}{\text{س}}\sqrt{٣ + ٤\text{س}^{٢}}$ «٢»

③ $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \frac{٢\text{س} + ١}{\sqrt{٤\text{س}^{٢} + ٣\text{س} - ٤}}$ «١»

④ $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \frac{٢\text{س} - ٣}{\sqrt[٣]{١٢٥\text{س}^{٣} - ٥}}$ «$\frac{٢}{٥}$»

⑤ $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \frac{\sqrt[٣]{٨\text{س}^{٣} + ٥\text{س} - ٢}}{٣\text{س} + ٢}$ «$\frac{٢}{٣}$»

⑥ 📖 $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \frac{٤ - ٣\text{س}^{٢}}{\sqrt[٣]{\text{س}^{٦} + ٩}}$ «-٣»

⑦ $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \frac{\sqrt{٩\text{س}^{٢} - ٣\text{س} + ٨}}{\sqrt[٣]{٣\text{س}^{٢} + ١٢٥\text{س}^{٣} + ٢}}$ «$\frac{٣}{٥}$»

⑧ $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \frac{\sqrt{\text{س}^{٢} + ١}}{\sqrt[٤]{\text{س}^{٤} + ٢}}$ «١»

⑨ $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \frac{\sqrt[٣]{٨\text{س}^{٣} + ١}}{\sqrt[٥]{٣٢\text{س}^{٥} + \text{س}}}$ «١»

⑩ $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \frac{\sqrt[٣]{٨\text{س}^{٣} + ١}}{\sqrt[٤]{\text{س}^{٤} - ٣}}$ «٢»

⑪ $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \frac{\sqrt{٣\text{س} - ٢} - \sqrt{١٢\text{س} + ٧}}{\sqrt{٢٧\text{س} - ٥}}$ «$\frac{-١}{٣}$»

⑫ $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \frac{\sqrt{٤\text{س}^{٢} + ٧} + ٣\text{س}}{٢\text{س} + ٩}$ «$\frac{٥}{٢}$»

⑬ $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \frac{\sqrt[٤]{\text{س}^{٦} + ٨} - \sqrt[٦]{\text{س}^{٢} + ٤}}{\sqrt{\text{س}^{٣} + ٩}}$ «١»

⑭ $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \frac{٣\text{س}^{٢} - \text{س} - ٧}{(\text{س} + ١)\sqrt{٢٥\text{س}^{٢} + ١}}$ «$\frac{٣}{٥}$»

٤ أوجد كلاً مما يأتى :

① 📖 $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \left[٧ + \frac{٢\text{س}^{٢}}{(\text{س} + ٣)^{٢}}\right]$ «٩»

② 📖 $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \left[\frac{\text{س}}{٢\text{س} + ١} + \frac{٣\text{س}^{٢}}{(\text{س} - ٣)^{٢}}\right]$ «$\frac{٧}{٢}$»

③ 📖 $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \left(\frac{٢}{٣} - \frac{٣\text{س}}{٢\text{س} + ٧}\right)$ «$\frac{-٥}{٦}$»

④ $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \left(\frac{٢\text{س}^{٣}}{٢\text{س}^{٢} + ١} - \text{س}\right)$ «صفر»

⑤ $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \left(\frac{\text{س}^{٢} - ١}{\text{س} + ٢} - \frac{\text{س}^{٢} + ١}{\text{س} - ٢}\right)$ «-٤»

⑥ $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \left(\sqrt{\text{س}^{٢} - ٢} - \sqrt{\text{س}^{٢} + \text{س}}\right)$ «$-\frac{١}{٢}$»

⑦ $\lim_{س \to \infty} \frac{1}{س}\left(\sqrt{4س^2+1} - \sqrt{س^2+1}\right)$ «١٠»

⑧ $\lim_{س \to \infty} \left(\sqrt{س^2+5س} - س\right)$ «$\frac{5}{2}$»

⑨ $\lim_{س \to \infty} س\left(\sqrt{4س^2+1} - 2س\right)$ «$\frac{1}{4}$»

⑩ $\lim_{س \to \infty} \frac{(2س-1)^5 (س^2+3)^3}{(س+1)^7 (س^2-5)^2}$ «٣٢»

⑪ $\lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt{س+1} - \sqrt{س-1}}{\sqrt{4س+1} - \sqrt{4س-1}}$ «٢»

٥ أوجد كلاً مما يأتى :

① $\lim_{س \to \infty} \left(\frac{2س^2 - 5س + 1}{4س^2 - 7}\right)^{\frac{1}{س}}$ «١»

② $\lim_{س \to \infty} \left(\frac{س+1}{\sqrt{س^2-1}} + أ^{\frac{1}{س}}\right)$ حيث أ موجبة. «٢»

③ $\lim_{س \to \infty} \left(\frac{2س-3}{\sqrt[3]{27س^3 - 15س + 2}} + 8^{\frac{1}{س}}\right)$ «$1\frac{2}{3}$»

④ $\lim_{س \to \infty} \left(\frac{5س^2}{1-س^2} - \sqrt[3]{125}\right)$ «−٦»

٦ أوجد قيمتى أ ، ن إذا كانت $\lim_{س \to \infty} \frac{4أس^ن - 4س + 5}{3 - 9س + 8س^2} = 2$ «٢ ، ٦»

٧ أوجد قيمة أ إذا كانت $\lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt[3]{أس^3+3}}{\sqrt{4س^2+7}} = -1$ «−٨»

٨ إذا كانت $\lim_{س \to \infty} \left(\sqrt{أس^2 + 3بس + 5} - 2س\right) = 3$

أوجد قيمة كل من : أ ، ب «٤ ، ٤»

٩ أوجد قيمتى أ ، ب إذا كانت $\lim_{س \to \infty} د(س) = 5$ ، $\lim_{س \to -2} د(س) = 2$

حيث $د(س) = \frac{2 - أس^2}{3 - بس + س^2}$ «٢ ، −٥»

١٠ إذا كانت : $\lim_{س \to \infty} \left(\frac{س^2+1}{س+1} - أس - ب\right) = 2$ أوجد قيمتى : أ ، ب «١ ، −٣»

١١ أوجد قيمتى أ ، ب إذا كانت $\lim_{س \to \infty} \frac{س^3 + 2س + 1}{(أ+1)س^4 + (7-ب)س^3 + س^2} = \infty$ «−١ ، ٧»

ثالثاً مسائل تقيس مهارات التفكير

أوجد كلاً مما يأتى :

① $\lim_{س \to \infty} \frac{س^2 + س}{(2س+3)^2}$ «$\frac{1}{4}$»

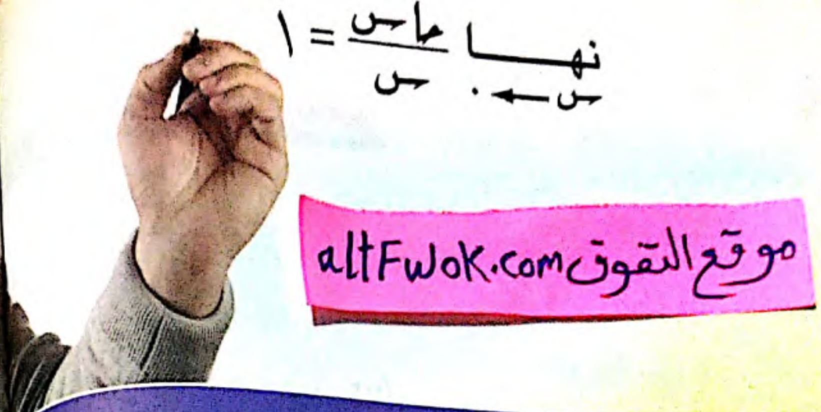
② $\lim_{ن \to \infty} ن\left[\left(أ + \frac{1}{ن}\right)^4 - أ^4\right]$ «٤أ³»

③ $\lim_{س \to \infty} س\left[\left(3 + \frac{1}{س}\right)^5 - 243\right]$ «٤٠٥»

④ $\lim_{س \to \infty} \left(\sqrt{س^2+2} - س\right)\sqrt{2س^2+1}$ «$\sqrt{2}$»

⑤ $\lim_{س \to \infty} (2س^{-1} - س^{-2})\sqrt{4س^2+1}$ «٤»

⑥ $\lim_{س \to \infty} \frac{5س\sqrt{س} + 16س - 3\sqrt{س^2-1}}{س + \sqrt{4س^2+1}}$ «$\frac{4}{3}$»



الدرس 5 نهايات الدوال المثلثية

نظرية

إذا كانت س قياس الزاوية بالتقدير الدائرى فإن :

[1] $\underset{س \to 0}{\text{نها}} \frac{\text{جا}\,س}{س} = 1$ [2] $\underset{س \to 0}{\text{نها}} \frac{\text{ظا}\,س}{س} = 1$

* عند دراسة قيم الدالة د : د (س) = $\frac{\text{جا}\,س}{س}$ عندما س ← ٠ .

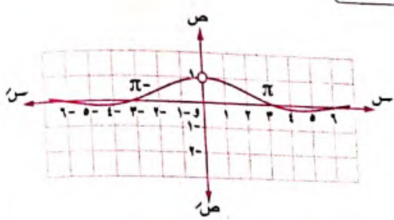
حيث س قياس الزاوية بالتقدير الدائرى نكون الجدول الآتى :

س	± ١	± ٠,١	± ٠,٠١	صفر
$\frac{\text{جا}\,س}{س}$	٠,٨٤١٥	٠,٩٩٨٣	......←	١

ونلاحظ أنه

«كلما اقتربت س من الصفر كلما اقتربت النسبة $\frac{\text{جا}\,س}{س}$ من الواحد الصحيح»

والشكل المقابل يوضح ذلك بيانيًا.



أى أن $\underset{س \to 0}{\text{نها}} \frac{\text{جا}\,س}{س} = 1$

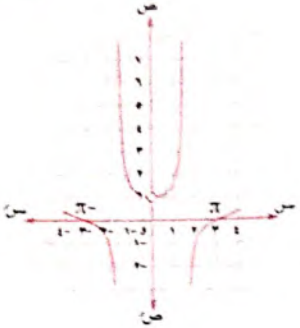
* بالمثل عند دراسة قيم الدالة د : د (س) = $\frac{\text{ظا}\,س}{س}$ عندما س ← ٠ .

حيث س قياس الزاوية بالتقدير الدائرى نكون الجدول الآتى :

س	± ١	± ٠,١	± ٠,٠١	صفر
$\frac{\text{ظا}\,س}{س}$	١,٥٥٧٤	١,٠٠٣٣	......←	١

ونلاحظ أنه

«كلما اقتربت س من الصفر كلما اقتربت النسبة $\frac{\text{ظا}\,س}{س}$ من الواحد الصحيح» والشكل المقابل يوضح ذلك بيانيًا.



أى أن $\underset{س \to 0}{\text{نها}} \frac{\text{ظا}\,س}{س} = 1$

ملاحظتان

[1] $\underset{س \to 0}{\text{نها}} \frac{س}{\text{جا}\,س} = 1$

[2] $\underset{س \to 0}{\text{نها}} \frac{س}{\text{ظا}\,س} = 1$ حيث س بالتقدير الدائرى.

نتيجة (1)

إذا كانت س قياس زاوية بالتقدير الدائرى فإن :

[1] $\underset{س \to 0}{\text{نها}} \frac{\text{جا}\,أس}{س} = أ$ ومنها $\underset{س \to 0}{\text{نها}} \frac{\text{جا}\,أس}{ب\,س} = \frac{أ}{ب}$ ، $\underset{س \to 0}{\text{نها}} \frac{ب\,س}{\text{جا}\,أس} = \frac{ب}{أ}$

[2] $\underset{س \to 0}{\text{نها}} \frac{\text{ظا}\,أس}{س} = أ$ ومنها $\underset{س \to 0}{\text{نها}} \frac{\text{ظا}\,أس}{ب\,س} = \frac{أ}{ب}$ ، $\underset{س \to 0}{\text{نها}} \frac{ب\,س}{\text{ظا}\,أس} = \frac{ب}{أ}$

فمثلا : * $\underset{س \to 0}{\text{نها}} \frac{\text{جا}\,3س}{س} = 3$ * $\underset{س \to 0}{\text{نها}} \frac{\text{ظا}\,2س}{س} = 2$ * $\underset{س \to 0}{\text{نها}} \frac{-5س}{\text{جا}\,3س} = \frac{-5}{3}$

* $\underset{س \to 0}{\text{نها}} \frac{\text{جا}\,2س}{5س} = \frac{2}{5}$ * $\underset{س \to 0}{\text{نها}} \frac{\text{ظا}\,4س}{3س} = \frac{4}{3}$ * $\underset{س \to 0}{\text{نها}} \frac{س}{\text{ظا}\,7س} = \frac{1}{7}$

ملاحظتان

[1] جا س ، جتا س معرفتان لجميع قيم س ∈ ح أما ظا س فهى معرفة لجميع قيم س عدا عند س = $\frac{2ن+1}{2}\pi$ ، ن ∈ ص لذلك فإن :

* $\underset{س \to أ}{\text{نها}}$ جا س = جا أ ، أ ∈ ح * $\underset{س \to أ}{\text{نها}}$ جتا س = جتا أ ، أ ∈ ح

* $\underset{س \to أ}{\text{نها}}$ ظا س = ظا أ ، أ ≠ $\frac{2ن+1}{2}\pi$ ، ن ∈ ص

[2] لاحظ الفرق بين : $\underset{س \to 0}{\text{نها}} \frac{\text{جا}\,أس^2}{س^2}$ ، $\underset{س \to 0}{\text{نها}} \frac{\text{جا}^2\,أس}{س^2}$

حيث : $\underset{س \to 0}{\text{نها}} \frac{\text{جا}\,أس^2}{س^2} = أ$ بينما $\underset{س \to 0}{\text{نها}} \frac{\text{جا}^2\,أس}{س^2} = \underset{س \to 0}{\text{نها}} \left(\frac{\text{جا}\,أس}{س}\right)^2 = أ^2$

فمثلا : $\underset{س \to 0}{\text{نها}} \frac{\text{جا}\,3س^2}{س^2} = 3$ بينما $\underset{س \to 0}{\text{نها}} \frac{\text{جا}^2\,3س}{س^2} = \underset{س \to 0}{\text{نها}} \left(\frac{\text{جا}\,3س}{س}\right)^2 = 3^2 = 9$

مثال ١

أوجد كلاً مما يأتى :

١) $\underset{س\to٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا } ٢س}{٣س}$ ٢) $\underset{س\to٠}{\text{نهـا}} \frac{٤س}{\text{جا } ٥س}$

٣) $\underset{س\to٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا } ٥س}{٢ \text{ جا } ٣س}$ ٤) $\underset{س\to٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظا } س}{\text{جا } ٢س}$

الحل

١) $\underset{س\to٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا } ٢س}{٣س} = \frac{٢}{٣}$

٢) $\underset{س\to٠}{\text{نهـا}} \frac{٤س}{\text{جا } ٥س} = \frac{٤}{٥}$

٣) $\underset{س\to٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا } ٥س}{٢ \text{ جا } ٣س} = \frac{١}{٢} \underset{س\to٠}{\text{نهـا}} \frac{\frac{\text{جا } ٥س}{س}}{\frac{\text{جا } ٣س}{س}} = \frac{١}{٢} \times \frac{\underset{س\to٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا } ٥س}{س}}{\underset{س\to٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا } ٣س}{س}} = \frac{١}{٢} \times \frac{٥}{٣} = \frac{٥}{٦}$

٤) $\underset{س\to٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظا } س}{\text{جا } ٢س} = \underset{س\to٠}{\text{نهـا}} \frac{\frac{\text{ظا } س}{س}}{\frac{\text{جا } ٢س}{س}} = \frac{١}{٢}$

مثال ٢

أوجد كلاً مما يأتى :

١) $\underset{س\to٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظا}^٢ \, ٢س}{٣س^٢}$ ٢) $\underset{س\to٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا } ٣س^٢ \text{ جتا}^٢ س}{٥س^٢}$

الحل

١) $\underset{س\to٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظا}^٢ \, ٢س}{٣س^٢} = \frac{١}{٣} \underset{س\to٠}{\text{نهـا}} \left(\frac{\text{ظا } ٢س}{س}\right)^٢ = \frac{١}{٣} \times ٢^٢ = \frac{٤}{٣}$

٢) $\underset{س\to٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا } ٣س^٢ \text{ جتا}^٢ س}{٥س^٢} = \underset{س\to٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا } ٣س^٢}{٥س^٢} \times \underset{س\to٠}{\text{نهـا}} \text{ جتا}^٢ س = \frac{٣}{٥} \times ١ = \frac{٣}{٥}$

مثال ٣

أوجد كلاً مما يأتى :

١) $\underset{س\to٠}{\text{نهـا}} \frac{٢س - ٣ \text{ جا } س}{٣س + \text{ظا } س}$ ٢) $\underset{س\to٠}{\text{نهـا}} \frac{س^٢ + ٥ \text{ ظا}^٢ \, ٣س}{٤س^٢ - \text{جا}^٢ \, ٢س}$

الحل

١) بقسمة كل من البسط والمقام على س

$\therefore \underset{س\to٠}{\text{نهـا}} \frac{٢س - ٣ \text{ جا } س}{٣س + \text{ظا } س} = \underset{س\to٠}{\text{نهـا}} \frac{٢ - ٣\frac{\text{جا } س}{س}}{٣ + \frac{\text{ظا } س}{س}} = \frac{٢ - ٣}{٣ + ١} = -\frac{١}{٤}$

٢) بقسمة كل من البسط والمقام على $س^٢$

$\therefore \underset{س\to٠}{\text{نهـا}} \frac{س^٢ + ٥ \text{ ظا}^٢ \, ٣س}{٤س^٢ - \text{جا}^٢ \, ٢س} = \underset{س\to٠}{\text{نهـا}} \frac{١ + ٥\left(\frac{\text{ظا } ٣س}{س}\right)^٢}{٤ - \frac{\text{جا}^٢ \, ٢س}{س^٢}}$

$= \frac{١ + ٥(٣)^٢}{٤ - ٢} = \frac{٤٦}{٢} = ٢٣$

نتيجة ٢

$\underset{س\to٠}{\text{نهـا}} \frac{١ - \text{جتا } س}{س} = \text{صفر}$

إثبات نتيجة ٢

$\underset{س\to٠}{\text{نهـا}} \frac{١ - \text{جتا } س}{س} = \underset{س\to٠}{\text{نهـا}} \frac{١ - \text{جتا } س}{س} \times \frac{١ + \text{جتا } س}{١ + \text{جتا } س}$

$= \underset{س\to٠}{\text{نهـا}} \frac{١ - \text{جتا}^٢ س}{س(١ + \text{جتا } س)} = \underset{س\to٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}^٢ س}{س(١ + \text{جتا } س)}$

$= \underset{س\to٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا } س}{س} \times \underset{س\to٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا } س}{١ + \text{جتا } س}$

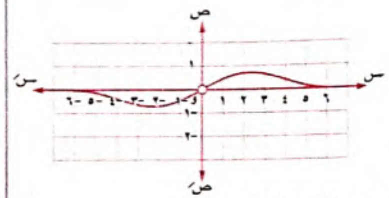
$= ١ \times \text{صفر} = \text{صفر}$

* الشكل المقابل يمثل

الدالة د : $د(س) = \frac{١ - \text{جتا } س}{س}$ ونلاحظ

فى الشكل أنه كلما اقتربت س من الصفر

كلما اقتربت النسبة $\frac{١ - \text{جتا } س}{س}$ من الصفر أيضًا حيث س بالتقدير الدائرى.



أى أن $\underset{س\to٠}{\text{نهـا}} \frac{١ - \text{جتا } س}{س} = \text{صفر}$

مثال ٤

أوجد كلاً مما يأتى : ١) $\underset{س\to٠}{\text{نهـا}} \frac{١ - \text{جتا } س}{\text{جا } س}$ ٢) $\underset{س\to٠}{\text{نهـا}} \frac{١ - \text{جتا } س}{س^٢}$

الحل

١) $\underset{س\to٠}{\text{نهـا}} \frac{١ - \text{جتا } س}{\text{جا } س} = \underset{س\to٠}{\text{نهـا}} \left(\frac{١ - \text{جتا } س}{س} \times \frac{س}{\text{جا } س}\right) = \underset{س\to٠}{\text{نهـا}} \frac{١ - \text{جتا } س}{س} \times \underset{س\to٠}{\text{نهـا}} \frac{س}{\text{جا } س}$

$= \text{صفر} \times ١ = \text{صفر}$

[٢] $\displaystyle \lim_{س \to 0} \frac{1 - \text{جتا}\, س}{س^2} = \lim_{س \to 0} \left(\frac{1 - \text{جتا}\, س}{س^2} \times \frac{1 + \text{جتا}\, س}{1 + \text{جتا}\, س} \right)$

$\displaystyle = \lim_{س \to 0} \left(\frac{1 - \text{جتا}^2 س}{س^2} \times \frac{1}{1 + \text{جتا}\, س} \right)$

$\displaystyle = \lim_{س \to 0} \left(\frac{\text{جا}^2 س}{س^2} \times \frac{1}{1 + \text{جتا}\, س} \right)$

$\displaystyle = \lim_{س \to 0} \left(\frac{\text{جا}\, س}{س} \right)^2 \times \lim_{س \to 0} \left(\frac{1}{1 + \text{جتا}\, س} \right) = (1)^2 \times \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

تذكر أن

- $\text{جا}^2 س + \text{جتا}^2 س = 1$
- $1 + \text{ظا}^2 س = \text{قا}^2 س$
- $1 + \text{ظتا}^2 س = \text{قتا}^2 س$

مثال ٥

أوجد كلاً مما يأتي : [١] $\displaystyle \lim_{س \to 4} \frac{\text{جا}(3س - 12)}{س - 4}$ [٢] $\displaystyle \lim_{2س \to \pi} \frac{\text{جتا}\, س}{2س - \pi}$

[٣] $\displaystyle \lim_{س \to \pi} \frac{\text{ظا}\, س}{\pi - س}$ [٤] $\displaystyle \lim_{س \to \infty} س\, \text{جا}\, س^{-1}$

الحـل

[١] $\displaystyle \lim_{س \to 4} \frac{\text{جا}(3س - 12)}{س - 4} = \lim_{(س - 4) \to 0} \frac{\text{جا}[3(س - 4)]}{س - 4} = 3$

[٢] $\displaystyle \lim_{2س \to \pi} \frac{\text{جتا}\, س}{2س - \pi} = \lim_{(\frac{\pi}{2} - س) \to 0} \frac{\text{جا}(\frac{\pi}{2} - س)}{-2(\frac{\pi}{2} - س)} = -\frac{1}{2}$

[٣] $\displaystyle \lim_{س \to \pi} \frac{\text{ظا}\, س}{\pi - س} = \lim_{(\pi - س) \to 0} \frac{-\text{ظا}(\pi - س)}{\pi - س} = -1$

[٤] $\displaystyle \lim_{س \to \infty} س\, \text{جا}\, س^{-1} = \lim_{\frac{1}{س} \to 0} \frac{\text{جا}\frac{1}{س}}{\frac{1}{س}} = 1$

مثال ٦

أوجد كلاً مما يأتي : [١] $\displaystyle \lim_{س \to 0} 4س\, \text{قتا}\, 5س$ [٢] $\displaystyle \lim_{س \to 0} \frac{\text{جتا}(\frac{\pi}{2} - س)}{س}$

[٣] $\displaystyle \lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{جتا}\, س}{س - \frac{\pi}{2}}$

الحـل

[١] $\displaystyle \lim_{س \to 0} 4س\, \text{قتا}\, 5س = \lim_{س \to 0} \frac{4س}{\text{جا}\, 5س} = \frac{4}{5}$

[٢] $\displaystyle \lim_{س \to 0} \frac{\text{جتا}(\frac{\pi}{2} - س)}{س} = \lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}\, س}{س} = 1$

[٣] $\displaystyle \lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{جتا}\, س}{س - \frac{\pi}{2}} = \lim_{(\frac{\pi}{2} - س) \to 0} \frac{\text{جا}(\frac{\pi}{2} - س)}{-(\frac{\pi}{2} - س)} = -1$

معلومة

إذا كانت س قياس الزاوية بالتقدير الستينى فإن :

[١] $\displaystyle \lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}\, س}{س} = \frac{\pi}{180}$ [٢] $\displaystyle \lim_{س \to 0} \frac{\text{ظا}\, س}{س} = \frac{\pi}{180}$

تمارين 16

على نهايات الدوال المثلثية

اختبر نفسك

• فهم • تطبيق • مستويات عليا 📖 من أسئلة الكتاب المدرسى

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① 📖 $\displaystyle \lim_{س \to 0} \text{ظا}\, س =$ ....

(أ) صفر (ب) -1 (جـ) $\frac{\pi}{2}$ (د) π

② 📖 $\displaystyle \lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \text{جا}\, 2س =$ ....

(أ) صفر (ب) -1 (جـ) 1 (د) $\frac{\pi}{2}$

③ $\displaystyle \lim_{س \to 0} \frac{2س}{\text{جا}\, 3س} =$ ....

(أ) $\frac{2}{3}$ (ب) $\frac{3}{2}$ (جـ) 6 (د) ليس لها وجود.

④ $\displaystyle \lim_{س \to 0} \frac{\text{ظا}\, \pi س}{6س} =$ ....

(أ) π (ب) $\frac{\pi}{6}$ (جـ) $\frac{1}{6}$ (د) غير موجودة.

⑤ $\displaystyle \lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}\, \frac{3}{5} \sqrt[4]{س}}{\sqrt[4]{س}} =$ ....

(أ) صفر (ب) $\frac{3}{5}$ (جـ) $\frac{5}{3}$ (د) $\sqrt[4]{\frac{3}{5}}$

⑥ $\displaystyle \lim_{(2س - 3) \to 0} \frac{\text{ظا}(2س - 3)}{2س - 3} =$ ....

(أ) صفر (ب) -1 (جـ) 1 (د) غير موجودة.

⑦ $\displaystyle \lim_{هـ \to 0} \frac{\text{جا}\, 3هـ^2}{4هـ^2} =$ ....

(أ) صفر (ب) 1 (جـ) $\frac{4}{3}$ (د) $\frac{3}{4}$

⑧ $\displaystyle \lim_{س \to 0} \frac{3س^5}{\text{ظا}\, 4س^5} =$ ....

(أ) $\frac{3}{4}$ (ب) $\frac{4}{3}$ (جـ) 1 (د) صفر

⑨ 📖 $\displaystyle \lim_{س \to 0} \frac{1 - \text{جتا}\, س}{3س} =$ ....

(أ) صفر (ب) 1 (جـ) -1 (د) غير موجودة.

(١٠) نهـا (س ← ٠) $\frac{\text{٤ + ٥ س}}{\text{حتا ٣ س}}$ = ...

(أ) -٤ (ب) ٤ (جـ) ٣ (د) -٣

(١١) نهـا (س ← ٠) $\frac{\text{حا } \frac{\text{س}}{٣}}{\text{٢ س}}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) $\frac{١}{٦}$ (د) $\frac{١}{١٢}$

(١٢) 📖 نهـا (س ← ٠) $\frac{\text{٢ س + حا ٣ س}}{\text{ظا ٥ س}}$ = ...

(أ) ٥ (ب) $\frac{٦}{٥}$ (جـ) ١ (د) صفر

(١٣) نهـا (س ← ٠) $\frac{\text{حا ٢ س + ٥ حا ٣ س}}{\text{س}}$ = ...

(أ) ٧ (ب) ٥ (جـ) ١٧ (د) ١٠

(١٤) نهـا (س ← ٠) $\frac{\text{٢ س + حا ٣ س}}{\text{٥ س + ظا ٢ س}}$ = ...

(أ) ١ (ب) $\frac{٥}{٧}$ (جـ) $\frac{٧}{٥}$ (د) -١

(١٥) نهـا (س ← ٠) $\frac{\text{حا ٣ س}}{\text{٥ س}^٢ \text{ - ٤ س}}$ = ...

(أ) $\frac{٣}{٤}$ (ب) $\frac{-٣}{٤}$ (جـ) ٣ (د) $\frac{٣}{٥}$

(١٦) نهـا (س ← ٠) $\frac{\text{س حا ٢ س}}{\text{س}^٢}$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٤

(١٧) نهـا (س ← ٠) $\frac{\text{حا ٢ س حتا ٣ س}}{\text{٦ س}}$ = ...

(أ) ١ (ب) ٣ (جـ) $\frac{١}{٣}$ (د) صفر

(١٨) نهـا (س ← ٠) $\frac{\text{حا ٣ س}}{\text{ظا } \frac{١}{٣} \text{ س}}$ = ...

(أ) ٩ (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) ٣ (د) ١

(١٩) 📖 نهـا (س ← ٠) $\frac{\text{حا } \frac{١}{٢} \text{ س}}{\text{حا } \frac{٣}{٤} \text{ س}}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٦}$ (ب) $\frac{٣}{٨}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{٢}{٣}$

(٢٠) 📖 نهـا (س ← ٠) $\frac{\text{ظا}^٢ \text{ ٢ س}}{\text{س حا ٣ س}}$ = ...

(أ) $\frac{٤}{٩}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) $\frac{٤}{٣}$

(٢١) نهـا (س ← ٠) $\frac{\text{س}^٢ \text{ + حا}^٢ \text{ ٢ س}}{\text{س ظا ٢ س}}$ = ...

(أ) $\frac{٢}{٥}$ (ب) $\frac{٥}{٢}$ (جـ) ١ (د) ٥

(٢٢) نهـا (س ← ٠) $\left(\frac{\text{حا ٢ س}}{\text{٣ س}} + \frac{\text{س حا س}^٢}{\text{حا س}^٢}\right)$ = ...

(أ) ١ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) $\frac{٤}{٣}$ (د) $\frac{٥}{٣}$

(٢٣) نهـا (س ← ٠) $\frac{\text{حا}^٢ \text{ ٩ س + ظا ١٦ س}^٢}{\text{٤ س}^٢}$ = ...

(أ) $\frac{٩٧}{٤}$ (ب) $\frac{٩٧}{١٦}$ (جـ) $\frac{٩}{٤}$ (د) ٤

(٢٤) 📖 نهـا (س ← ٠) ٣ س قتا ٢ س = ...

(أ) ٦ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) غير موجودة.

(٢٥) 📖 نهـا (س ← ٠) $\frac{\text{حا ٢ س ظا ٣ س}}{\text{٤ س}^٢}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{٣}{٤}$ (جـ) $\frac{٣}{٢}$ (د) ٦

(٢٦) نهـا (س ← ٠) $\frac{\text{١ - ظا س}}{\text{حا س - حتا س}}$ = ...

(أ) ١ (ب) -١ (جـ) صفر (د) ليس لها وجود.

(٢٧) نهـا (س ← ٠) $\frac{\text{١٢ - ١٢ حتا س}}{\text{س}}$ = ...

(أ) صفر (ب) ١٢ (جـ) ١ (د) ٢٤

(٢٨) نهـا (س ← ٠) $\frac{\text{حا س - حا س حتا س}}{\text{س}^٢}$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

(٢٩) نهـا (س ← ٠) $\frac{\text{حتا س + ٢ س - ١}}{\text{٣ س}}$ = ...

(أ) ١ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) $\frac{١}{٣}$ (د) صفر

(٣٠) نهـا (س ← ٠) $\frac{\text{١ - حتا س + حا ٣ س}}{\text{١ - حتا س + ظا ٢ س}}$ = ...

(أ) صفر (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) ١ (د) $\frac{٤}{٣}$

(٣١) نهـا (س ← ٠) $\frac{\text{١ - قا س}}{\text{حتا س - ١}}$ = ...

(أ) ٢ (ب) ١ (جـ) صفر (د) -١

(٣٢) إذا كان : $\underset{س \to ٠}{\text{نهــا}} \frac{(\text{أ} + ٣)\,س}{\text{جا أ س}} = \frac{٢}{٥}$ فإن : أ = ...

(أ) −٥ (ب) −٣ (جـ) −١ (د) ٣

(٣٣) إذا كانت : $\underset{س \to ٠}{\text{نهــا}} \frac{\text{جا}^٢ \text{ أ س} - \text{ظا } ٢ \text{ أ س}^٢}{س^٢} = -١$ فإن : أ = ...

(أ) −١ (ب) ٢ (جـ) ١ (د) ٤

(٣٤) إذا كان : $\underset{س \to ٠}{\text{نهــا}} \frac{\text{جا أ س}}{\text{ب س}} = \frac{١}{٢}$ ، $\underset{س \to ٠}{\text{نهــا}} \frac{\text{ظا ب س}}{\text{حـ س}} = \frac{٤}{٣}$ فإن : $\frac{\text{أ}}{\text{حـ}}$ = ...

(أ) ٤ (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) $\frac{٤}{٩}$ (د) $\frac{١}{١٢}$

(٣٥) إذا كان : $\underset{س \to ٠}{\text{نهــا}} \frac{\text{جا أ س}}{\text{جا ب س}} = \frac{٣}{٥}$ فإن : $\frac{\text{أ} + \text{ب}}{\text{أ} - \text{ب}}$ = ...

(أ) −٤ (ب) ٨ (جـ) ٢ (د) ٤

(٣٦) $\underset{س \to ٠}{\text{نهــا}} \frac{(\text{جا س} + \text{جتا س})^٢ - ١}{٣ س}$ = ...

(أ) ١ (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) صفر

(٣٧) $\underset{س \to \frac{\pi}{٢}}{\text{نهــا}} \frac{١ - \text{جا}^٣ س}{\text{جتا}^٢ س}$ = ...

(أ) ١ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}\pi$ (د) صفر

(٣٨) $\underset{س \to ١}{\text{نهــا}} \frac{\text{ظا}(س - ١)}{(\sqrt{س} - ١)}$ = ...

(أ) ٢ (ب) صفر (جـ) −٢ (د) $\frac{١}{٢}$

(٣٩) $\underset{س \to ١}{\text{نهــا}} \frac{\text{جا}(س - ١)}{س^٢ - ١}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ١ (جـ) −١ (د) صفر

(٤٠) $\underset{س \to ٣}{\text{نهــا}} \frac{\text{ظا}(س - ٣)}{س^٢ - س - ٦}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٥}$ (ب) $\frac{٨}{٣}$ (جـ) ٣ (د) −٣

(٤١) $\underset{س \to \frac{\pi}{٢}}{\text{نهــا}} \frac{٣ \text{ جتا س}}{\pi - ٢ س}$ = ...

(أ) ٣ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) $\frac{-٣}{٢}$ (د) −٣

(٤٢) 📖 $\underset{س \to \pi}{\text{نهــا}} \frac{\text{جا س}}{\pi - س}$ = ...

(أ) ١ (ب) $\pi^٢$ (جـ) π (د) $-\pi$

(٤٣) $\underset{س \to ٠}{\text{نهــا}} \frac{١ - \text{جتا س}}{س^٢}$ = ...

(أ) ١ (ب) ليس لها وجود. (جـ) صفر (د) $\frac{١}{٢}$

(٤٤) $\underset{س \to ٠}{\text{نهــا}} \frac{\text{جا}(\text{جا س})}{٣ س}$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) $\frac{١}{٣}$ (د) ٣

(٤٥) 📖 $\underset{س \to ٠}{\text{نهــا}} \frac{\text{جا س}}{س}$ = ... حيث س بالتقدير الستينى.

(أ) ١ (ب) $\frac{\pi}{١٨٠}$ (جـ) $\frac{١٨٠}{\pi}$ (د) π

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ أوجد كلاً مما يأتى :

① $\underset{س \to ٠}{\text{نهــا}} \frac{\text{جا } ٢ س}{\text{ظا } ٥ س}$ «$\frac{٢}{٥}$»

② $\underset{س \to ٠}{\text{نهــا}} \frac{\text{جا } \frac{س}{٥}}{\text{ظا } \frac{٢ س}{٣}}$ «$\frac{٣}{١٠}$»

③ 📖 $\underset{س \to ٠}{\text{نهــا}} \frac{\text{جا } ٣ س - \text{جا } ٢ س}{٥ س}$ «$\frac{١}{٥}$»

④ $\underset{س \to ٠}{\text{نهــا}} \frac{\text{جا س} + \text{ظا س}}{\text{جا س}}$ «٢»

⑤ $\underset{س \to ٠}{\text{نهــا}} \frac{س \text{ جتا } ٣ س}{\text{ظا } ٢ س}$ «$\frac{١}{٢}$»

⑥ $\underset{س \to ٠}{\text{نهــا}} \left(\frac{٥ س}{\text{جا س}} - \frac{\text{ظا } ٢ س}{س}\right)$ «٣»

⑦ $\underset{س \to ٠}{\text{نهــا}} \frac{٣ س + \text{جا س}}{٢ س + \text{ظا } ٣ س}$ «$\frac{٤}{٥}$»

⑧ $\underset{س \to ٠}{\text{نهــا}} \frac{٢ \text{ جا س} + ٤ \text{ ظا } ٢ س}{٢ س + \text{جا } ٣ س}$ «٢»

⑨ $\underset{س \to ٠}{\text{نهــا}} \frac{\text{جا س} - ٣ \text{ ظا س}}{٥ س \text{ جتا س}}$ «$\frac{-٢}{٥}$»

⑩ $\underset{س \to ٠}{\text{نهــا}} \frac{٣ س}{٥ \text{ ظا س} - ٢ \text{ جا } ٢ س}$ «٣»

⑪ 📖 $\underset{س \to ٠}{\text{نهــا}} \frac{س + س \text{ جتا س}}{\text{جا س جتا س}}$ «٢»

⑫ $\underset{س \to ٠}{\text{نهــا}} \frac{\text{ظا } ٣ س - \text{جا } ٤ س}{س^٢ + ٢ س}$ «$-\frac{١}{٢}$»

⑬ $\underset{س \to ٠}{\text{نهــا}} \frac{س^٢ + \text{جا } ٣ س}{٥ س \text{ جتا } ٢ س}$ «$\frac{٣}{٥}$»

⑭ $\underset{س \to ٠}{\text{نهــا}} \frac{\text{ظا } ٢ س + ٢ س \text{ جتا س}}{\text{جا } ٣ س}$ «$\frac{٤}{٣}$»

⑮ $\underset{س \to ٠}{\text{نهــا}} \frac{٢}{س} \text{ جا } \frac{س}{٧}$ «$\frac{٢}{٧}$»

⑯ $\underset{س \to ٠}{\text{نهــا}} \frac{١}{س}\left(\text{جا } \frac{س}{٥} + \text{ظا } \frac{س}{٥}\right)$ «$\frac{٢}{٥}$»

⑰ $\underset{س \to ٠}{\text{نهــا}} \left(\frac{٣}{٥ س} + ٤\right) \text{جا } ٤ س$ «$\frac{١٢}{٥}$»

⑱ $\underset{س \to ٣}{\text{نهــا}} \frac{\text{جا}(٣ س - ٩)}{٢ س - ٦}$ «$\frac{٣}{٢}$»

⑲ $\underset{س \to ٠}{\text{نهــا}} \frac{\text{جا } ٢٤ س \times \text{جتا } ٦ س}{\text{ظا } ٦ س \times \text{جتا } ٢٤ س}$ «٤»

⑳ 📖 $\underset{س \to \frac{١}{٢}}{\text{نهــا}} \frac{س \text{ جتا}(-٢ س + ١)}{س^٢ + س}$ «$\frac{٢}{٣}$»

㉑ 📖 $\underset{س \to ٠}{\text{نهــا}} \frac{\text{جا}^٢ س}{س}$ «صفر»

٢ أوجد كلاً مما يأتي :

(١) 📖 $\lim\limits_{س \to 0} \frac{\text{جا}^2 ٣س}{٥س^2}$ ، $\frac{9}{5}$

(٢) $\lim\limits_{س \to 0} \frac{\text{جا}^2 ٣س}{\text{ظا}^2 ٢س}$ ، $\frac{9}{4}$

(٣) $\lim\limits_{س \to 0} \frac{\text{جا}^2 \frac{س}{2}}{س \text{ ظا } ٢س}$ ، $\frac{1}{8}$

(٤) $\lim\limits_{س \to 0} \frac{س \text{ جا } ٢س}{\text{جا}س \text{ ظا } ٣س}$ ، $\frac{2}{3}$

(٥) $\lim\limits_{س \to 0} \frac{\text{ظا}^2 ٢س}{٤س^2}$ ، ٢

(٦) $\lim\limits_{س \to 0} \frac{س^2 \text{ ظا } ٢س}{\text{جا}^3 ٢س}$ ، $\frac{1}{8}$

(٧) $\lim\limits_{س \to 0} \frac{\text{جا } ٤س \text{ ظا}^2 ٥س}{س^2 \text{ جا}س}$ ، ١٠٠

(٨) 📖 $\lim\limits_{س \to 0} \frac{س \text{ ظا } ٢س}{س^2 + \text{جا}^2 ٣س}$ ، $\frac{1}{5}$

(٩) $\lim\limits_{س \to 0} \frac{س^2 + \text{ظا}^2 ٢س}{٢س^2 + \text{جا}^2 ٣س}$ ، $\frac{5}{11}$

(١٠) $\lim\limits_{س \to 0} \frac{س \text{ ظا}س}{٤س^2 - \text{جا}^2 ٣س}$ ، $\frac{-1}{5}$

(١١) $\lim\limits_{س \to 0} \frac{٢س^2 + س \text{ جا } ٥س}{س^2 - \text{ظا}^2 ٣س}$ ، $\frac{-5}{8}$

(١٢) $\lim\limits_{س \to 0} \frac{٢س + ٥ \text{ ظا}س + ٣ \text{ جا}س}{\text{جا } ٢س \text{ جتا } ٢س}$ ، ٥

(١٣) 📖 $\lim\limits_{س \to 0} \frac{س \text{ جا } ٢س + \text{جا}^2 ٢س}{\text{ظا}^2 ٣س + س^2}$ ، $\frac{3}{5}$

(١٤) 📖 $\lim\limits_{س \to 0} \frac{\text{ظا } ٣س^2 + \text{جا}^2 ٥س}{س^2}$ ، ٢٨

(١٥) 📖 $\lim\limits_{س \to 0} \frac{\text{جا } ٥س^2 + \text{جا}^2 ٥س}{٢س^2}$ ، ٦٥

(١٦) 📖 $\lim\limits_{س \to 0} \left(\frac{٢س^2 + \text{جا } ٢س}{٢س^2 + \text{ظا } ٦س}\right)^4$ ، $\frac{1}{16}$

(١٧) $\lim\limits_{س \to 0} \frac{\text{ظا}^2 س + \text{ظا}^2 ٣س + \text{ظا}^2 ٥س}{س^2}$ ، ٣٥

(١٨) $\lim\limits_{س \to 0} \frac{\text{جا}س \times \text{جا}^2 ٢س \times \text{جا}^3 ٤س}{س^6}$ ، ٢٥٦

(١٩) $\lim\limits_{س \to 0} \frac{\text{ظا } ٦س - \text{جا}(-٣س)}{س(\text{جتا } ٥س + \text{جتا } ٢س)}$ ، $\frac{9}{2}$

(٢٠) $\lim\limits_{س \to 0} \frac{\text{جا}س}{\sqrt{س + ٢} - \sqrt{٢}}$ ، $٢\sqrt{٢}$

(٢١) $\lim\limits_{س \to ٣} \frac{\text{ظا}(س - ٣)}{س^3 - ٢٧}$ ، $\frac{1}{27}$

(٢٢) 📖 $\lim\limits_{س \to ١} \frac{\text{جا}(س - ١)}{س^2 + س - ٢}$ ، $\frac{1}{3}$

٣ أوجد كلاً مما يأتي :

(١) 📖 $\lim\limits_{س \to 0} \frac{٣(١ - \text{جتا}س)}{س}$ ، صفر

(٢) 📖 $\lim\limits_{س \to 0} \frac{\text{جتا}س - ١}{\text{جا}س}$ ، صفر

(٣) 📖 $\lim\limits_{س \to 0} \frac{١ - \text{جتا}س + \text{جا}س}{١ - \text{جتا}س - \text{جا}س}$ ، -1

(٤) 📖 $\lim\limits_{س \to 0} \frac{٢ - \text{جتا } ٣س - \text{جتا } ٤س}{س}$ ، صفر

(٥) 📖 $\lim\limits_{س \to 0} \frac{\text{جا}س (١ - \text{جتا}س)}{س^2}$ ، صفر

(٦) 📖 $\lim\limits_{س \to 0} \frac{س - س \text{ جتا}س}{\text{جا}^2 ٣س}$ ، صفر

(٧) $\lim\limits_{س \to 0} \frac{١ - \text{جتا}^2 ٣س}{٤س^2}$ ، $\frac{9}{4}$

(٨) $\lim\limits_{س \to 0} \frac{٤س^2}{١ - \text{جتا}^2 \frac{1}{2}س}$ ، ١٦

(٩) $\lim\limits_{س \to 0} \frac{٢ - ٢ \text{ جتا}^2 ٤س}{٨س^2}$ ، ٤

(١٠) $\lim\limits_{س \to 0} \frac{\text{قا}س - ١}{س^2}$ ، $\frac{1}{2}$

(١١) 📖 $\lim\limits_{س \to 0} \frac{١ - \text{جتا}س}{س^2}$ ، $\frac{1}{2}$

(١٢) $\lim\limits_{س \to 0} \frac{٤ - ٤ \text{ جتا}س}{\text{جا}^2 ٣س}$ ، $\frac{2}{9}$

(١٣) $\lim\limits_{س \to 0} \frac{١ - \text{جتا } ٢س}{س \text{ ظا } ٢س}$ ، ١

(١٤) 📖 $\lim\limits_{س \to 0} \frac{١ - \text{جتا } ٢س}{\text{جتا}^2 ٢س - ١}$ ، [illegible]

٤ أوجد كلاً مما يأتي :

(١) $\lim\limits_{س \to 0} \text{ظتا } ٣س \text{ جا } ٥س$ ، $\frac{5}{3}$

(٢) 📖 $\lim\limits_{س \to 0} س(\text{قتا } ٢س - \text{ظتا } ٢س)$ ، $\frac{1}{2}$

(٣) $\lim\limits_{س \to 0} ٣س \text{ ظا } ٢س \text{ قتا}^2 ٣س$ ، $\frac{2}{3}$

(٤) 📖 $\lim\limits_{س \to 0} ٦س^2 \text{ قتا } ٢س \text{ ظتا}س$ ، ٣

(٥) $\lim\limits_{س \to 0} \text{قتا } ٤س \text{ جتا}(\frac{\pi}{2} - س)$ ، $\frac{1}{4}$

(٦) 📖 $\lim\limits_{س \to 0} \frac{س}{\text{جتا}(\frac{\pi}{2} - س)}$ ، ١

(٧) $\lim\limits_{س \to 0} \frac{س \text{ ظتا}^2 ٢س}{\text{قتا } ٢س}$ ، $\frac{1}{2}$

(٨) $\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{\text{ظا}(٢س - \frac{\pi}{2})}{٨س - ٢\pi}$ ، $\frac{1}{4}$

(٩) $\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{\text{جا}(٢س - \frac{\pi}{2})}{\text{ظا}(٤س - \pi)}$ ، $\frac{1}{2}$

(١٠) $\lim\limits_{س \to 0} \frac{\text{جتا}(\frac{\pi}{2} - س)}{\text{ظتا}(\frac{\pi}{2} - ٣س)}$ ، $\frac{1}{3}$

(١١) $\lim\limits_{س \to \pi} \frac{\text{جا}س}{\pi - س}$ ، ١

(١٢) $\lim\limits_{س \to -\pi} \frac{\text{ظا}س}{س + \pi}$ ، ١

(١٣) 📖 $\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{٢س - \pi}{\text{جتا}س}$ ، -2

(١٤) $\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{ظتا}س}{\pi - ٢س}$ ، $\frac{1}{2}$

(١٥) 📖 $\lim\limits_{س \to ١} \frac{\text{جا } \pi س}{١ - س}$ ، π

(١٦) $\lim\limits_{س \to ١} \frac{١ - س}{\text{جتا } \frac{\pi}{2} س}$ ، $\frac{2}{\pi}$

(١٧) $\lim\limits_{س \to ١} (١ - س) \text{ ظا } \frac{\pi س}{2}$ ، $\frac{2}{\pi}$

٥ إذا كانت : $د(س) = \frac{\text{جا}س}{س}$ أوجد :

(١) $\lim\limits_{س \to 0} د(س)$ ، ١

(٢) $\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{2}} د(س)$ ، $\frac{2}{\pi}$

(٣) $\lim\limits_{س \to \pi} د(س)$ ، صفر

٦ أوجد كلاً مما يأتي :

(١) $\lim\limits_{س \to ٥} \frac{\text{جا}(س - ٥)}{س^2 - ٢٥}$ ، $\frac{1}{10}$

(٢) $\lim\limits_{س \to ٥} \frac{\text{جا}^2 (س - ٥)}{(س - ٥)^2}$ ، ١

(٣) $\lim\limits_{س \to ٥} \frac{\text{جا}(س - ٥)^2}{(س - ٥)}$ ، صفر

6

[illegible]

3

[illegible]

مثال ①

إذا كانت : د (س) = { ٣ س + ١ ، س < ١ ؛ ٥ - س ، س > ١ } فأوجد كلًا من :

[١] $\lim_{س \to -٢}$ د (س)　　[٢] $\lim_{س \to ٢}$ د (س)　　[٣] $\lim_{س \to ١}$ د (س)

الحـل

[١] ∵ الدالة لها نفس القاعدة على يمين ويسار س = -٢ مباشرة وهى د (س) = ٣ س + ١

∴ نهـا_{س → -٢} د (س) = نهـا_{س → -٢} (٣ س + ١) = ٣ (-٢) + ١ = -٥

[٢] ∵ الدالة لها نفس القاعدة على يمين ويسار س = ٢ مباشرة وهى : د (س) = ٥ - س

∴ نهـا_{س → ٢} د (س) = نهـا_{س → ٢} (٥ - س) = ٥ - ٣ = ٢

[٣] ∵ قاعدة الدالة على يسار ١ تختلف عن قاعدتها على يمين ١ لذلك يجب بحث كل من النهاية اليمنى واليسرى للدالة عند س = ١

∵ د (١⁻) = نهـا_{س → ١⁻} (٣ س + ١) = ٣ × ١ + ١ = ٤

، د (١⁺) = نهـا_{س → ١⁺} (٥ - س) = ٥ - ١ = ٤

∴ د (١⁻) = د (١⁺) = ٤

∴ نهـا_{س → ١} د (س) = ٤

> **لاحظ أن**
> الدالة د قاعدتها على يسار س = ١
> هى : د (س) = ٣ س + ١
> وقاعدتها على يمين س = ١
> هى : د (س) = ٥ - س

مثال ②

إذا كانت : د (س) = { س² + ٢ ، س ≤ -٢ ؛ ٢ س + ٣ ، س > -٢ } فابحث وجود : نهـا_{س → -٢} د (س)

الحـل

∵ د (-٢⁻) = نهـا_{س → -٢⁻} (س² + ٢) = (-٢)² + ٢ = ٦

، د (-٢⁺) = نهـا_{س → -٢⁺} (٢ س + ٣) = ٢ (-٢) + ٣ = -١

∵ د (-٢⁻) ≠ د (-٢⁺)

∴ نهـا_{س → -٢} د (س) غير موجودة.

> **لاحظ أنه**
> رغم أن الدالة معرفة عند س = -٢
> حيث د (-٢) = ٦ إلا أن ذلك
> لا دخل له فى وجود أو عدم
> وجود نهاية للدالة عند س = -٢

مثال ③

إذا كانت : د (س) = |س - ٢| / (س - ٢) ابحث وجود : نهـا_{س → ٢} د (س)

الحـل

∵ |س - ٢| = { س - ٢ ، س ≥ ٢ ؛ -(س - ٢) ، س < ٢ }

∴ د (س) = { (س - ٢)/(س - ٢) ، س > ٢ ؛ -(س - ٢)/(س - ٢) ، س < ٢ } = { ١ ، س > ٢ ؛ -١ ، س < ٢ }

∵ د (٢⁺) = ١ ، د (٢⁻) = -١　　∴ د (٢⁺) ≠ د (٢⁻)

∴ نهـا_{س → ٢} د (س) غير موجودة.

مثال ④

إذا كانت : د (س) = { س |س| - ١ ، س < ٠ ؛ |س|/س - ٢ ، س > ٠ } فأوجد : نهـا_{س → ٠} د (س)

الحـل

∵ |س| = { س ، س ≥ ٠ ؛ -س ، س < ٠ }

∴ د (س) = { س (-س) - ١ ، س < ٠ ؛ س/س - ٢ ، س > ٠ } = { -س² - ١ ، س < ٠ ؛ -١ ، س > ٠ }

∵ د (٠⁻) = نهـا_{س → ٠⁻} (-س² - ١) = -١ ، د (٠⁺) = نهـا_{س → ٠⁺} (-١) = -١

∴ د (٠⁻) = د (٠⁺) = -١　　∴ نهـا_{س → ٠} د (س) = -١

> **ملاحظـة**
> إذا كانت : ص = |د (س)| حيث د دالة كثيرة حدود　　فإن : نهـا_{س → أ} ص = |د (أ)|
> وذلك باستخدام التعويض المباشر (ولا داعى لإعادة تعريف المقياس).
> **فمثلًا :** إذا كانت : د (س) = |س² - ٤ س + ٣|　　فإن : نهـا_{س → ٣} د (س) = صفر
> ، إذا كانت : د (س) = |س + ١| - |س - ٢|　　فإن : نهـا_{س → ٢} د (س) = ٤

مثال ❺

إذا كانت : $د(س) = \begin{cases} ٢س + ٤ & ، \quad س < -٣ \\ ٣س + ٧ & ، \quad -٣ < س < ٥ \\ ٥ - س & ، \quad س > ٥ \end{cases}$

فابحث وجود : [١] $\underset{س \to -٣}{\text{نهـا}}\ د(س)$ [٢] $\underset{س \to ٥}{\text{نهـا}}\ د(س)$

الحـــل

[١] $د(-٣^-) = \underset{س \to -٣^-}{\text{نهـا}} (٢س + ٤) = -٦ + ٤ = -٢$

، $د(-٣^+) = \underset{س \to -٣^+}{\text{نهـا}} (٣س + ٧) = ٣(-٣) + ٧ = -٢$

$\therefore د(-٣^-) = د(-٣^+) = -٢ \qquad \therefore \underset{س \to -٣}{\text{نهـا}}\ د(س) = -٢$

[٢] $د(٥^-) = \underset{س \to ٥^-}{\text{نهـا}} (٣س + ٧) = ١٥ + ٧ = ٢٢$

، $د(٥^+) = \underset{س \to ٥^+}{\text{نهـا}} (٥ - س) = ٥ - ٥ = $ صفر

$\because د(٥^-) \neq د(٥^+) \qquad \therefore \underset{س \to ٥}{\text{نهـا}}\ د(س)$ غير موجودة.

مثال ❻

إذا كانت الدالة د : $د(س) = \begin{cases} \frac{\text{جا}(س - ٤)}{(س - ٤)} & ، \quad س < ٤ \\ \text{ظا} \frac{\pi}{١٦} س & ، \quad ٤ < س < ٨ \end{cases}$ أوجد : $\underset{س \to ٤}{\text{نهـا}}\ د(س)$

الحـــل

$د(٤^-) = \underset{س \to ٤^-}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}(س - ٤)}{(س - ٤)} = \underset{(س - ٤) \to ٠^-}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}(س - ٤)}{(س - ٤)} = ١$

، $د(٤^+) = \underset{س \to ٤^+}{\text{نهـا}}\ \text{ظا} \frac{\pi}{١٦} س = \text{ظا} \frac{\pi}{٤} = ١$

$\therefore د(٤^-) = د(٤^+) = ١ \qquad \therefore \underset{س \to ٤}{\text{نهـا}}\ د(س) = ١$

نهاية الدالة المعرفة على فترة عند أحد طرفيها

إذا كانت الدالة د معرفة على الفترة المفتوحة]أ ، ب[أو المغلقة [أ ، ب] فإننا نلاحظ أن :

[١] الدالة ليست معرفة على يسار النقطة أ فإننا نبحث النهاية اليمنى فقط [$د(أ^+)$]

وتكون فى هذه الحالة : $\underset{س \to أ^-}{\text{نهـا}}\ د(س)$ ، $\underset{س \to أ}{\text{نهـا}}\ د(س)$ غير موجودتين.

[٢] الدالة ليست معرفة على يمين النقطة ب فإننا نبحث النهاية اليسرى فقط [$د(ب^-)$]

وتكون فى هذه الحالة $\underset{س \to ب^+}{\text{نهـا}}\ د(س)$ ، $\underset{س \to ب}{\text{نهـا}}\ د(س)$ غير موجودتين.

أى أن : نهاية الدالة عند النقطة الطرفية غير موجودة ويكون للدالة عند هذه النقطة نهاية من جهة واحدة فقط [يمنى أو يسرى]

مثال ❼

إذا كانت : $د(س) = \begin{cases} \frac{٢س}{\text{جا} س} & ، \quad -\frac{\pi}{٢} < س < ٠ \\ ٢\ \text{جتا} \frac{٤}{٢} س & ، \quad ٠ < س < \frac{\pi}{٢} \end{cases}$

ابحث وجود : [١] $د(-\frac{\pi}{٢}^+)$ ، $د(-\frac{\pi}{٢}^-)$ ، $\underset{س \to -\frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}}\ د(س)$

[٢] $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}}\ د(س)$ [٣] $\underset{س \to \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}}\ د(س)$

الحـــل

مجال الدالة د هو $]-\frac{\pi}{٢} ، \frac{\pi}{٢}[- \{٠\}$

[١] $د(-\frac{\pi}{٢}^+) = \underset{س \to -\frac{\pi}{٢}^+}{\text{نهـا}}\ د(س) = \underset{س \to -\frac{\pi}{٢}^+}{\text{نهـا}} \frac{٢س}{\text{جا} س} = \frac{-\pi}{\text{جا} \frac{-\pi}{٢}} = \frac{-\pi}{-١} = \pi$

، $د(-\frac{\pi}{٢}^-)$ غير موجودة.

$\therefore \underset{س \to -\frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}}\ د(س)$ غير موجودة [لأن الدالة غير معرفة على يسار $س = \frac{-\pi}{٢}$]

[٢] $\because$ د معرفة على يسار ويمين س = ٠ بقاعدتين مختلفتين

$\therefore د(٠^-) = \underset{س \to ٠^-}{\text{نهـا}} \frac{٢س}{\text{جا} س} = \underset{س \to ٠^-}{\text{نهـا}} \frac{٢ \times ١}{\frac{\text{جا} س}{س}} = ٢ \times ١ = ٢$

، $د(٠^+) = \underset{س \to ٠^+}{\text{نهـا}}\ ٢\ \text{جتا} \frac{٤س}{٢} = ٢\ \text{جتا}\ ٠ = ٢ \times ١ = ٢$

$\because د(٠^-) = د(٠^+) = ٢ \qquad \therefore \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}}\ د(س) = ٢$

[٣] $\because$ د معرفة فقط على يسار $س = \frac{\pi}{٢}$

$\therefore \underset{س \to \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}}\ د(س)$ غير موجودة.

مثال ٨

ابحث وجود نهاية للدالة د : د (س) = $\sqrt{\text{س} - ٢}$ عندما س ⟵ ٢

الحل

مجال الدالة هو $[٢ ، \infty[$

∴ الدالة د معرفة فقط على يمين س = ٢

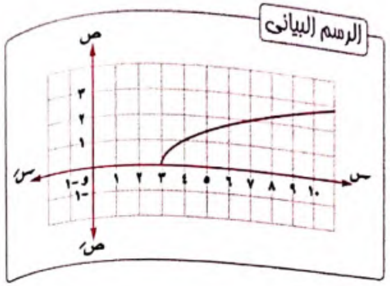
∴ $\lim\limits_{\text{س} \to ٢^+} \text{د (س)} = \lim\limits_{\text{س} \to ٢^+} \sqrt{\text{س} - ٢}$

= صفر

، $\lim\limits_{\text{س} \to ٢^-} \text{د (س)}$ غير موجودة

[لأن الدالة غير معرفة على يسار ٢]

∴ $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \text{د (س)}$ غير موجودة.



مثال ٩

إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} \dfrac{(\text{س} + ٢)^٢ - ٤}{\text{س}^٢ + \text{س}} & ، \text{س} > ٠ \\ \dfrac{١ - \text{جتا}^٢ \, ٢\text{س}}{\text{س}^٢} & ، \text{س} < ٠ \end{cases}$ أوجد : $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \text{د (س)}$

الحل

∵ د (٠⁺) = $\lim\limits_{\text{س} \to ٠^+} \dfrac{(\text{س} + ٢)^٢ - ٤}{\text{س}^٢ + \text{س}} = \lim\limits_{\text{س} \to ٠^+} \dfrac{\text{س}^٢ + ٤\text{س} + \cancel{٤} - \cancel{٤}}{\text{س} (\text{س} + ١)}$

$= \lim\limits_{\text{س} \to ٠^+} \dfrac{\text{س} (\text{س} + ٤)}{\text{س} (\text{س} + ١)} = \lim\limits_{\text{س} \to ٠^+} \dfrac{\text{س} + ٤}{\text{س} + ١} = ٤$

، د (٠⁻) = $\lim\limits_{\text{س} \to ٠^-} \dfrac{١ - \text{جتا}^٢ \, ٢\text{س}}{\text{س}^٢} = \lim\limits_{\text{س} \to ٠^-} \dfrac{\text{جا}^٢ \, ٢\text{س}}{\text{س}^٢} = ٢^٢ = ٤$

∴ د (٠⁺) = د (٠⁻) = ٤ ∴ $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \text{د (س)} = ٤$

مثال ١٠

إذا كانت الدالة د : د (س) = $\begin{cases} \text{ظا } ٤\text{س قتا } ٩\text{س} & ، -\dfrac{\pi}{٩} < \text{س} < ٠ \\ \dfrac{١}{٩} (\text{أ}^٢ + ٢) & ، \text{س} > ٠ \end{cases}$ لها نهاية عند س = ٠

أوجد قيمة : أ

الحل

د (٠⁻) = $\lim\limits_{\text{س} \to ٠^-} \text{ظا } ٤\text{س قتا } ٩\text{س} = \lim\limits_{\text{س} \to ٠^-} \dfrac{\text{ظا } ٤\text{س}}{\text{جا } ٩\text{س}} = \lim\limits_{\text{س} \to ٠^-} \dfrac{\frac{\text{ظا } ٤\text{س}}{\text{س}}}{\frac{\text{جا } ٩\text{س}}{\text{س}}} = \dfrac{٤}{٩}$

، د (٠⁺) = $\dfrac{١}{٩} (\text{أ}^٢ + ٢)$

، ∵ الدالة لها نهاية عند س = ٠ ∴ د (٠⁻) = د (٠⁺) ∴ $\dfrac{١}{٩} (\text{أ}^٢ + ٢) = \dfrac{٤}{٩}$

∴ أ² + ٢ = ٤ ∴ أ² = ٢ ∴ أ = $\pm \sqrt{٢}$

مثال ١١

إذا كانت الدالة د : د (س) = $\begin{cases} \text{س} & ، \text{س} \geq ٠ \\ \dfrac{١}{\text{س}} & ، \text{س} < ٠ \end{cases}$

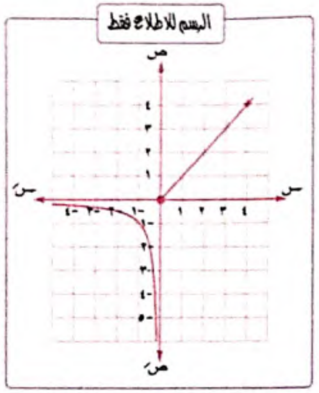
أوجد : [١] $\lim\limits_{\text{س} \to ٠^+} \text{د (س)}$ [٢] $\lim\limits_{\text{س} \to ٠^-} \text{د (س)}$ [٣] $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \text{د (س)}$

الحل

[١] $\lim\limits_{\text{س} \to ٠^+} \text{د (س)} = \lim\limits_{\text{س} \to ٠^+} \text{س} =$ صفر

[٢] $\lim\limits_{\text{س} \to ٠^-} \text{د (س)} = \lim\limits_{\text{س} \to ٠^-} \dfrac{١}{\text{س}} = -\infty$

[٣] $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \text{د (س)}$ غير موجودة.



مثال ١٢

ابحث وجود : $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \dfrac{\text{ظا } |\text{س}|}{\text{س}}$

الحل

∵ $|\text{س}| = \begin{cases} \text{س} & ، \text{س} \geq ٠ \\ -\text{س} & ، \text{س} < ٠ \end{cases}$ ∴ $\lim\limits_{\text{س} \to ٠^+} \dfrac{\text{ظا (س)}}{\text{س}} = ١$

، $\lim\limits_{\text{س} \to ٠^-} \dfrac{\text{ظا (-س)}}{\text{س}} = -١$ ∴ النهاية اليمنى ≠ النهاية اليسرى

∴ $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \dfrac{\text{ظا } |\text{س}|}{\text{س}}$ غير موجودة.

تمارين 17 على بحث وجود نهاية للدالة مجزأة المجال

اختبر نفسك

• فهم • تطبيق ∴ مستويات عليا 📖 من أسئلة الكتاب المدرسي

أولًا / أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت : $د(\text{س}) = \begin{cases} -٢ & ، ٠ < \text{س} \\ ١ & ، ٠ > \text{س} \end{cases}$ فإن :

أولًا : $\underset{\text{س} \to -٢}{\text{نهـا}}\ د(\text{س}) =$ ....

(أ) −٢ (ب) ١ (جـ) −١ (د) غير موجودة.

ثانيًا : $\underset{\text{س} \to ٤}{\text{نهـا}}\ د(\text{س}) =$ ....

(أ) −٢ (ب) ١ (جـ) −١ (د) غير موجودة.

ثالثًا : $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}}\ د(\text{س}) =$ ....

(أ) −٢ (ب) ١ (جـ) −١ (د) غير موجودة.

② إذا كانت : $د(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^٢ - ١ & ، ٢ < \text{س} \\ ٣\text{س} + ١ & ، ٢ \geq \text{س} \end{cases}$ فإن : $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}}\ د(\text{س}) =$ ....

(أ) ليس لها وجود. (ب) ٣ (جـ) ٨ (د) ٧

③ $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{|\text{س} - ٢|}{\text{س} - ٢} =$ .... ، $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـا}} \frac{|\text{س} - ٢|}{\text{س} - ٢} =$ ....

(أ) غير موجودة ، صفر (ب) غير موجودتين. (جـ) غير موجودة ، −١ (د) ١ ، −١

④ إذا كانت : $د(\text{س}) = \begin{cases} ٣\text{س} - ١ & ، \text{س} \neq ٢ \\ ٦ & ، \text{س} = ٢ \end{cases}$ فإن : $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}}\ د(\text{س}) =$ ....

(أ) −٥ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ليس لها وجود.

⑤ إذا كانت : $د(\text{س}) = \begin{cases} ٣ - \text{س} & ، ١ > \text{س} \\ ٤ & ، \text{س} = ١ \\ \text{س}^٢ + ١ & ، ١ < \text{س} \end{cases}$ فإن : $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـا}}\ د(\text{س}) =$ ....

(أ) ٤ (ب) ٢ (جـ) ١ (د) غير موجودة.

⑥ إذا كانت $د(\text{س}) = \begin{cases} \frac{\text{جا س}}{\text{س}} & ، -\frac{\pi}{٢} < \text{س} < ٠ \\ \text{جتا س} & ، \frac{\pi}{٢} > \text{س} > ٠ \end{cases}$ فإن : $\underset{\text{س} \to \text{صفر}}{\text{نهـا}}\ د(\text{س}) =$ ....

(أ) $\frac{٢}{\pi}$ (ب) $\frac{\pi}{٢}$ (جـ) ١ (د) صفر

⑦ إذا كانت $د(\text{س}) = \begin{cases} \frac{\text{س}^٢ - ٤}{\text{س} - ٢} & ، \text{س} \neq ٢ \\ \text{طا} \frac{\pi}{٢\text{س}} & ، \text{س} = ٢ \end{cases}$ فإن : $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}}\ د(\text{س}) =$ ....

(أ) ١ (ب) $\sqrt{٢}$ (جـ) ٤ (د) غير موجودة.

⑧ إذا كانت : $د(\text{س}) = \begin{cases} \frac{٢ \text{ جا س}}{\pi - \text{س}} & ، \pi > \text{س} \\ ١ - \text{جتا س} & ، \pi < \text{س} \end{cases}$ فإن : $\underset{\text{س} \to \pi}{\text{نهـا}}\ د(\text{س}) =$ ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) غير موجودة. (د) صفر

⑨ 📖 إذا كانت : $د(\text{س}) = \begin{cases} \frac{\text{جا}(\text{س} - ١)}{(\text{س} - ١)} & ، ١ > \text{س} \\ \text{جا} \frac{\pi \text{س}}{٤} & ، ٢ > \text{س} > ١ \end{cases}$ فإن : $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـا}}\ د(\text{س}) =$ ....

(أ) ١ (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) $\frac{\pi}{٤}$ (د) غير موجودة.

⑩ إذا كانت : $د(\text{س}) = \begin{cases} \frac{\text{جا}(٢\text{س} - ٦)}{\text{س} - ٣} & ، ٣ > \text{س} \\ ٢ \text{ جا} \frac{\pi \text{س}}{٦} & ، ٣ < \text{س} \end{cases}$ فإن : $\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهـا}}\ د(\text{س}) =$ ....

(أ) ٢ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{\pi}{٢}$ (د) غير موجودة.

⑪ إذا كانت : $د(\text{س}) = \begin{cases} \frac{٢\text{س} + \text{جا س}}{\text{طا} ٢\text{س} + ٤\text{س}} & ، ٠ < \text{س} < \frac{\pi}{٤} \\ ٥\text{س} + \frac{١}{٢} & ، \text{س} < ٠ \end{cases}$ فإن : $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}}\ د(\text{س}) =$ ....

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) غير موجودة.

⑫ $د(\text{س}) = \begin{cases} \text{س} + ١ & \text{عندما } \text{س} > \text{أ} \\ ٣\text{س} - ١ & \text{عندما } \text{س} < \text{أ} \end{cases}$ ، $\underset{\text{س} \to \text{أ}}{\text{نهـا}}\ د(\text{س})$ موجودة فإن : أ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

⑬ إذا كانت : $د(\text{س}) = \begin{cases} \text{جا} ٤\text{س} \text{ طا} ٩\text{س} & ، \frac{-\pi}{١٨} < \text{س} < ٠ \\ ٤\text{س} + \text{أ}^٢ & ، \text{س} > ٠ \end{cases}$ وكانت : $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}}\ د(\text{س})$ موجودة

فإن : أ = ...

(أ) $\frac{٤}{٩}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) $\pm\frac{٢}{٣}$ (د) $\pm\frac{٤}{٩}$

(١٤) إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} أ + ظا س & ، س \le ٠ \\ \frac{ظا ٢س}{أس} & ، ٠ < س < \frac{\pi}{٤} \end{cases}$ وكانت $\lim\limits_{س \to ٠}$ د (س) موجودة

فإن : أ = ...

(أ) صفر أو ١ (ب) ١ أو −٢ (جـ) ٢ أو ٣ (د) ١ أو ٢

(١٥) إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} \frac{ظا ٢س}{ظا ٨س} & ، -\frac{\pi}{٤} < س < ٠ \\ س + \frac{٣}{٢} & ، س > ٠ \end{cases}$ فإن : $\lim\limits_{س \to ٠}$ د (س) =

(أ) ٢ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) $\frac{٣}{٢}$ (د) غير موجودة.

(١٦) إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} \frac{ظا س}{\pi - ٢س} & ، ٠ < س < \frac{\pi}{٢} \\ جا (\pi - س) & ، س > \frac{\pi}{٢} \end{cases}$

فإن : $\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{٢}}$ د (س) = ...

(أ) ٢ (ب) $\frac{\pi}{٢}$ (جـ) π (د) غير موجودة.

(١٧) إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} \frac{جا^{٢} ٢س}{س^{٢}} & ، س < ٠ \\ ٢أ + ٣ جتا س & ، س > ٠ \end{cases}$ وكانت $\lim\limits_{س \to ٠}$ د (س) موجودة.

فإن : أ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) صفر (جـ) ٢ (د) $-\frac{١}{٢}$

(١٨) إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} \frac{٣س - |س|^{٣}}{س} & ، س < ٠ \\ ٣أ + ٤س & ، س > ٠ \end{cases}$ وكانت : $\lim\limits_{س \to ٠}$ د (س) موجودة.

فإن : أ = ...

(أ) صفر (ب) $-\frac{١}{٣}$ (جـ) $\frac{٤}{٣}$ (د) ١

(١٩) $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{\sqrt{١ - جتا^{٢} س}}{س}$ = ...

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) ٢ (د) صفر

(٢٠) إذا كانت : د (س) = $\frac{٢س - ٦}{|س - ٣|}$ فإن : $(د(٣^{+}))^{٢} + (د(٣^{-}))^{٢}$ = ...

(أ) ٨ (ب) صفر (جـ) ٤ (د) −٤

(٢١) إذا كان $\lim\limits_{س \to ١} \frac{س^{ن} - ١}{س - ١} = \lim\limits_{س \to ٠} (|س| + ٥)$ فإن ن =

(أ) ٥ (ب) −٥ (جـ) ٤ (د) ١

(٢٢) إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} \frac{س^{٣} - ٦٤}{س^{٢} - ١٦} & ، س < ٤ \\ أس & ، س > ٤ \end{cases}$ حيث $\lim\limits_{س \to ٤}$ د (س) لها وجود

فإن : قيمة أ =

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٦

(٢٣) إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} أ جتا س + \frac{١٥ جا س}{س} & ، س > ٠ \\ \frac{س^{٢} - ٦٤}{س^{٢} - ٨} & ، س < ٠ \end{cases}$ وكانت د (س) لها نهاية عندما س = ٠

فإن : أ = ...

(أ) ١ (ب) −٥ (جـ) −٧ (د) ٧

(٢٤) إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} ٣س^{٢} + أس - ٢ & ، س > ٢ \\ ٢س + ب & ، س < ٢ \end{cases}$ لها نهاية عند س = ٢ وتساوي ١٦

فإن : أ + ب = ...

(أ) ٤ (ب) ١٠ (جـ) −١٣ (د) ٧

(٢٥) إذا كانت الدالة د نهايتها موجودة عندما س ← −٣ حيث

د (س) = $\begin{cases} \frac{س^{٢} + ٢س - ٣}{س + ٣} & عندما\ س < -٣ \\ س + أ & عندما\ س > -٣ \end{cases}$ فإن : أ = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٢ (د) −١

(٢٦) إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} ٣س - ٢ & ، س < -١ \\ أس + ب & ، -١ < س < ٢ \\ ٦ - س & ، س > ٢ \end{cases}$ لها نهاية عند س = −١ ، س = ٢

فإن : أ + ب = ...

(أ) ٢ (ب) −٣ (جـ) −١ (د) صفر

(٢٧) إذا كانت الدالة د : د (س) = $\begin{cases} \frac{أس}{\sqrt{س + ٤} - ٢} & ، س > ٠ \\ \frac{جا ٢س}{أس} & ، س < ٠ \end{cases}$ لها نهاية عند س = ٠

فإن : أ = ...

(أ) $\pm \frac{١}{٢}$ (ب) $\pm \frac{١}{\sqrt{٢}}$ (جـ) $\pm \frac{١}{\sqrt{٣}}$ (د) $\frac{١}{٤}$

ثانيًا الأسئلة المقالية

1 إذا كانت : $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^2 + 1 &، \text{س} < 2 \\ 2\text{س} + 1 &، \text{س} \geq 2 \end{cases}$ أوجد : $\lim\limits_{\text{س} \to 2} \text{د}(\text{س})$ «٥»

2 إذا كانت : $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^2 - 7\text{س} + 12}{\text{س} - 3} &، \text{س} > 3 \\ 2\text{س} - 7 &، \text{س} < 3 \end{cases}$ ابحث وجود : $\lim\limits_{\text{س} \to 3} \text{د}(\text{س})$ «-١»

3 إذا كانت : $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{3\text{س}}{\text{جا س}} &، -\pi < \text{س} < 0 \\ \text{جتا } 2\text{س} &، \text{س} > 0 \end{cases}$

ابحث وجود : $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \text{د}(\text{س})$ «غير موجودة»

4 إذا كانت : $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{5\text{س} + \text{ظا } 2\text{س}}{6\text{س} + \text{جا س}} &، 0 < \text{س} < \frac{\pi}{4} \\ \text{جتا س} &، \text{س} < 0 \end{cases}$

ابحث وجود : $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \text{د}(\text{س})$ «١»

5 إذا كانت : $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س} - 2 &، \text{س} < 0 \\ \text{س}^2 &، 0 \leq \text{س} \leq 2 \\ 2\text{س} &، \text{س} > 2 \end{cases}$

فابحث وجود كل مما يأتى : ① $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \text{د}(\text{س})$ ② $\lim\limits_{\text{س} \to 1} \text{د}(\text{س})$

③ $\lim\limits_{\text{س} \to 2} \text{د}(\text{س})$ «غير موجودة ، ١ ، ٤»

6 إذا كانت : $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} |\text{س} - 3| &، \text{س} \neq 3 \\ 2 &، \text{س} = 3 \end{cases}$ ابحث وجود : $\lim\limits_{\text{س} \to 3} \text{د}(\text{س})$ «صفر»

7 إذا كانت : $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{س}}{\sqrt{\text{س} + 1} - 1} &، \text{س} > 0 \\ \dfrac{2\text{س}}{\text{جا س}} &، -\pi < \text{س} < 0 \end{cases}$ أوجد : $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \text{د}(\text{س})$ «٢»

8 إذا كانت : $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{(\text{س} - 3)^6 - 1}{\text{س} - 4} &، \text{س} > 4 \\ \text{س} + 2 &، \text{س} < 4 \end{cases}$ أوجد : $\lim\limits_{\text{س} \to 4} \text{د}(\text{س})$ «٦»

9 أوجد قيمة كل من : م ، ك إذا كانت :

$\lim\limits_{\text{س} \to 2} \text{د}(\text{س}) = 7$ ، $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^2 + 3\text{م} &، \text{س} < 2 \\ 5\text{س} + \text{ك} &، \text{س} > 2 \end{cases}$ «١ ، -٣»

10 إذا كانت : $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \text{د}(\text{س}) = 2$ حيث $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{جا } 2\text{س}}{\text{س}} &، \text{س} > 0 \\ \text{أ جتا } 2\text{س} &، \text{س} < 0 \end{cases}$

فأوجد قيمة : أ «٢»

11 إذا كانت : $\lim\limits_{\text{س} \to \text{أ}} |3\text{س} + 2| = 14$ فما قيمة : (أ) ؟ «٤ ، أ = $\frac{-16}{3}$»

12 ابحث وجود نهاية للدالة د : $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{3\text{س}}{\text{ظا س}} &، -\frac{\pi}{3} < \text{س} < 0 \\ 3\text{ جتا س} &، 0 < \text{س} < \frac{\pi}{3} \end{cases}$

① عندما $\text{س} \to \frac{-\pi}{3}$ ② $\text{س} \to \frac{\pi}{3}$

③ $\text{س} \to 0$

«غير موجودة ، غير موجودة ، ٣»

13 إذا كانت : $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^2 + \dfrac{\sqrt{\text{س}^2 - 6\text{س} + 9}}{\text{س} - 3}$ ابحث وجود : $\lim\limits_{\text{س} \to 3} \text{د}(\text{س})$ «غير موجودة»

14 إذا كانت : $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}^2 + 2\sqrt{\text{س}^2}}{\text{س}}$ ابحث وجود : $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \text{د}(\text{س})$ «غير موجودة»

15 إذا كانت : $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}|\text{س}| + 2 &، \text{س} < 0 \\ \dfrac{|\text{س}|}{\text{س}} + 1 &، \text{س} > 0 \end{cases}$ أوجد : $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \text{د}(\text{س})$ «٢»

16 أوجد قيمة م حتى تكون د (س) لها نهاية عندما س ← ١ حيث :

$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{(\text{س} - 1)^2}{|\text{س} - 1|} &، \text{س} < 1 \\ 6\text{س} - 3\text{م} &، \text{س} > 1 \end{cases}$ «٢»

17 ابحث وجود $\lim\limits_{\text{س} \to 1} [(\text{د} + \text{ر})(\text{س})]$ حيث :

$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^2 + 3 &، \text{س} \geq 1 \\ 4 - 2\text{س} &، \text{س} < 1 \end{cases}$ ، $\text{ر}(\text{س}) = \begin{cases} -3\text{س} &، \text{س} \geq 1 \\ 2\text{س}^2 - 3\text{س} &، \text{س} < 1 \end{cases}$ «١»

18 إذا كانت الدالة د : $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{أ س}}{\sqrt{\text{س} + 4} - 2} &، \text{س} > 0 \\ \dfrac{1}{\text{أ س قتا } 2\text{س}} &، -\pi < \text{س} < 0 \end{cases}$ لها نهاية عند س = ٠

أوجد قيمة : أ «$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$»

١٩ أوجد قيمة النهاية اليمنى واليسرى ثم استنتج قيمة النهاية إن وجدت لكل من الدوال الآتية عند النقطة المبينة :

① د (س) = $\sqrt{س - ٥}$ عند س = ٥

② د (س) = $\sqrt{٣ - س}$ عند س = ٣

③ د (س) = $\sqrt{س^٢ - ١}$ عند س = -١ ، س = ١

④ د (س) = $\sqrt{٤ - س^٢}$ عند س = -٢ ، س = ٢

٢٠ ابحث وجود نهاية كل من الدالتين المعرفتين بالقاعدتين الآتيتين عند النقطة المبينة :

① د (س) = $\begin{cases} \frac{(س + ٢)^٦ - ٦٤}{س^٢ + ٣٢ س} & ، -٥ < س < ٠ \\ \frac{-١٢ س}{١ - (جا س + جتا س)^٢} & ، ٠ < س < \frac{\pi}{٢} \end{cases}$ عند س = ٠ «٦٠»

② د (س) = $\begin{cases} \frac{١ - جتا س}{جا^٢ ٣ س} & ، \frac{-\pi}{٢} < س < ٠ \\ -\frac{١}{٢} س^٢ جتا ٦ س (١ - ظتا^٢ ٣ س) & ، ٠ < س < \frac{\pi}{٢} \end{cases}$ عند س = ٠ «$\frac{١}{١٨}$»

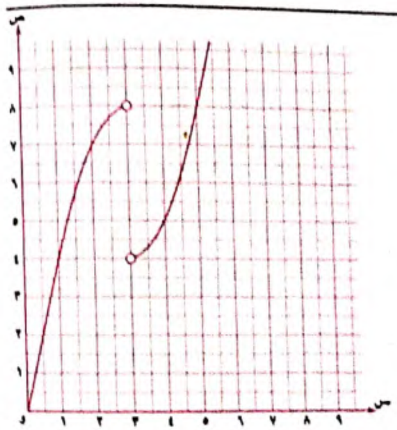
٢١ ابحث وجود كل مما يأتى :

① $\lim_{س \to ٠} \frac{جا |س|}{س}$

② $\lim_{س \to ٠} \frac{جتا |س|}{س + ١}$ حيث س بالتقدير الدائرى. «غير موجودة ، ١»

٢٢ ابحث وجود : $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{قا^٢ س - ١}}{س}$ «غير موجودة»

٢٣ الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة هـ (س)



وكان :

ن (س) = $\begin{cases} س^٢ + ١ & ، س < ٣ \\ ٤ س + ٢ & ، س > ٣ \end{cases}$

أوجد : $\lim_{س \to ٣} (ن (س) + هـ (س))$ «١٨»

٢٤ أوجد قيمة النهاية اليمنى واليسرى ثم استنتج قيمة النهاية لكل من الدوال الآتية عند النقطة المبينة :

① د (س) = $\frac{١}{س - ٢}$ عند س = ٢

② د (س) = $\frac{١}{|س - ٣|}$ عند س = ٣

③ د (س) = $\begin{cases} س - ٢ & ، س > ١ \\ \frac{١}{س - ١} & ، س < ١ \end{cases}$ عند س = ١

٢٥ إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} ١ + \frac{س^٢ + ٢ س}{|س + ٢|} & ، س \in]-٣ ، ٠[- \{-٢\} \\ ٢ س + ١ & ، س \in]٠ ، ٣[\end{cases}$

أوجد : ① $\lim_{س \to -٢^-}$ د (س) ② $\lim_{س \to -٢^+}$ د (س)

③ $\lim_{س \to ٠}$ د (س) ④ $\lim_{س \to ٢}$ د (س)

٢٦ إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} \frac{\sqrt[٣]{٢ س - ٣} - ١}{\sqrt[٥]{٣ س - ٥} - ١} & ، س > ٢ \\ ك س & ، س < ٢ \end{cases}$ لها نهاية عند س = ٢ أوجد قيمة : ك «$\frac{٤}{٩}$»

٢٧ إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} \frac{س^٢ + أ س + ب}{س^٢ - ٤ س + ٣} & ، س < ٣ \\ ٤ س & ، س > ٣ \end{cases}$ لها نهاية عند س = ٣

أوجد قيمتى : أ ، ب «١٨ ، -٦٣»

ثالثاً مسائل تقيس مهارات التفكير

♣ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت : د (س) = س^٢ فإن : $\lim_{س \to ٢}$ د (د (س)) = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ١٦ (د) ٣٢

② إذا كانت : د دالة فردية وكان $\lim_{س \to ٢}$ د (س) = ٧ أى الجمل الآتية صحيحة ؟

(أ) $\lim_{س \to -٢}$ د (س) = ٧ (ب) $\lim_{س \to -٢}$ د (س) = -٧

(جـ) $\lim_{س \to -٢}$ د (س) = -٢ (د) $\lim_{س \to -٢}$ د (س) = صفر

③ إذا كانت : د دالة زوجية وكان $\lim_{س \to ٢}$ د (س) = ٥ أى الجمل الآتية صحيحة ؟

(أ) $\lim_{س \to -٢}$ د (س) = ٥ (ب) $\lim_{س \to -٢}$ د (س) = -٥

(جـ) $\lim_{س \to -٢}$ د (س) = صفر (د) $\lim_{س \to -٢}$ د (س) = -٢

④ إذا كانت : د دالة أحادية كثيرة حدود وكانت : $\lim_{س \to ٢}$ د (س) = ٣

فإن : $\lim_{س \to ٣}$ د$^{-1}$ (س) = ...

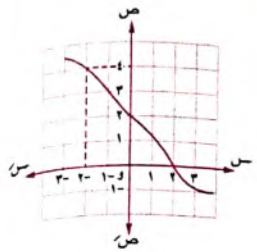
(أ) −٢ (ب) −٣ (جـ) ٢ (د) ٣

⑤ إذا كانت : $\lim_{س \to ١}$ د (س) = ٣ ، $\lim_{س \to ٢}$ د (س) = ٥

فإن : $\lim_{س \to ١}$ د (س + ١) = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

⑥ الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د



فإن : $\lim_{س \to -٢} \frac{[د (س)]^٣ - ٦٤}{د (س) - ٤}$ = ...

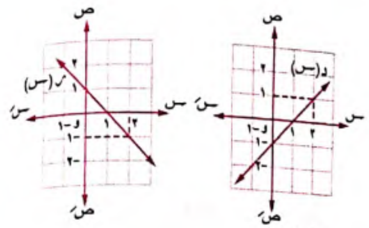
(أ) صفر

(ب) ١٦

(جـ) ٣٢

(د) ٤٨

⑦ الشكلان المقابلان يمثلان منحنيي الدالتين د ، ر

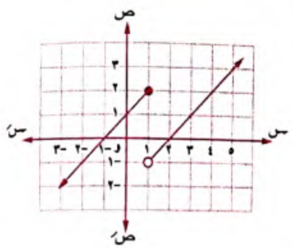


فإن : $\lim_{س \to ١} \frac{د (س)}{ر (س)}$ = ...

(أ) ١ (ب) −١

(جـ) صفر (د) غير موجودة.

⑧ الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة هـ



، ر (س) = $\begin{cases} س & ، س > ١ \\ س - ٢ & ، س < ١ \end{cases}$

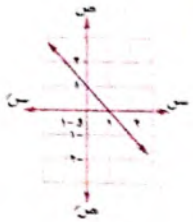
، د (س) = هـ (س) + ر (س)

فإن : $\lim_{س \to ١}$ د (س) = ...

(أ) ليس لها وجود. (ب) ٢

(جـ) −١ (د) صفر

⑨ الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د

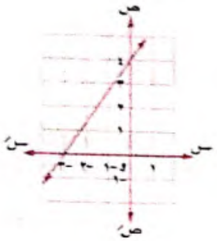


فإن : $\lim_{س \to ١}$ | د (س) | = ...

(أ) −١ (ب) صفر

(جـ) ١ (د) غير موجودة.

⑩ الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د



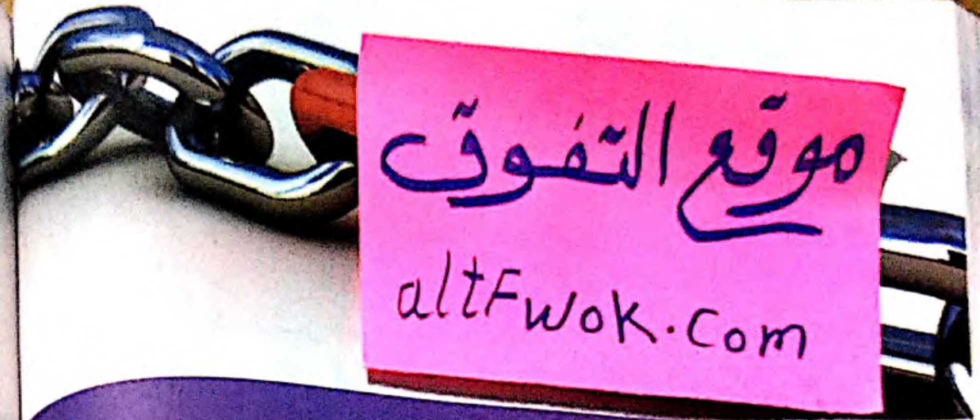
فإن : $\lim_{س \to \infty} \frac{د (س)}{د^{-1} (س)}$ = ...

(أ) $\frac{٤}{٣}$

(ب) $\frac{-٤}{٣}$

(جـ) $\frac{-١٦}{٩}$

(د) $\frac{١٦}{٩}$



الدرس 7 الاتصـــــال

أولاً اتصال دالة عند نقطة

تعريف

تكون الدالة د متصلة عند س = أ إذا تحققت الشروط الثلاثة الآتية مجتمعة :

1. الدالة معرفة عند س = أ أى د (أ) لها وجود
2. $\lim_{س \to أ}$ د (س) لها وجود
3. $\lim_{س \to أ}$ د (س) = د (أ)

- إذا كانت الدالة د مجزأة المجال فإن د تكون متصلة عند س = أ

إذا كان : د (أ$^{+}$) = د (أ$^{-}$) = د (أ)

- يكفى عدم تحقق شرط واحد من الشروط الثلاثة السابقة للحكم على عدم اتصال الدالة عند النقطة س = أ

فمثلاً إذا كانت الدالة غير معرفة عند س = أ فهى بالقطع غير متصلة عندها ولا داعى لأن نبحث النهاية عندها ، وهكذا...

- من الناحية الهندسية نقول إن دالة متصلة فى فترة ما إذا أمكن أن نرسم منحنى الدالة فى هذه الفترة دون أن نرفع سن القلم عن الورقة التى نرسم عليها ، أى يكون منحنى الدالة فى هذه الحالة خاليًا من الثغرات أو القفزات ، أما المنحنيات التى بها ثغرات أو قفزات تكون لدوال غير متصلة (منفصلة)

فمثلاً :

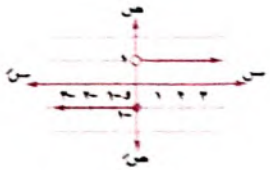
1) د (س) = $\frac{س^2 - 1}{س - 1}$ ، س ≠ 1

- د (1) غير موجودة لأن الدالة غير معرفة عند س = 1
- منحنى الدالة به ثغرة عند س = 1 لأن الدالة غير معرفة عند س = 1

وبالتالى تكون الدالة د غير متصلة عند س = 1

على الرغم من وجود نهاية للدالة [د (1^{+}) = د (1^{-}) = 2]

2) د (س) = { −1 ، س ≤ 0 ؛ 1 ، س > 0 }



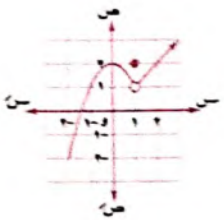
- د (0) = −1 (موجودة)
- د (0^{+}) = 1 ، د (0^{-}) = −1 ∴ د (0^{+}) ≠ د (0^{-})

∴ الدالة ليس لها نهاية عند س = 0 .

- منحنى الدالة به قفزة عند س = 0 .

وبالتالى تكون الدالة د غير متصلة عند س = 0 .

3) د (س) = { 2 − س^2 ، س < 1 ؛ 2 ، س = 1 ؛ س ، س > 1 }



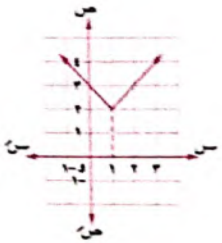
- د (1) = 2 (موجودة)
- د (1^{+}) = د (1^{-}) = 1 (موجودة)

∴ $\lim_{س \to 1}$ د (س) = 1

- منحنى الدالة به ثقب عند س = 1 لأن $\lim_{س \to 1}$ د (س) ≠ د (1)

وبالتالى تكون الدالة د غير متصلة عند س = 1

4) د (س) = { س + 1 ، س ≥ 1 ؛ 3 − س ، س < 1 }



- د (1) = 2 (موجودة)
- د (1^{+}) = د (1^{-}) = 2 (موجودة)

∴ $\lim_{س \to 1}$ د (س) = د (1)

- منحنى الدالة ليس به ثقوب أو قفزات ، $\lim_{س \to 1}$ د (س) = د (1)

وبالتالى تكون الدالة د متصلة عند س = 1

مثال ①

ابحث اتصال الدالة د : د (س) = { ٢ س + ٣ ، س > ٢ ؛ ٤ س - ٣ ، س < ٢ } عند س = ٢

الحـل

∵ الدالة غير معرفة عند س = ٢ أي أن د (٢) غير موجودة.

∴ د ليست متصلة عند س = ٢

مثال ②

ابحث اتصال الدالة د : د (س) = { ٥ س - ٦ ، س ≥ ٣ ؛ ٣ س + ٤ ، س < ٣ } عند س = ٣

الحـل

∵ د (٣) = ٥ × ٣ - ٦ = ٩

، د (٣⁺) = نهـا_{س ← ٣⁺} د (س) = نهـا_{س ← ٣⁺} (٥ س - ٦) = ٩

، د (٣⁻) = نهـا_{س ← ٣⁻} د (س) = نهـا_{س ← ٣⁻} (٣ س + ٤) = ١٣

∴ د (٣⁺) ≠ د (٣⁻) ∴ الدالة ليس لها نهاية عند س = ٣

∴ د ليست متصلة عند س = ٣

مثال ③

ابحث اتصال الدالة د : د (س) = { (س^٧ - ١٢٨) / (س^٤ - ١٦) ، س ≠ ٢ ؛ ١٤ ، س = ٢ } عند س = ٢

الحـل

∵ د (٢) = ١٤

، نهـا_{س ← ٢} د (س) = نهـا_{س ← ٢} (س^٧ - ١٢٨) / (س^٤ - ١٦) = نهـا_{س ← ٢} (س^٧ - ٢^٧) / (س^٤ - ٢^٤) = ٧/٤ (٢)^٣ = ١٤

∴ نهـا_{س ← ٢} د (س) = د (٢) ∴ د متصلة عند س = ٢

مثال ④

ابحث اتصال الدالة د : د (س) = | س - ١ | + ٢ عند س = ١

الحـل

نهـا_{س ← ١} د (س) = نهـا_{س ← ١} (| س - ١ | + ٢) = ٢ ، د (١) = | ١ - ١ | + ٢ = ٢

∴ نهـا_{س ← ١} د (س) = د (١) ∴ د متصلة عند س = ١

ملاحظة

إذا كانت نهـا_{س ← أ} د (س) موجودة ولكن الدالة د غير متصلة عند س = أ

بسبب أن : د (أ) غير معرفة أو نهـا_{س ← أ} د (س) ≠ د (أ)

فإنه يمكن إعادة تعريف الدالة د لتصبح متصلة عند أ

أما إذا كانت نهـا_{س ← أ} د (س) غير موجودة فإنه لا يمكن إعادة تعريف الدالة لتصبح متصلة عند أ

فمثلا : أعد تعريف كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية لكي تصبح متصلة عند س = ٢ إن أمكن

قاعدة الدالة	د (س) = { س + ٢ ، س ≠ ٢ ؛ ١ ، س = ٢ }	د (س) = (س² + ٤ س - ١٢) / (س - ٢)	د (س) = { ٦ ، س > ٢ ؛ صفر ، س = ٢ ؛ -١ ، س < ٢ }
د (٢)	١	غير معرفة	صفر
نهـا_{س ← ٢} د (س)	٤	٨	غير موجودة
سبب عدم الاتصال عند س = ٢	د (٢) ≠ نهـا_{س ← ٢} د (س)	الدالة غير معرفة عند س = ٢	نهـا_{س ← ٢} د (س) ليس لها وجود
إعادة التعريف لتصبح د متصلة عند س = ٢	د (س) = { س + ٢ ، س ≠ ٢ ؛ ٤ ، س = ٢ }	د (س) = { س + ٦ ، س ≠ ٢ ؛ ٨ ، س = ٢ }	لايمكن إعادة تعريفها لكي تصبح متصلة عند س = ٢

مثال ⑤

ابحث اتصال الدالة د : د (س) = (٢ س² - ٧ س - ٤) / (س - ٤) عند س = ٤

، إذا كانت د غير متصلة فهل يمكن إعادة تعريف الدالة د بحيث تكون متصلة عند س = ٤

الحـل

∵ د غير معرفة عند س = ٤ ∴ د غير متصلة عند س = ٤

، ∵ نهـا_{س ← ٤} د (س) = نهـا_{س ← ٤} (٢ س² - ٧ س - ٤) / (س - ٤)

= نهـا_{س ← ٤} (س - ٤)(٢ س + ١) / (س - ٤) = نهـا_{س ← ٤} (٢ س + ١) = ٩

ولكى تكون الدالة متصلة عند س = ٤ لابد أن تكون د(٤) = $\lim_{س \to ٤}$ د(س) = ٩

∴ يمكن إعادة تعريف الدالة كما يلى د(س) = $\begin{cases} \dfrac{٢س^{٢} - ٧س - ٤}{س - ٤} & \text{، س} \neq ٤ \\ ٩ & \text{، س} = ٤ \end{cases}$

مثال ٦

هل يمكن إعادة تعريف الدالة د : د(س) = $\begin{cases} \dfrac{|س - ٢|}{س - ٢} & \text{، س} \neq ٢ \\ \text{صفر} & \text{، س} = ٢ \end{cases}$ لكى تكون متصلة عند س = ٢

الحل

∵ |س − ٢| = $\begin{cases} (س - ٢) & \text{، س} \geq ٢ \\ -(س - ٢) & \text{، س} < ٢ \end{cases}$ ∴ د(س) = $\begin{cases} \dfrac{س - ٢}{س - ٢} & \text{، س} > ٢ \\ \text{صفر} & \text{، س} = ٢ \\ \dfrac{-(س - ٢)}{س - ٢} & \text{، س} < ٢ \end{cases}$

∴ د(س) = $\begin{cases} ١ & \text{، س} > ٢ \\ \text{صفر} & \text{، س} = ٢ \\ -١ & \text{، س} < ٢ \end{cases}$ ∴ د(٢) = صفر ، د(٢^{+}) = ١ ، د(٢^{-}) = −١

∴ د(٢^{+}) ≠ د(٢^{-}) ∴ $\lim_{س \to ٢}$ د(س) ليس لها وجود

∴ لا يمكن إعادة تعريف الدالة عند س = ٢ لتصبح متصلة

مثال ٧

إذا كانت الدالة د : د(س) = $\begin{cases} \dfrac{س \text{ جتا } ٥س}{\text{جا } ٣س + \text{ظا } ٤س} & \text{، } ٠ < س < \frac{\pi}{٨} \\ ٢ب & \text{، س} = ٠ \\ ٣أ - \frac{٢}{٧} \text{ جتا س} & \text{، س} < ٠ \end{cases}$ متصلة عند س = ٠

أوجد قيمة كل من : أ ، ب

الحل

∵ د(٠^{+}) = $\lim_{س \to ٠^{+}} \dfrac{س \text{ جتا } ٥س}{\text{جا } ٣س + \text{ظا } ٤س} = \lim_{س \to ٠^{+}} \dfrac{\text{جتا } ٥س}{\frac{\text{جا } ٣س}{س} + \frac{\text{ظا } ٤س}{س}}$

$= \dfrac{١}{٣ + ٤} = \dfrac{١}{٧}$

، د(٠^{-}) = $\lim_{س \to ٠^{-}} (٣أ - \frac{٢}{٧} \text{ جتا س}) = ٣أ - \frac{٢}{٧}$ ، د(٠) = ٢ب

∵ د متصلة عند س = ٠ ∴ د(٠^{+}) = د(٠^{-}) = د(٠)

∴ ٣أ − $\frac{٢}{٧}$ = $\frac{١}{٧}$ ∴ ٣أ = $\frac{٣}{٧}$ ∴ أ = $\frac{١}{٧}$

، ٢ب = $\frac{١}{٧}$ ∴ ب = $\frac{١}{١٤}$

مثال ٨

إذا كانت الدالة د : د(س) = $\begin{cases} س^{٢} + أس - ٢ & \text{، س} > ٢ \\ ٤ & \text{، س} = ٢ \\ ٥أ + ب س & \text{، س} < ٢ \end{cases}$ متصلة عند س = ٢

أوجد قيمة : ب

الحل

∵ د(٢) = ٤ ، ∵ د(٢^{+}) = $\lim_{س \to ٢^{+}}$ (س² + أس − ٢) = ٤ + ٢أ − ٢ = ٢ + ٢أ

، ∵ د(٢^{-}) = $\lim_{س \to ٢^{-}}$ (٥أ + ب س) = ٥أ + ٢ب

، ∵ د متصلة عند س = ٢ ∴ د(٢^{+}) = د(٢^{-}) = د(٢)

∴ ٢ + ٢أ = ٤ ∴ أ = ١ ، ٥أ + ٢ب = ٤

∴ ٥ + ٢ب = ٤ ∴ ٢ب = −١ ∴ ب = $-\frac{١}{٢}$

مثال ٩

إذا كانت د : د(س) = $\begin{cases} س^{٢} - ٢س + ٢ & \text{، س} \leq ٢ \\ |س - ٣| & \text{، س} > ٢ \end{cases}$ ابحث اتصال د عند س = ٢ ، س = ٣

الحل

عندما ٢ < س < ٣ يكون |س − ٣| = ٣ − س

وعندما س ≥ ٣ يكون |س − ٣| = س − ٣

∴ د(س) = $\begin{cases} س^{٢} - ٢س + ٢ & \text{، س} \leq ٢ \\ ٣ - س & \text{، } ٢ < س < ٣ \\ س - ٣ & \text{، س} \geq ٣ \end{cases}$

* عند س = ٢ :

د(٢) = ٢² − ٢(٢) + ٢ = ٢ ، د(٢^{-}) = $\lim_{س \to ٢^{-}}$ (س² − ٢س + ٢) = ٢

، د(٢^{+}) = $\lim_{س \to ٢^{+}}$ (٣ − س) = ١ ∴ د(٢^{+}) ≠ د(٢^{-})

∴ $\lim_{س \to ٢}$ د(س) ليس لها وجود. ∴ د غير متصلة عند س = ٢

* عند س = ٣ :

د(٣) = ٣ − ٣ = صفر ، د(٣^{-}) = $\lim_{س \to ٣^{-}}$ (٣ − س) = صفر

، د(٣^{+}) = $\lim_{س \to ٣^{+}}$ (س − ٣) = صفر ∴ د(٣^{+}) = د(٣^{-}) = د(٣)

∴ د متصلة عند س = ٣

مثال ١٠

أعد تعريف الدالة د : د(س) = $\frac{٤ \text{ جتا } س}{\pi - ٢س}$ لكي تصبح متصلة عند س = $\frac{\pi}{٢}$

الحل

∵ الدالة د غير معرفة عند س = $\frac{\pi}{٢}$

، $\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{٢}}$ د(س) = $\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{٤ \text{ جتا } س}{\pi - ٢س}$ = $\lim\limits_{(\frac{\pi}{٢} - س) \to ٠} \frac{٤ \text{ جا}(\frac{\pi}{٢} - س)}{٢(\frac{\pi}{٢} - س)}$ = $\frac{٤}{٢}$ = ٢

ولكن تكون الدالة متصلة عند س = $\frac{\pi}{٢}$ لابد أن يكون د$(\frac{\pi}{٢})$ = $\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{٢}}$ د(س) = ٢

∴ يمكن إعادة تعريف الدالة كما يلى د : د(س) = $\begin{cases} \frac{٤ \text{ جتا } س}{\pi - ٢س} & ، س \neq \frac{\pi}{٢} \\ ٢ & ، س = \frac{\pi}{٢} \end{cases}$

ثانيًا اتصال دالة على فترة

تعريف

١ إذا كانت الدالة د معرفة على الفترة المفتوحة ف =]أ ، ب[

فإن د تكون متصلة على ف إذا كانت متصلة عند كل نقطة تنتمى لهذه الفترة.

٢ إذا كانت الدالة د معرفة على الفترة المغلقة ف = [أ ، ب]

فإن الدالة د تكون متصلة على ف إذا كان :

- د متصلة على]أ ، ب[
- د متصلة من اليمين عند أ **أى أن** د(أ) = $\lim\limits_{س \to أ^{+}}$ د(س)
- د متصلة من اليسار عند ب **أى أن** د(ب) = $\lim\limits_{س \to ب^{-}}$ د(س)

بعض أنماط الدوال المتصلة

من معرفتنا للأشكال البيانية للدوال الجبرية أمكن استنتاج أنماط لبعض الدوال المتصلة مثل :

١ الدالة كثيرة الحدود : د(س) = $أ_٠ + أ_١ س + أ_٢ س^٢ + \cdots + أ_ن س^ن$

متصلة على ح أو أى فترة جزئية من ح

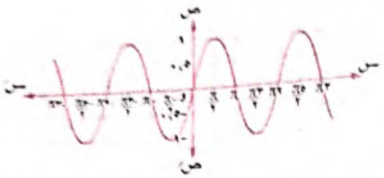
٢ الدالة الكسرية : د(س) = $\frac{أ_٠ + أ_١ س + أ_٢ س^٢ + \cdots + أ_ن س^ن}{ب_٠ + ب_١ س + ب_٢ س^٢ + \cdots + ب_ن س^ن}$

متصلة على ح − {أصفار المقام} أو أى فترة جزئية من ح عدا أصفار المقام

٣ الدالة المثلثية :

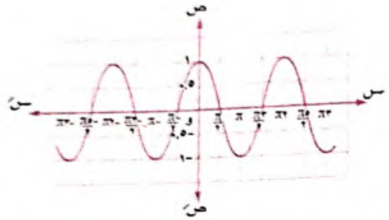
(أ) دالة الجيب : د(س) = جا س متصلة على ح أو أى فترة جزئية من ح

ويتضح ذلك من التمثيل البيانى فى الشكل التالى



(ب) دالة جيب التمام : د(س) = جتا س متصلة على ح أو أى فترة جزئية من ح

ويتضح ذلك من التمثيل البيانى فى الشكل التالى :

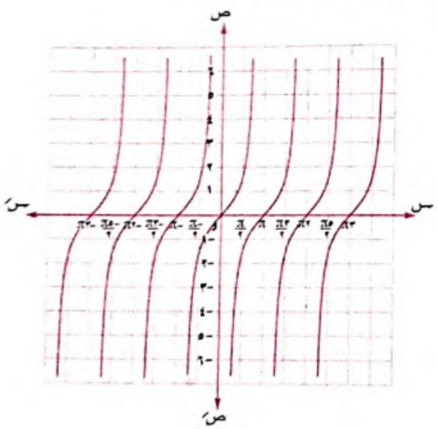


(جـ) دالة الظل : د(س) = ظا س متصلة على ح ما عدا النقط :

..... ، $\frac{٥\pi}{٢}$ ، $\frac{٣\pi}{٢}$ ، $\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{-\pi}{٢}$ ، $\frac{-٣\pi}{٢}$ ، $\frac{-٥\pi}{٢}$ ، ..... أى أن الدالة متصلة على

ح − {س : س = $\frac{\pi}{٢}$ + ن π ، ن ∈ ص}

ويتضح ذلك من التمثيل البيانى فى الشكل التالى :



معلومة إثرائية

كل من الدوال الآتية تكون متصلة على أي فترة مفتوحة جزئية من مجالها :

[١] الدالة د : د (س) = | هـ (س) | حيث هـ (س) كثيرة حدود مجالها = ح

[٢] الدالة د : د (س) = $\sqrt[ن]{هـ (س)}$ حيث ن ∈ ص$_+$ وأكبر من ١ ، هـ (س) كثيرة حدود

* مجالها = ح إذا كان ن عددًا فرديًا أكبر من ١
* مجالها الفترة التي تحقق هـ (س) ≥ ٠ إذا كان ن عددًا زوجيًا

مثال ١١

ابحث اتصال كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية على ح :

[١] د (س) = س^٣ + ٤ س − ٥   [٢] د (س) = ٣

[٣] د (س) = $\frac{س - ٤}{س^٢ - ٥ س + ٦}$ [٤] د (س) = $\frac{س}{س^٢ + ٢٥}$

الحل

[١] د (س) = س^٣ + ٤ س − ٥ (دالة كثيرة حدود)   ∴ د متصلة على ح

[٢] د (س) = ٣ (دالة كثيرة حدود)   ∴ د متصلة على ح

[٣] د (س) = $\frac{س - ٤}{س^٢ - ٥ س + ٦}$ (دالة كسرية)

∵ س^٢ − ٥ س + ٦ = ٠ عندما (س − ٢) (س − ٣) = ٠ أي عندما س = ٢ أ، س = ٣

∴ د متصلة على ح − {٢ ، ٣}

[٤] د (س) = $\frac{س}{س^٢ + ٢٥}$ (دالة كسرية)

∵ س^٢ + ٢٥ > ٠ لجميع قيم س ∈ ح   ∴ لا توجد أصفار للمقام.

∴ د متصلة على ح

ملاحظة

إذا كانت الدالتان د$_١$ ، د$_٢$ معرفتين على الفترة ف =]أ ، ب[وكانتا متصلتين على الفترة ف ، فإن كلًا من الدوال الآتية تكون متصلة على الفترة ف :

[١] د$_١$ ± د$_٢$ [٢] د$_١$. د$_٢$ [٣] $\frac{د_١}{د_٢}$ بشرط د$_٢$ (س) ≠ صفر

مثال ١٢

ابحث اتصال كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية :

[١] د (س) = (س + ٢) جا س   [٢] د (س) = (س + ١)^٢ − جا س

[٣] د (س) = $\frac{جتا س + جا س}{س + ٣}$ [٤] د (س) = س^٢ + ٥ + ٣ س$^{-٢}$

[٥] د (س) = $\frac{طا س}{س^٢ - ١}$

الحل

[١] ∵ كل من (س + ٢) ، جا س متصلة على ح   ∴ د متصلة على ح

[٢] ∵ كل من (س + ١)^٢ ، جا س متصلة على ح   ∴ د متصلة على ح

[٣] ∵ كل من جتا س ، جا س ، (س + ٣) متصلة على ح

∴ د متصلة على ح − {أصفار المقام}   ∴ د متصلة على ح − {−٣}

[٤] ∵ د (س) = س^٢ + ٥ + $\frac{٣}{س^٢}$ ∴ د متصلة على ح − {٠}

[٥] ∵ طا س متصلة على ح − {س : س = $\frac{\pi}{٢}$ + ن π ، ن ∈ ص}

، (س^٢ − ١) متصلة على ح ، ∵ س^٢ − ١ = ٠ عند س = ± ١

∴ الدالة د متصلة على ح − {١ ، −١ ، $\frac{\pi}{٢}$ + ن π} حيث ن ∈ ص

مثال ١٣

ابحث اتصال الدالة د : د (س) = $\begin{cases} ٣ س + ٢ ، & -٣ \le س < ٢ \\ س^٢ + ٤ ، & ٢ \le س \le ٥ \end{cases}$

الحل

∵ د معرفة على الفترة [−٣ ، ٥]

ولكي نبحث اتصالها على هذه الفترة نبحث :

[١] اتصالها في كل من الفترتين]−٣ ، ٢[،]٢ ، ٥[

[٢] اتصالها عند النقطة س = ٢ التي تتغير عندها قاعدة الدالة.

[٣] اتصالها من اليمين عند س = −٣ ، اتصالها من اليسار عند س = ٥

أولًا : * لكل س ∈]−٣ ، ٢[

∴ د (س) = ٣ س + ٢ (كثيرة حدود)   ∴ د متصلة على]−٣ ، ٢[

* لكل س ∈]٢ ، ٥[

∴ د (س) = س^٢ + ٤ (كثيرة حدود)   ∴ د متصلة على]٢ ، ٥[

ثانيًا : ∵ د (٢) = ٢^{٢} + ٤ = ٨

، د (٢$^{-}$) = نهــا$_{س ← ٢^{-}}$ (٣ س + ٢) = ٨ ، د (٢$^{+}$) = نهــا$_{س ← ٢^{+}}$ (س^{٢} + ٤) = ٨

∴ د (٢$^{-}$) = د (٢$^{+}$) = د (٢)　　∴ د متصلة عند س = ٢

ثالثًا : ∵ د (−٣) = ٣ (−٣) + ٢ = −٧ ، د (−٣$^{+}$) = نهــا$_{س ← −٣^{+}}$ (٣ س + ٢) = −٧

∴ د (−٣$^{+}$) = د (−٣)

∴ د متصلة من اليمين عند س = −٣　　وكذلك ∵ د (٥) = ٥^{٢} + ٤ = ٢٩

، د (٥$^{-}$) = نهــا$_{س ← ٥^{-}}$ (س^{٢} + ٤) = ٢٩

∴ د (٥$^{-}$) = د (٥)　　∴ د متصلة من اليسار عند س = ٥

من أولًا وثانيًا وثالثًا نستنتج أن د متصلة على [−٣ ، ٥]

مثال ⓮

ابحث اتصال كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية على مجالها :

[١] د (س) = $\sqrt{س + ٢}$　　[٢] د (س) = $\sqrt[٣]{٢ - س^{٢}}$　　[٣] د (س) = $\frac{١}{\sqrt[٣]{س^{٢} - ٢٥}}$

الحـــل

[١] ∵ د (س) = $\sqrt{س + ٢}$ [دليل الجذر = ٢ (زوجى)]

∴ د معرفة إذا كان س + ٢ ≥ ٠ أى س ≥ −٢　　∴ مجال د = [−٢ ، ∞[

نفرض أن أ ∈]−٢ ، ∞[

، ∵ نهــا$_{س ← أ}$ د (س) = نهــا$_{س ← أ}$ $\sqrt{س + ٢}$ = $\sqrt{أ + ٢}$ = د (أ)

∴ الدالة د متصلة لجميع قيم أ　　∴ د متصلة على الفترة]−٢ ، ∞[

، ∵ د (−٢) = ٠ ، د (−٢$^{+}$) = نهــا$_{س ← −٢^{+}}$ ($\sqrt{س + ٢}$) = ٠

∴ د (−٢$^{+}$) = د (−٢)　　∴ د متصلة من اليمين عند س = −٢

∴ د متصلة على [−٢ ، ∞[

[٢] ∵ د (س) = $\sqrt[٣]{٢ - س^{٢}}$ [دليل الجذر = ٣ (فردى)]　　∴ د متصلة على ح

[٣] ∵ د (س) = $\frac{١}{\sqrt[٣]{س^{٢} - ٢٥}}$ [دليل الجذر = ٣ (فردى)]　　∴ د متصلة على ح − {أصفار المقام}

، ∵ س^{٢} − ٢٥ = ٠ عندما س = ± ٥　　∴ د متصلة على ح − {٥ ، −٥}

مثال ⓯

ابحث اتصال الدالة د : د (س) = { ماس − مناس ، ٠ ≤ س ≤ π
　　　　　　　　　　　　　　　　　 { ٢ منا^{٢} س − ١ ، س > π

الحـــل

∵ كل من ماس ، مناس متصلة فى الفترة]٠ ، π[

∴ د (س) = ماس − مناس متصلة فى الفترة]٠ ، π[

وبالمثل د (س) = ٢ منا^{٢} س − ١ متصلة فى الفترة]π ، ∞[　　(١)

، ∵ د (π) = ما π − منا π = ١ ، د (π^{-}) = نهــا$_{س ← π^{-}}$ (ماس − مناس) = ما π − منا π = ١

، د (π^{+}) = نهــا$_{س ← π^{+}}$ (٢ منا^{٢} س − ١) = ٢ منا^{٢} π − ١ = ١

∴ د (π^{-}) = د (π^{+}) = د (π)　　∴ د متصلة عند س = π　　(٢)

، ∵ د (٠) = ما ٠ − منا ٠ = −١ ، د (٠$^{+}$) = نهــا$_{س ← ٠^{+}}$ (ماس − مناس) = −١

∴ د (٠$^{+}$) = د (٠)　　∴ د متصلة من اليمين عند س = ٠　　(٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) نستنتج أن د متصلة على [٠ ، ∞[

مثال ⓰

ابحث اتصال كل من الدالتين المعرفتين بالقاعدتين الآتيتين على ح :

[١] د (س) = $\frac{س - ١}{مناس}$　　[٢] د (س) = $\frac{س^{٢} + ٢}{١ + ماس}$

الحـــل

[١] ∵ كل من (س − ١) ، مناس متصلة على ح

، ∵ مناس = ٠ عندما س = $\frac{π}{٢}$ + ن π

∴ د متصلة على

ح − {س : س = $\frac{π}{٢}$ + ن π ، ن ∈ ص}

[٢] ∵ كل من (س^{٢} + ٢) ، (١ + ماس)

متصلة على ح

، ∵ ١ + ماس = ٠

أى ماس = −١ عندما س = $\frac{٣π}{٢}$ + ٢ ن π

∴ د متصلة على ح − {س : س = $\frac{٣π}{٢}$ + ٢ ن π ، ن ∈ ص}

! تذكر أن

المعادلة	الحل العام
• ماس = ٠	س = ن π
• ماس = ١	س = $\frac{π}{٢}$ + ٢ ن π
• ماس = −١	س = $\frac{٣π}{٢}$ + ٢ ن π
• مناس = ٠	س = $\frac{π}{٢}$ + ن π
• مناس = ١	س = ٢ ن π
• مناس = −١	س = π + ٢ ن π

مثال ⑰

إذا كانت الدالة د : د (س) = $\begin{cases} ٣ س - ٢ & ، س \le -٢ \\ أ س + ب & ، -٢ < س < ٥ \\ س^٢ - ١٢ & ، س \ge ٥ \end{cases}$ متصلة على ح

أوجد : أ ، ب

الحل

∵ د متصلة على ح ∴ د متصلة عند س = -٢

∴ د (-٢^-) = د (-٢^+) = د (٢)

∵ نهـــا$_{س \to -٢}$ (أ س + ب) = ٣ (-٢) - ٢ ∴ -٢ أ + ب = -٨ (١)

، د متصلة عند س = ٥ ∴ د (٥^-) = د (٥^+) = د (٥)

∵ نهـــا$_{س \to ٥}$ (أ س + ب) = $(٥)^٢$ - ١٢ ∴ ٥ أ + ب = ١٢ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ أ = ٣ ، ب = -٢

تمارين 18 على الاتصال

اختبر نفسك

• فهم • تطبيق • مستويات عليا • من أسئلة الكتاب المدرسي

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت د : د (س) دالة فإنها تكون متصلة عند س = أ إذا كان ....

(أ) د (أ) موجودة. (ب) د (أ) = د $(أ^+)$ = د $(أ^-)$

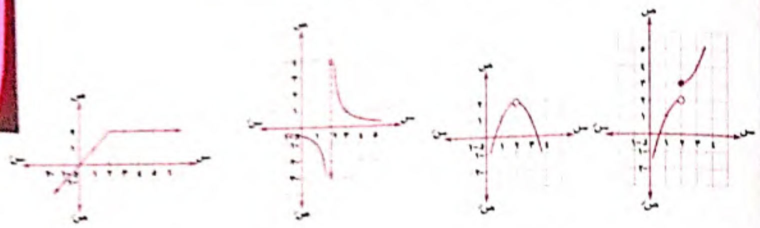
(جـ) د (س) لها نهاية عند س ← أ (د) أ ، حـ معًا.

② إذا كانت : نهـــا$_{س \to أ^+}$ د (س) = ل ، نهـــا$_{س \to أ^-}$ د (س) = م وكانت الدالة متصلة عند س = أ

فإن : $ل^٢ + م^٢ - ٢ ل م$ = ...

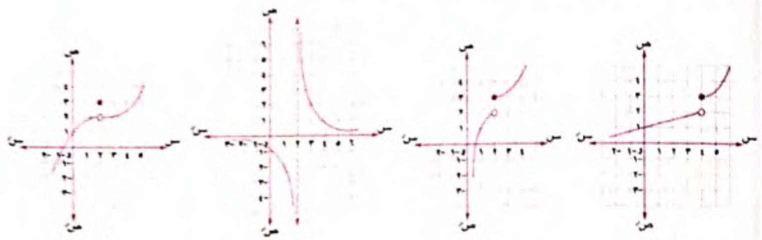
(أ) صفر (ب) ١ (جـ) -١ (د) ٢

③ الشكل الذى يبين الدالة المتصلة عندما س = ٢ هو الشكل ....



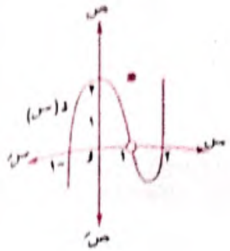
(أ) (ب) (جـ) (د)

④ أى من الأشكال الآتية يكون متصلاً عند س = ٢ ؟



(أ) (ب) (جـ) (د)

⑤ في الشكل المقابل :



جميع العبارات التالية صحيحة ما عدا ....

(أ) نهـــا د (س) = ٠ عندما س ⟵ ١

(ب) الدالة ليست متصلة عند س = ١

(جـ) د (١) = ٢

(د) لا يمكن إعادة تعريف الدالة لكي تصبح متصلة.

⑥ إذا كانت الدالة د : د (س) = $\begin{cases} \frac{س^{2} - ١}{س - ١} & ، س \neq ١ \\ ٢أ & ، س = ١ \end{cases}$ متصلة عند س = ١

فإن : أ = ...

(أ) صفر　　(ب) ١　　(جـ) ٢　　(د) ٤

⑦ إذا كانت د دالة حيث : د (س) = $\begin{cases} ٢س & ، س \leq ١ \\ ٢س - أ & ، س > ١ \end{cases}$ متصلة عند س = ١

فإن : أ = ...

(أ) ١　　(ب) ٢　　(جـ) -١　　(د) -٢

⑧ إذا كانت د : د (س) = $\begin{cases} أس^{2} - ٢ & ، س \neq ٢ \\ ٢أ & ، س = ٢ \end{cases}$ متصلة عند س = ٢　فإن : أ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$　　(ب) $\frac{٢}{٣}$　　(جـ) $\frac{٣}{٢}$　　(د) ٦

⑨ إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} س^{2} - ٢س & \text{عندما } س \leq ١ \\ ك س - ٣ & \text{عندما } س > ١ \end{cases}$ متصلة عند س = ١　فإن : ك = ...

(أ) صفر　　(ب) ١　　(جـ) ٢　　(د) ٣

⑩ إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} أ - س^{2} & ، س \leq -٢ \\ س & ، س > -٢ \end{cases}$ متصلة عند س = -٢　فإن : أ = ...

(أ) -٢　　(ب) -٤　　(جـ) ٢　　(د) ٤

⑪ إذا كانت الدالة د متصلة عند س = ٢ حيث : د (س) = $\begin{cases} أس^{2} + ٥ & \text{عندما } س \leq ٢ \\ ٩ - ب س & \text{عندما } س > ٢ \end{cases}$

فإن : ٢أ + ب = ...

(أ) ٧　　(ب) ١٤　　(جـ) ٢　　(د) -٢

⑫ إذا كانت د : د (س) = $\begin{cases} س^{2} + ب س + ٢ & ، س < ١ \\ أ س + ب & ، س \geq ١ \end{cases}$ متصلة عند س = ١ ، د (١) = ٧

فإن : $\frac{أ}{ب}$ = ...

(أ) $\frac{٧}{٢}$　　(ب) $\frac{٤}{٣}$　　(جـ) $\frac{٣}{٤}$　　(د) ١

⑬ إذا كانت الدالة د حيث : د (س) = $\begin{cases} \frac{(س + ٢)^{٦} - ٦٤}{٢ س} & ، س \neq ٠ \\ ك & ، س = ٠ \end{cases}$ متصلة عند س = ٠

فإن : ك = ...

(أ) ٩٦　　(ب) ١٩٢　　(جـ) ٣٨٤　　(د) ٩٢

⑭ إذا كانت د دالة حيث : د (س) = $\begin{cases} \frac{\sqrt[أ]{س + ٣} - ٢}{س - ١} & ، س \neq ١ \\ أ & ، س = ١ \end{cases}$ متصلة عند س = ١

فإن : أ = ...

(أ) ٣　　(ب) ٤　　(جـ) $\frac{١}{٤}$　　(د) ٢

⑮ إذا كانت د : د (س) = $\begin{cases} \frac{\sqrt{س - أ} - ١}{\sqrt{س} - ٣} & ، س \neq ٩ \\ ب & ، س = ٩ \end{cases}$ متصلة على ح

فإن : $\frac{أ}{ب}$ = ...

(أ) $\frac{٨}{٣}$　　(ب) $\frac{١}{٤}$　　(جـ) $\frac{٣}{٤}$　　(د) ١٤

⑯ إذا كانت الدالة د : د (س) = $\begin{cases} \frac{|س|}{س} + ٦ & ، س < ٠ \\ أ^{2} + جا ٢ س & ، س \geq ٠ \end{cases}$ متصلة عند س = ٠

فإن : أ = ...

(أ) ٢　　(ب) ± $\sqrt{٦}$　　(جـ) ± ٢　　(د) ± $\sqrt{٥}$

⑰ إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} \frac{طا (س - ٢)}{س - ٢} & ، س > ٢ \\ جا \left(\frac{١}{٤} \pi س\right) & ، س < ٢ \end{cases}$ فإن : ....

(أ) الدالة متصلة عند س = ٢　　(ب) الدالة ليس لها نهاية عند س ⟵ ٤

(جـ) الدالة لها نهاية عند س ⟵ ٢　　(د) د (٢⁺) ≠ د (٢⁻)

(١٨) إذا كانت الدالة د : د (س) = $\begin{cases} \frac{\text{جا ٢ س + طا س}}{\text{١ + جا ٤ س}} &، \text{س} \in]\text{صفر} ، \frac{\pi}{٢}[- \{\frac{\pi}{٤}\} \\ \text{ك} &، \text{س} = \frac{\pi}{٤} \end{cases}$

متصلة عند س = $\frac{\pi}{٤}$ فإن : ك = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{٣}{٥}$ (جـ) ٣ (د) ٢

(١٩) إذا كانت الدالة د : د (س) = $\begin{cases} \text{جا ٩ س طتا ٤ س} &، \text{س} \in]\frac{-\pi}{٨} ، \frac{\pi}{٨}[- \{٠\} \\ \text{ك}^٢ &، \text{س} = ٠ \end{cases}$

متصلة عند س = ٠ فإن : ك = ...

(أ) $\frac{٩}{٤}$ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) ± $\frac{٣}{٢}$ (د) ± $\frac{٢}{٣}$

(٢٠) الدالة الزوجية المتصلة عند النقطة (أ ، ب) تكون متصلة أيضا عند النقطة ....

(أ) (- أ ، ب) (ب) (- أ ، - ب) (جـ) (أ ، - ب) (د) غير ذلك.

(٢١) إذا كانت : د (س) = $\frac{\text{س}^٢ - ٢٥}{\text{س} - ٥}$ حيث س ≠ ٥

فإن قيمة د (٥) التى تجعل الدالة متصلة عند هذا الموضع تساوى ....

(أ) ١٠ (ب) صفر (جـ) ٢٥ (د) غير معرفة.

(٢٢) إذا كانت د : د (س) = $\frac{\text{س}^٨ - \text{أ}^٨}{\text{س}^٥ - \text{أ}^٥}$ عند س ≠ أ ، د (أ) = ٢٠٠ متصلة عند س = أ

فإن : أ = ...

(أ) ٥ (ب) $\frac{٨}{٥}$ (جـ) ١٢٥ (د) $\frac{١}{٥}$

(٢٣) إذا كانت : د (س) = $\frac{\text{س}^٢ - ٥ \text{س} + ٦}{\text{س}^٢ - ٩}$ حيث س ≠ ± ٣

فإن قيمة د (٣) التى تجعل الدالة متصلة عند هذا الموضع تساوى ....

(أ) $\frac{١}{٦}$ (ب) صفر (جـ) $\frac{١}{٩}$ (د) غير معرفة.

(٢٤) الدالة د : د (س) = ٤ س$^{-٢}$ + $\frac{\text{س}}{\text{س}^٢ - ٩}$ متصلة لكل س ∈ ....

(أ) ح (ب) ح - {٠}

(جـ) ح - {٣ ، -٣} (د) ح - {٣ ، -٣ ، ٠}

(٢٥) إذا كانت الدالة د : د (س) = $\frac{\text{س} + ١}{\text{س}^٢ + \text{أ}}$ متصلة على ح فإن : أ ∈ ....

(أ) ح (ب) ح$^+$ (جـ) ح$^-$ (د) ح$^-$ ∪ {٠}

(٢٦) الدالة د : د (س) = $\frac{١}{\sqrt[٣]{\text{س} + ٢}}$ متصلة لكل س ∈ ....

(أ) ح (ب) ح - {-٢} (جـ) [-٢ ، ∞[(د)]-٢ ، ∞[

(٢٧) الدالة د : د (س) = $\frac{\text{س}}{|\text{س} - ١| - ٣}$ متصلة على ....

(أ) ح - {٣} (ب) ح - {-٣ ، ٣} (جـ) ح - {-٢ ، ٤} (د) ح

(٢٨) الدالة د : د (س) = $\sqrt[٣]{٤ - \text{س}^٢}$ متصلة على ....

(أ) [-٢ ، ٢] (ب) ح -]-٢ ، ٢[(جـ)]٤ ، ∞[(د) ح

(٢٩) الدالة د : د (س) = $\sqrt[٣]{٢ \text{س} - ٥}$ + $\sqrt[٤]{\text{س}^٢ + ٤}$ متصلة لكل س ∈ ....

(أ) ح (ب) ح$^+$ (جـ) [$\frac{٥}{٢}$ ، ∞[(د) [-٤ ، $\frac{٥}{٢}$]

(٣٠) الدالة د : د (س) = $\sqrt[٣]{\text{س} - ١}$ متصلة فى ....

(أ) [١ ، ∞[(ب) [-١ ، ∞[(جـ)]-∞ ، ١] (د)]-∞ ، -١]

(٣١) الدالة د : د (س) = ٤ س $\sqrt[٣]{-\text{س}}$ متصلة لكل س ∈ ....

(أ) ح (ب)]-∞ ، ٤] (جـ)]-∞ ، ٠] (د) [٠ ، ∞[

(٣٢) الدالة د : د (س) = $\frac{\text{س} + ٢}{\sqrt[٣]{\text{س}} - ٢}$ متصلة لكل س ∈ ....

(أ) [٤ ، ∞[(ب) [٠ ، ∞[(جـ) [٠ ، ∞[- {٤} (د)]-∞ ، ٢]

(٣٣) الدوال الآتية متصلة على ح ماعدا ....

(أ) د (س) = جا س (ب) د (س) = س^٢ - ٢

(جـ) د (س) = طا س (د) د (س) = $\frac{٥ \text{س} + ٣}{\text{س}^٢ + ٤}$

(٣٤) الدالة د : د (س) = طا ٢ س متصلة لكل س ∈ ....

(أ) ح - {س : س = $\frac{\pi}{٢}$ + ن π ، ن ∈ ص}

(ب) ح - {س : س = $\frac{\pi}{٤}$ + $\frac{\text{ن} \pi}{٢}$ ، ن ∈ ص}

(جـ) ح - {س : س = $\frac{\pi}{٤}$ + ن π ، ن ∈ ص}

(د) ح - {س : س = $\frac{\pi}{٢}$ + ٢ ن π ، ن ∈ ص}

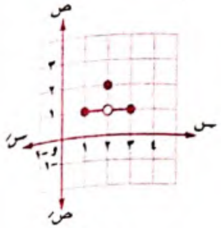
(٣٥) إذا كانت د : د(س) = { (جا ٥ س)/(٢ س) ، س ≠ ٠ ؛ ء ، س = ٠ } متصلة على ح فإن : ء = ...

(أ) ٥ (ب) ١٠ (جـ) ٢ (د) صفر

(٣٦) إذا كانت د : د(س) = { س + ١ ، ١ < س < ٢ ؛ $س^{٢}$ + ب س + حـ ، س ∈ ح −]١ ، ٢[} متصلة على ح

فإن : ب − حـ = ...

(أ) −٢ (ب) ١ (جـ) ٤ (د) −٧



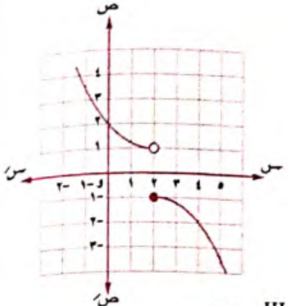
❖ (٣٧) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د أى الجمل الآتية صحيحة ؟

(أ) د متصلة على الفترة [١ ، ٢]

(ب) د متصلة على الفترة]١ ، ٢[

(جـ) نهـا(س ← أ) د(س) موجودة حيث أ ∈ [١ ، ٢]

(د) نهـا(س ← أ) د(س) موجودة حيث أ ∈]١ ، ٢[



❖ (٣٨) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د

، ر(س) = |د(س)|

فإن : (I) ر(س) متصلة على ح

(II) نهـا(س ← ٢) د(س) = ± ١

(III) نهـا(س ← ٢) ر(س) = ١

(أ) I ، II صحيح. (ب) I ، III صحيح.

(جـ) I ، II ، III صحيح. (د) II صحيح.

ثانيًا الأسئلة المقالية

تمارين على الاتصال عند نقطة

١ ابحث اتصال كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية عند النقط المبينة :

(١) د(س) = $س^{٢}$ + س − ٢ عند س = −١

(٢) د(س) = $\sqrt[٣]{س − ١}$ عند س = ٩

(٣) د(س) = ($س^{٢}$ − ٤)/(س − ٢) عند س = ١ ، س = ٢

(٤) د(س) = ٥ − |س − ٣| عند س = ٣

(٥) د(س) = |س − ٤| + |س + ٢| عند س = ٤ ، س = −٢

(٦) د(س) = { ٤ $س^{٢}$ + ٣ ، س ≤ $\frac{١}{٢}$ ؛ ٥ − ٢ س ، س > $\frac{١}{٢}$ } عند س = $\frac{١}{٢}$

(٧) د(س) = { ٢ س ، س < ١ ؛ ٤ − ٢ س ، س > ١ } عند س = −١ ، س = ١

(٨) د(س) = { س + ٤ ، س < −٢ ؛ ١ ، −٢ ≤ س < −١ ؛ ٢ س + ٣ ، س ≥ −١ } عند س = −٢ ، س = −١

(٩) د(س) = { $س^{٢}$ + ٣ ، س ≥ ١ ؛ ($س^{٢}$ + ٢ س − ٣)/(س − ١) ، س < ١ } عند س = ١

(١٠) د(س) = { س |س| ، س ≠ ٠ ؛ ٢ ، س = ٠ } عند س = ٠

(١١) د(س) = { |س − ٢|/(س − ٢) ، س ≠ ٢ ؛ ٢ ، س = ٢ } عند س = ٢

(١٢) د(س) = { (س |س − ٢| − س + ٢)/|س − ٢| ، س < ٢ ؛ ٢ ، س ≥ ٢ } عند س = ٢

(١٣) د(س) = { ($س^{٧}$ − ١٢٨)/($س^{٤}$ − ١٦) ، س ≠ ٢ ؛ ٢ $س^{٢}$ + ٢ ، س = ٢ } عند س = ٢

(١٤) د(س) = { (١ − جتا س)/س ، س > ٠ ؛ ٢ جا س ، س ≤ ٠ } عند س = ٠

(١٥) د(س) = { جا(س − ٢)/($س^{٢}$ − ٤) ، س ∈]−∞ ، ٢[− {−٢} ؛ ١ − ٣/$س^{٢}$ ، س ∈ [٢ ، ∞[} عند س = ٢

(١٦) د(س) = { س |س| + ٤ ، س ≤ ٠ ؛ |س|/س + ٣ ، س > ٠ } عند س = ٠

⑰ $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^2 + 2\text{س} - 3}{|\text{س} + 3|} & ، \text{س} \neq -3 \\ 2 & ، \text{س} = -3 \end{cases}$ عند $\text{س} = -3$ ، عند $\text{س} = 1$

⑱ $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} |\text{س} + 3| & ، \text{س} \leq 2 \\ 11 - 3\text{س} & ، \text{س} > 2 \end{cases}$ عند $\text{س} = -3$ ، $\text{س} = 2$

⑲ $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{5\text{س}^2 + \text{جا}^2 2\text{س}}{\text{س ظا } 3\text{س}} & ، \dfrac{-\pi}{6} < \text{س} < 0 \\ \dfrac{\text{س} + 3}{\text{س} + 1} & ، \text{س} \geq 0 \end{cases}$ عند $\text{س} = 0$

⑳ $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{جا س}}{\pi - \text{س}} & ، \text{س} \neq \pi \\ 1 & ، \text{س} = \pi \end{cases}$ عند $\text{س} = \pi$

٢ أوجد قيم ك ، أ ، ب ، حـ التي تجعل كلًا من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية متصلة عند النقطة المبينة أمام كل منها :

① $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^2 + 2\text{س} - 3}{\text{س} + 3} & ، \text{س} \neq -3 \\ \text{س} + \text{أ} & ، \text{س} = -3 \end{cases}$ عند $\text{س} = -3$

② $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^2 - 5\text{س} + 6}{\text{س}^3 - 8} & ، \text{س} \neq 2 \\ \dfrac{-2}{|\text{أ}|} & ، \text{س} = 2 \end{cases}$ عند $\text{س} = 2$

③ $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{\text{س} + 3} - 2}{\text{س}^2 - 1} & ، \text{س} \neq 1 \\ \text{ك} & ، \text{س} = 1 \end{cases}$ عند $\text{س} = 1$

④ $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{جا}^2 2\text{س}}{\text{س ظا } 2\text{س}} & ، \text{س} \in \left]\dfrac{-\pi}{6} ، \dfrac{\pi}{6}\right[- \{0\} \\ \text{أ} + 1 & ، \text{س} = 0 \end{cases}$ عند $\text{س} = 0$

⑤ $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} 3\text{س} - 2 & ، \text{س} \leq -2 \\ \text{أ س} + \text{ب} & ، -2 < \text{س} < 5 \\ \text{س}^2 - 12 & ، \text{س} \geq 5 \end{cases}$ عند $\text{س} = -2$ ، $\text{س} = 5$

⑥ $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{أ} + \text{ب س} & ، \text{س} > 2 \\ 3 & ، \text{س} = 2 \\ \text{ب} - \text{أ س}^2 & ، \text{س} < 2 \end{cases}$ عند $\text{س} = 2$

⑦ $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{جتا } 2\text{س} - 1}{\text{س}^2} & ، \text{س} \neq 0 \\ \text{ك} & ، \text{س} = 0 \end{cases}$ عند $\text{س} = 0$

⑧ $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} 2 - \text{س}^2 & ، \text{س} \geq \text{حـ} \\ \text{س} & ، \text{س} < \text{حـ} \end{cases}$ عند $\text{س} = \text{حـ}$

⑨ $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{1 - \text{جتا س}}{\text{ك س}} & ، \text{س} \neq 0 \\ \text{جا س} & ، \text{س} = 0 \end{cases}$ عند $\text{س} = 0$

٣ أعد تعريف كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية عند النقط المبينة بحيث تصبح متصلة عند هذه النقط (إن أمكن) :

① $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}^2 - \text{س} - 6}{\text{س} - 3}$ عند $\text{س} = 3$

② $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}^2 - 1}{\text{س}^2 - 3\text{س} + 2}$ عند $\text{س} = 1$

③ $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^2 + 2\text{س} & ، \text{س} > 1 \\ 5\text{س} - 1 & ، \text{س} < 1 \end{cases}$ عند $\text{س} = 1$

④ $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^2 + 1 & ، \text{س} \geq 2 \\ \dfrac{\text{س}^2 - 4}{\text{س} - 2} & ، \text{س} < 2 \end{cases}$ عند $\text{س} = 2$

⑤ $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{3\text{س} + 1 - \text{جتا س}}{5\text{س}} & ، \text{س} > 0 \\ \dfrac{3}{5} \text{ جتا س} & ، \text{س} < 0 \end{cases}$ عند $\text{س} = 0$

⑥ $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{|\text{س} - 2|}{\text{س} - 2}$ عند $\text{س} = 2$

⑦ $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}^2 - 64}{\sqrt[3]{\text{س}} - 2}$ عند $\text{س} = 8$

⑧ $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{|\text{س}| + \text{س}}{\text{س}}$ عند $\text{س} = 0$

⑨ $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{2}{\text{س} - 5} - \dfrac{12}{\text{س}^2 - 4\text{س} - 5}$ عند $\text{س} = 5$

⑩ $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{\text{جا س}}{|\text{س}|}$ عند $\text{س} = 0$

تمارين على الاتصال على فترة

٤ ابحث اتصال كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية :

① $\text{د}(\text{س}) = 7$

② $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^3 - 2\,\text{س}^2 + 1$

③ $\text{د}(\text{س}) = \frac{3\,\text{س} - 5}{\text{س} - 2}$

④ $\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{س}^2 - 9}{\text{س}^2 - 5\,\text{س} + 6}$

⑤ $\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{س} - 1}{\text{س}^4 - 13\,\text{س}^2 + 36}$

⑥ $\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{س}}{\text{س}^2 + \text{س} + 1}$

⑦ $\text{د}(\text{س}) = \frac{4\,\text{س} - 1}{\text{س}^2 - \text{س}}$

⑧ $\text{د}(\text{س}) = |\text{س} - 2| + |5 + \text{س}|$

⑨ $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^2 \,\text{جا}\, 2\,\text{س}$

⑩ $\text{د}(\text{س}) = \text{جا}\,\text{س} - 3\,\text{جتا}(\text{س} + 1)$

⑪ $\text{د}(\text{س}) = (3\,\text{س} + 4)^2 + \text{جا}\,2\,\text{س}$

⑫ $\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{س}}{|\text{س}| - 2}$

⑬ $\text{د}(\text{س}) = \frac{3\,\text{س} - 1}{|\text{س}| + 1}$

⑭ $\text{د}(\text{س}) = \frac{1}{\sqrt{\text{س} - 2}}$

⑮ $\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{س}^2 + \text{جا}\,3\,\text{س}}{\text{س} + 1}$

⑯ $\text{د}(\text{س}) = \frac{\sqrt{\text{س} - 4}}{\text{س} - 6}$

⑰ $\text{د}(\text{س}) = \frac{\sqrt{\text{س} - 3}}{\text{س}^2 - 4}$

⑱ $\text{د}(\text{س}) = \frac{3\,\text{س} + 2}{\text{س}\sqrt{\text{س} + 2}}$

⑲ $\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{س} + 1}{\sqrt{\text{س} + 2} - 1}$

⑳ $\text{د}(\text{س}) = \sqrt{\text{س} + 2} + \sqrt{3 - \text{س}}$

㉑ $\text{د}(\text{س}) = \frac{1}{\sqrt{25 - \text{س}^2}}$

㉒ $\text{د}(\text{س}) = \sqrt{5 - |\text{س}|}$

㉓ $\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{س}^2 + 1}{\text{جا}\,\text{س}}$

㉔ $\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{س} + 3}{\text{جتا}\,\text{س}}$

㉕ $\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{جا}\,2\,\text{س} + \text{جتا}\,5\,\text{س}}{1 - \text{جتا}\,\text{س}}$

㉖ $\text{د}(\text{س}) = \frac{2 + \text{س}}{1 + \text{جا}\,\text{س}}$

㉗ $\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{جا}^2\,\text{س} + \text{جتا}\,\text{س}}{\text{س}^2 - 9}$

㉘ $\text{د}(\text{س}) = \text{ظا}^2\,\text{س} - 1$

㉙ $\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{ظا}\,\text{س}}{\text{س}^2 - 9}$

٥ ابحث اتصال كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية على مجالها :

① $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^2 + 1 & \text{، } \text{س} \le 1 \\ 2\,\text{س} & \text{، } \text{س} > 1 \end{cases}$

② $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^2 & \text{، } \text{س} < 3 \\ 5\,\text{س} - 4 & \text{، } \text{س} \ge 3 \end{cases}$

③ $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^2 - 2\,\text{س} + 2 & \text{، } \text{س} \le 2 \\ 2 & \text{، } 2 < \text{س} \le 4 \\ 6 - \text{س}^2 & \text{، } \text{س} > 4 \end{cases}$

④ $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} 1 + \text{جا}\,\text{س} & \text{حيث } 0 \le \text{س} \le \frac{\pi}{2} \\ 1 - \text{جتا}\,2\,\text{س} & \text{حيث } \text{س} > \frac{\pi}{2} \end{cases}$

⑤ $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{جا}\,\text{س} & \text{، } -\frac{\pi}{4} \le \text{س} < \frac{3\pi}{4} \\ \text{جتا}\,\text{س} & \text{، } \frac{3\pi}{4} \le \text{س} \le 2\pi \end{cases}$

⑥ $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \frac{\text{س}\,\text{ظا}\,\text{س} + \text{جا}^2\,2\,\text{س}}{5\,\text{س}^2} & \text{، } -\frac{\pi}{4} < \text{س} < 0 \\ 2\,\text{جتا}\,2\,\text{س} & \text{، } 0 \le \text{س} < \frac{\pi}{4} \end{cases}$

⑦ $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \frac{(\text{س} + 3)^4 - 81}{\text{س}} & \text{عندما } \text{س} \ne 0 \\ 108 & \text{عندما } \text{س} = 0 \end{cases}$

⑧ $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} 5 - \text{س}\,|\text{س}| & \text{، } \text{س} \le 0 \\ \frac{|\text{س}|}{\text{س}} + 4 & \text{، } \text{س} > 0 \end{cases}$

٦ إذا كانت الدالة د : $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \frac{\text{س} + \text{جا}\,2\,\text{س}}{\text{جا}\,\frac{1}{2}\,\text{س}} & \text{، } -\pi \le \text{س} < 0 \\ \text{س} + \text{ك} & \text{، } 0 \le \text{س} \le \pi \end{cases}$ متصلة في الفترة $[-\pi ، \pi]$

فأوجد قيمة : ك

٦

٧ إذا كانت الدالة د : $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} 4\,\text{س} & \text{، } \text{س} \le -1 \\ \text{أ}\,\text{س} + \text{ب} & \text{، } -1 < \text{س} < 2 \\ -2\,\text{س} & \text{، } \text{س} \ge 2 \end{cases}$ متصلة على ح

فما قيمة كل من : أ ، ب ؟

$-\frac{1}{2}$ ، $-\frac{9}{2}$

٨ إذا كانت د : $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \frac{\sqrt{\text{س} - \text{أ}} - 1}{\sqrt{\text{س}} - 3} & \text{، } \text{س} \ne 9 \\ \text{س} - \text{ب} & \text{، } \text{س} = 9 \end{cases}$ متصلة على ح

فما قيمة كل من : أ ، ب الحقيقية ؟

٨ ، ٦

ثالثاً مسائل تقيس مهارات التفكير

١ ابحث اتصال كل من الدالتين المعرفتين بالقاعدتين الآتيتين على مجالها :

① $د(س) = \begin{cases} |س - ١| + ٢س & ، س \leq ٢ \\ ٤س - س^٢ & ، س > ٢ \end{cases}$

② $د(س) = \begin{cases} \sqrt{٤ - س^٢} & ، |س| \leq ٢ \\ س^٢ + ٢س & ، |س| > ٢ \end{cases}$

٢ أوجد قيمة أ التى تجعل الدالة د : $د(س) = \dfrac{س + ٣}{س^٢ + أس + ٩}$ متصلة على ع]-٦ ، ٦[

٣ أوجد قيمة أ التى تجعل الدالة د : $د(س) = \dfrac{٢س + ١}{س^٢ + ٦س + أ}$ متصلة على ع]٩ ، ∞[

٤ إذا كانت : $د(س) = \begin{cases} -س & ، س < ٠ \\ ١ & ، س \geq ٠ \end{cases}$ ، $ر(س) = \begin{cases} ١ & ، س < ٠ \\ س & ، س \geq ٠ \end{cases}$

أثبت أن : د ، ر غير متصلة عند س = ٠ بينما الضرب (د . ر) متصلة عند س = صفر

٥ إذا كانت : $د(س) = \begin{cases} -١ & ، س \neq ٤ \\ ١ & ، س = ٤ \end{cases}$ ، $ر(س) = \begin{cases} ٤س - ١٠ & ، س \neq ٤ \\ -٦ & ، س = ٤ \end{cases}$

فابحث اتصال كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية عند س = ٤

① د (س)
② ر (س)
③ د (س) . ر (س)
④ |د (س)|
⑤ ر (س) - ٦ د (س)
⑥ ر (د (س))

الوحدة 4

حساب المثلثات

دروس الوحدة

مراجعة على أهم القوانين التى سبقت دراستها.

الدرس 1 قانون الجيب «قاعدة الجيب».
الدرس 2 قانون جيب التمام «قاعدة جيب التمام».
الدرس 3 حل المثلث.

فى نهاية الوحدة : تطبيقات حياتية على الوحدة الرابعة.

مراجعة على أهم القوانين التى سبقت دراستها

القياس الدائرى والقياس الستينى لزاوية

• القياس الدائرى لزاوية مركزية فى دائرة

$$= \frac{\text{طول القوس الذى تحصره هذه الزاوية}}{\text{طول نصف قطر هذه الدائرة}}$$

أى أن $\theta^{ء} = \frac{ل}{نق}$ ومنها $ل = \theta^{ء}\ نق$ ، $نق = \frac{ل}{\theta^{ء}}$

لاحظ أن

π بالتقدير الدائرى تكافئ ١٨٠° بالتقدير الستينى.

• التحويل بين القياس الدائرى والقياس الستينى :

$\frac{س^{\circ}}{١٨٠^{\circ}} = \frac{\theta^{ء}}{\pi}$ ومنها $\theta^{ء} = س^{\circ} \times \frac{\pi}{١٨٠^{\circ}}$ ، $س^{\circ} = \theta^{ء} \times \frac{١٨٠^{\circ}}{\pi}$

العلاقات الأساسية بين الدوال المثلثية

١ $جتا^{٢}\theta + جا^{٢}\theta = ١$

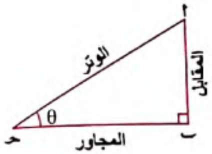
٢ $١ + ظا^{٢}\theta = قا^{٢}\theta$

٣ $١ + ظتا^{٢}\theta = قتا^{٢}\theta$

٤ $جا\theta\ قتا\theta = ١$ ، $جتا\theta\ قا\theta = ١$ ، $ظا\theta\ ظتا\theta = ١$

٥ $ظا\theta = \frac{جا\theta}{جتا\theta}$ ، $ظتا\theta = \frac{جتا\theta}{جا\theta}$

• ينبغى تذكر العلاقات الآتية :



١ $جا\theta = \frac{المقابل}{الوتر} = \frac{أب}{أجـ}$

٢ $جتا\theta = \frac{المجاور}{الوتر} = \frac{بجـ}{أجـ}$

٣ $ظا\theta = \frac{المقابل}{المجاور} = \frac{أب}{بجـ}$

٤ إذا كان الضلع النهائى للزاوية الموجهة التى قياسها θ فى وضعها القياسى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة (س ، ص)

فإن : $س = جتا\theta$ ، $ص = جا\theta$ ، $س^{٢} + ص^{٢} = ١$

٥ العلاقات بين الدوال المثلثية للزوايا المنتسبة

هى متطابقات ويمكن أن نتذكرها من الشكل المقابل

فمثلًا :

$جا(٩٠^{\circ} + \theta) = جتا\theta$

، $ظا(٣٦٠^{\circ} - \theta) = -ظا\theta$

، ..... كل منهما متطابقة مثلثية.

مساحات بعض الأشكال الهندسية

* مساحة المثلث أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ أَ بَ جا جـ = $\frac{١}{٢}$ بَ جـَ جا أ = $\frac{١}{٢}$ أَ جـَ جا ب
* مساحة المثلث أ ب جـ = $\sqrt{ع(ع - أ)(ع - ب)(ع - جـ)}$ حيث $ع = \frac{أ + ب + جـ}{٢}$
* مساحة الشكل الرباعى = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب طولى قطريه × جيب الزاوية المحصورة بينهما
* مساحة المضلع المنتظم الذى عدد أضلاعه ن وطول ضلعه س سم = $\frac{ن}{٤} س^{٢}\ ظتا \frac{\pi}{ن}$
* مساحة الدائرة = $\pi\ نق^{٢}$ ، محيط الدائرة = ٢ π نق
* مساحة القطاع الدائرى = $\frac{١}{٢}$ ل نق = $\frac{١}{٢} \theta^{ء}\ نق^{٢}$ ، محيط القطاع = ٢ نق + ل
* مساحة القطعة الدائرية = $\frac{١}{٢} نق^{٢} (\theta^{ء} - جا\theta)$

الدرس 1 — قانون الجيب (قاعدة الجيب)

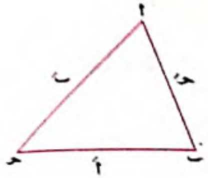
«فى أى مثلث تتناسب أطوال أضلاع المثلث مع جيوب الزوايا المقابلة لها».

أى أنه فى أى مثلث ا ب حـ يكون : $\dfrac{\text{أ}}{\text{جا ا}} = \dfrac{\text{ب}}{\text{جا ب}} = \dfrac{\text{حـ}}{\text{جا حـ}}$

حيث إن الرموز ا ، ب ، حـ تعبر عن قياسات زوايا Δ ا ب حـ

كما أن الرموز أ ، ب ، حـ تعبر عن أطوال الأضلاع $\overline{\text{ب حـ}}$ ، $\overline{\text{ا حـ}}$ ، $\overline{\text{ا ب}}$ على الترتيب.

البرهان



∵ مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب طولى ضلعين فيه

× جيب الزاوية المحصورة بينهما.

∴ مساحة Δ ا ب حـ = $\frac{1}{2}$ أ حـ جا ب (١)

= $\frac{1}{2}$ حـ ب جا ا (٢)

= $\frac{1}{2}$ أ ب جا حـ (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) : ∴ حـ ب جا ا = أ حـ جا ب = أ ب جا حـ

وبالقسمة على أ ب حـ : ∴ $\dfrac{\text{جا ا}}{\text{أ}} = \dfrac{\text{جا ب}}{\text{ب}} = \dfrac{\text{جا حـ}}{\text{حـ}}$

∴ $\dfrac{\text{أ}}{\text{جا ا}} = \dfrac{\text{ب}}{\text{جا ب}} = \dfrac{\text{حـ}}{\text{جا حـ}}$ (وهو المطلوب)

برهان آخر

أولاً : إذا كان Δ ا ب حـ حاد الزوايا :

نرسم $\overline{\text{اء}} \perp \overline{\text{ب حـ}}$ ، $\overline{\text{ب هـ}} \perp \overline{\text{ا حـ}}$

فى Δ ا ء ب : $\dfrac{\text{اء}}{\text{اب}}$ = جا ب ∴ اء = ا ب جا ب = حـ جا ب

، فى Δ ا ء حـ : $\dfrac{\text{اء}}{\text{احـ}}$ = جا حـ ∴ اء = ا حـ جا حـ = ب جا حـ

∴ حـ جا ب = ب جا حـ ∴ $\boxed{\dfrac{\text{ب}}{\text{جا ب}} = \dfrac{\text{حـ}}{\text{جا حـ}}}$ (١)

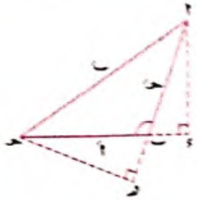
، وبالمثل فى Δ ب هـ ا : $\dfrac{\text{ب هـ}}{\text{ا ب}}$ = جا ا ∴ ب هـ = ا ب جا ا = حـ جا ا

، فى Δ ب هـ حـ : $\dfrac{\text{ب هـ}}{\text{ب حـ}}$ = جا حـ ∴ ب هـ = ب حـ جا حـ = أ جا حـ

∴ حـ جا ا = أ جا حـ ∴ $\boxed{\dfrac{\text{أ}}{\text{جا ا}} = \dfrac{\text{حـ}}{\text{جا حـ}}}$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ $\dfrac{\text{أ}}{\text{جا ا}} = \dfrac{\text{ب}}{\text{جا ب}} = \dfrac{\text{حـ}}{\text{جا حـ}}$ (وهو المطلوب)

ثانيًا : إذا كان Δ ا ب حـ منفرج الزاوية فى ب :



نرسم $\overline{\text{اء}} \perp \overleftrightarrow{\text{حـ ب}}$ ، $\overline{\text{حـ هـ}} \perp \overleftrightarrow{\text{ا ب}}$

فى Δ ا ء ب : $\dfrac{\text{اء}}{\text{اب}}$ = جا ($\angle$ ا ب ء)

∴ اء = ا ب جا (١٨٠° − ب) = حـ جا ب

، فى Δ ا ء حـ : $\dfrac{\text{اء}}{\text{احـ}}$ = جا حـ ∴ اء = ا حـ جا حـ = ب جا حـ

∴ حـ جا ب = ب جا حـ ∴ $\boxed{\dfrac{\text{ب}}{\text{جا ب}} = \dfrac{\text{حـ}}{\text{جا حـ}}}$ (١)

، فى Δ حـ هـ ب : $\dfrac{\text{حـ هـ}}{\text{ب حـ}}$ = جا ($\angle$ حـ ب هـ)

∴ حـ هـ = ب حـ جا (١٨٠° − ب) = أ جا ب

، فى Δ حـ هـ ا : $\dfrac{\text{حـ هـ}}{\text{ا حـ}}$ = جا ا ∴ حـ هـ = ب جا ا

∴ أ جا ب = ب جا ا ∴ $\boxed{\dfrac{\text{أ}}{\text{جا ا}} = \dfrac{\text{ب}}{\text{جا ب}}}$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ $\dfrac{\text{أ}}{\text{جا ا}} = \dfrac{\text{ب}}{\text{جا ب}} = \dfrac{\text{حـ}}{\text{جا حـ}}$ (وهو المطلوب)

* لاحظ أن قانون الجيب صحيح أيضًا فى حالة المثلث القائم الزاوية.

مثال ١

فى Δ أ ب حـ إذا كان : أ = ١٠ سم ، ق(∠أ) = ٣٠° ، ق(∠ب) = ٤٥°

فأوجد مستخدمًا حاسبة الجيب كلاً من : ب ، حـ لرقم عشرى واحد وكذلك مساحة Δ أ ب حـ لأقرب عدد صحيح.

الحل

∵ ق(∠حـ) = ١٨٠° − (٣٠° + ٤٥°) = ١٠٥°

∴ $\frac{أ}{جا أ} = \frac{ب}{جا ب} = \frac{حـ}{جا حـ}$ ∴ $\frac{١٠}{جا ٣٠°} = \frac{ب}{جا ٤٥°} = \frac{حـ}{جا ١٠٥°}$

∴ ب = $\frac{١٠ جا ٤٥°}{جا ٣٠°}$ ≈ ١٤,١ سم ، حـ = $\frac{١٠ جا ١٠٥°}{جا ٣٠°}$ ≈ ١٩,٣ سم

، مساحة Δ أ ب حـ = $\frac{١}{٢}$ ب حـ جا أ = $\frac{١}{٢}$ × ١٤,١ × ١٩,٣ جا ٣٠° ≈ ٦٨ سم²

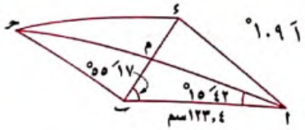
مثال ٢

أ ب حـ ء متوازى أضلاع فيه : أ ب = ١٢٣,٤ سم ، القطران $\overline{أحـ}$ ، $\overline{ب ء}$

يصنعان مع الضلع $\overline{أب}$ زاويتين قياساهما ٤٢° ١٥َ ، ١٧° ٥٥َ على الترتيب أوجد :

[١] طول كل من القطرين $\overline{ب ء}$ ، $\overline{أحـ}$ [٢] مساحة متوازى الأضلاع أ ب حـ ء

الحل



نفرض أن : $\overline{أحـ}$ ∩ $\overline{ب ء}$ = {م}

∴ فى Δ م أ ب : ق(∠أ م ب) = ١٨٠° − (٤٢° ١٥َ + ١٧° ٥٥َ) = ١٠٩° ٦َ

∴ $\frac{١٢٣,٤}{جا ١٠٩° ٦َ} = \frac{ب م}{جا ٤٢° ١٥َ} = \frac{أ م}{جا ١٧° ٥٥َ}$

∴ ب م = $\frac{١٢٣,٤ جا ٤٢° ١٥َ}{جا ١٠٩° ٦َ}$ ≈ ٣٥,٣ سم ∴ ب ء = ٢ ب م = ٧٠,٦ سم

، أ م = $\frac{١٢٣,٤ جا ١٧° ٥٥َ}{جا ١٠٩° ٦َ}$ ≈ ١٠٧,٣ سم ∴ أ حـ = ٢ أ م = ٢١٤,٦ سم

، مساحة ▱ أ ب حـ ء = ٤ مساحة Δ م أ ب = ٤ × $\frac{١}{٢}$ × ب م × أ م جا (∠أ م ب)

= ٤ × $\frac{١}{٢}$ × ٣٥,٣ × ١٠٧,٣ جا ١٠٩° ٦َ ≈ ٧١٦٢ سم²

مثال ٣

أ ب حـ مثلث فيه : ٢ جا أ = ٤ جا ب = ٢ جا حـ أوجد أطوال أضلاعه إذا علم أن محيطه = ٣٩ سم

الحل

∵ ٣ جا أ = ٤ جا ب = ٢ جا حـ وبالقسمة على ١٢ ∴ $\frac{جا أ}{٤} = \frac{جا ب}{٣} = \frac{جا حـ}{٦}$

∴ $\frac{٤}{جا أ} = \frac{٣}{جا ب} = \frac{٦}{جا حـ}$ ∴ أ : ب : حـ = ٤ : ٣ : ٦

بفرض أن : أ = ٤ ك ، ب = ٣ ك ، حـ = ٦ ك

، ∵ محيط المثلث = ٣٩ سم

∴ ٤ ك + ٣ ك + ٦ ك = ٣٩

∴ ١٣ ك = ٣٩

∴ ك = ٣

∴ أ = ١٢ سم ، ب = ٩ سم ، حـ = ١٨ سم

مثال ٤

إذا كان محيط Δ أ ب حـ يساوى ٢٤ سم ، ق(∠ب) = ٣٠° ، ق(∠حـ) = ٤٨° أوجد : ب

الحل

∵ ق(∠أ) = ١٨٠° − (٣٠° + ٤٨°) = ١٠٢°

∴ $\frac{أ}{جا أ} = \frac{ب}{جا ب} = \frac{حـ}{جا حـ}$ ∴ $\frac{أ}{جا ١٠٢°} = \frac{ب}{جا ٣٠°} = \frac{حـ}{جا ٤٨°}$

∵ $\frac{\text{مجموع المقدمات}}{\text{مجموع التوالى}}$ = إحدى النسب ∴ $\frac{أ + ب + حـ}{جا ١٠٢° + جا ٣٠° + جا ٤٨°} = \frac{ب}{جا ٣٠°}$

∴ $\frac{٢٤}{جا ١٠٢° + جا ٣٠° + جا ٤٨°} = \frac{ب}{جا ٣٠°}$ ∴ ب = $\frac{٢٤ جا ٣٠°}{جا ١٠٢° + جا ٣٠° + جا ٤٨°}$ ≈ ٥,٤ سم

تمرين مشهور

فى أى مثلث أ ب حـ يكون : $\frac{أ}{جا أ} = \frac{ب}{جا ب} = \frac{حـ}{جا حـ}$ = ٢ نق

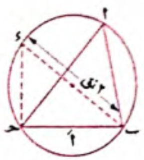
حيث نق طول نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث أ ب حـ

البرهان

نرسم الدائرة التى تمر برؤوس Δ أ ب حـ

ثم نرسم القطر $\overline{ب ء}$ والوتر $\overline{حـ ء}$

[١] إذا كان Δ أ ب حـ حاد الزوايا :



فيكون ق(∠ب حـ ء) = ٩٠° (محيطية مرسومة فى نصف دائرة)

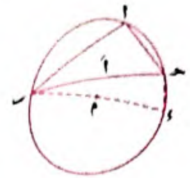
، ق(∠أ) = ق(∠ء) (محيطيتان تحصران $\overset{\frown}{ب حـ}$)

فى Δ ء ب حـ : جا ء = $\frac{أ}{ب ء} = \frac{أ}{٢ نق}$

∴ جا أ = $\frac{أ}{٢ نق}$

∴ $\frac{أ}{جا أ}$ = ٢ نق وبطريقة مماثلة يمكن إثبات أن : $\frac{ب}{جا ب}$ = ٢ نق ، $\frac{حـ}{جا حـ}$ = ٢ نق

∴ $\frac{أ}{جا أ} = \frac{ب}{جا ب} = \frac{حـ}{جا حـ}$ = ٢ نق (وهو المطلوب)



[٢] إذا كان Δ أ ب حـ منفرج الزاوية :

فيكون : ق(∠ ب ء حـ) = ١٨٠° − ق(∠ أ)

∴ جا(١٨٠° − أ) = $\frac{\text{ب حـ}}{\text{ب ء}}$ ∴ جا أ = $\frac{\text{أ}}{\text{٢ نق}}$

∴ $\frac{\text{أ}}{\text{جا أ}}$ = ٢ نق

∴ $\frac{\text{أ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ب}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{حـ}}{\text{جا حـ}}$ = ٢ نق (وهو المطلوب)

مثال ٥

فى Δ أ ب حـ إذا كان : ب = ٧ سم ، ق(∠ ب) = ٣٠° ، حـ = ٩ سم

احسب طول نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث أ ب حـ واحسب أيضًا ق(∠ أ) لأقرب درجة.

الحـــل

∵ $\frac{\text{ب}}{\text{جا ب}}$ = ٢ نق ∴ $\frac{٧}{\text{جا ٣٠°}}$ = ٢ نق

∴ نق = $\frac{٧}{\text{٢ جا ٣٠°}}$ = ٧ سم

، ∵ $\frac{\text{حـ}}{\text{جا حـ}}$ = ٢ نق ∴ $\frac{٩}{\text{جا حـ}}$ = ١٤

∴ جا حـ = $\frac{٩}{١٤}$

∴ ق(∠ حـ) ≈ ٤٠° ∴ ق(∠ أ) = ١٨٠° − (٣٠° + ٤٠°) = ١١٠°

أ، ق(∠ حـ) ≈ ١٤٠° ∴ ق(∠ أ) = ١٨٠° − (٣٠° + ١٤٠°) = ١٠°

> **لاحـظ أنه**
> يوجد مثلثان يحققان هذه المعطيات وهذه الحالة تعرف بالحالة المبهمة وسوف ندرسها بالتفصيل فى درس حل المثلث.

مثال ٦

فى أى مثلث أ ب حـ

أثبت أن : مساحة Δ أ ب حـ = ٢ نق^{٢} جا أ جا ب جا حـ

حيث نق طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب حـ

الحـــل

∵ مساحة Δ أ ب حـ = $\frac{١}{٢}$ ب حـ جا أ حيث ب = ٢ نق جا ب ، حـ = ٢ نق جا حـ

∴ مساحة Δ أ ب حـ = $\frac{١}{٢}$ × ٢ نق جا ب × ٢ نق جا حـ × جا أ

= ٢ نق^{٢} جا أ جا ب جا حـ

اختبر نفسك

• فهم ○ تطبيق ⁂ مستويات عليا 📖 من أسئلة الكتاب المدرسى

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① فى أى مثلث س ص ع يكون : س ص : ص ع = ...

(أ) جا س : جا ص (ب) جا ص : جا ع (جـ) جا ع : جا س (د) جا ع : جا ص

② فى Δ أ ب حـ إذا كان : ق(∠ أ) = ٣٠° ، حـ = ١٥ $\sqrt{٣}$ سم ، ق(∠ حـ) = ٦٠°

فإن : أ = ... سم

(أ) ٣٠ (ب) ٤٥ (جـ) ١٥ (د) ٦٠

③ فى المثلث ء هـ و الذى فيه : ق(∠ ء) = ٨٠° ، ق(∠ هـ) = ٦٠° إذا كان : و = ١٢ سم

فإن : ء = ... سم

(أ) $\frac{\text{١٢ جا ٨٠°}}{\text{جا ٤٠°}}$ (ب) $\frac{\text{١٢ جا ٨٠°}}{\text{جا ٦٠°}}$ (جـ) $\frac{\text{١٢ جا ٤٠°}}{\text{جا ٨٠°}}$ (د) $\frac{\text{١٢ ظا ٨٠°}}{\text{ظا ٤٠°}}$

④ فى Δ أ ب حـ : إذا كان : أ = ٤ سم ، ب = ٧ سم ، ق(∠ حـ) = ١٢٠°

فإن مساحة المثلث = ... سم^{٢}

(أ) ٧ $\sqrt{٣}$ (ب) ١٤ $\sqrt{٣}$ (جـ) ٧ (د) ١٤

⑤ 📖 س ص ع مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ١٠ $\sqrt{٣}$ سم فإن طول قطر الدائرة الخارجة لهذا المثلث يساوى .... سم

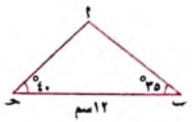
(أ) ٥ (ب) ١٠ (جـ) ١٥ (د) ٢٠

⑥ Δ س ص ع فيه : $\frac{\text{س}}{\text{جا س}}$ = ٦ فإن طول قطر الدائرة المارة برؤوسه = ... وحدة طول.

(أ) ٦ (ب) ١٢ (جـ) ٣ (د) ٩

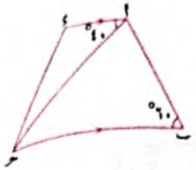
⑦ فى الشكل المقابل :

طول $\overline{\text{أ ب}}$ ≃ .... سم



(أ) ٦ (ب) ٧ (جـ) ٨ (د) ٩

(٨) في الشكل المقابل :



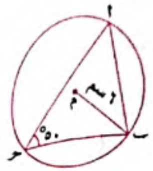
$\overline{أ د}$ // $\overline{ب ح}$ ، أ ب = ٤ سم

، ق(∠د أ ح) = ٤٠° ، ق(∠ب) = ٦٠°

فإن : طول $\overline{أ ح}$ = ... سم

(أ) ٥ (ب) ٣ (ج) ٢ (د) ٤

(٩) في الشكل المقابل دائرة مركزها م ، إذا كان : ب م = ٦ سم



فإن : أ ب = ... سم

(أ) ٦ جا ٥٠° (ب) ١٢ جا ٥٠°

(ج) ٦ جتا ٥٠° (د) ١٢ جتا ٥٠°

(١٠) دائرة طول قطرها ٢٠ سم ، تمر برؤوس Δ أ ب ح الحاد الزوايا الذي فيه : ب ح = ١٠ سم

فإن : ق(∠أ) = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (ج) ٤٥° (د) ١٥٠°

(١١) أ ب ح مثلث فيه : ق(∠أ) = ٤٥° وطول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه = ٦ سم

فإن : أ = ... سم

(أ) ١٣ (ب) ٦√٢ (ج) ١٢ (د) ٣√٢

(١٢) إذا كان طول ضلع ما في أي مثلث = ١٢ سم ، وقياس الزاوية المقابلة لهذا الضلع = ٥٥°

فإن محيط الدائرة المارة برؤوس هذا المثلث ≈ .... سم

(أ) ٣٦ (ب) ٤٢ (ج) ٤٦ (د) ٥٢

(١٣) إذا كان محيط المثلث أ ب ح يساوي ١٥ سم ، ق(∠أ) = ٥٣° ، ق(∠ب) = ٤٧°

فإن : طول $\overline{أ ب}$ ≈ .... سم

(أ) ٦ (ب) ٧ (ج) ٥ (د) ٨

(١٤) أ ب ح مثلث فيه : أ = ٢٧ سم ، ق(∠ب) = ٨٢° ، ق(∠ح) = ٥٦°

فإن مساحة سطحه ≈ .... سم²

(أ) ٥٤٠ (ب) ٤٤٧ (ج) ٣٥٠ (د) ٤٠٠

(١٥) مثلث أ ب ح فيه ق(∠أ) : ق(∠ب) : ق(∠ح) = ٢ : ٣ : ٤ ، أ ب = ١٢ سم

فإن : طول $\overline{أ ح}$ ≈ .... سم

(أ) ١٠ (ب) ١١ (ج) ١٦ (د) ١٨

(١٦) في المثلث أ ب ح أي من العبارات التالية صحيحة ؟

(أ) جا أ + جتا ب = أ + ب

(ب) أ جا ب = ب جا أ

(ج) أ = ب جا ح

(د) أ / جا أ = جا ب / ب

(١٧) في Δ س ص ع يكون المقدار : ٢ نق جا س = ... ، حيث نق طول نصف قطر الدائرة الخارجة له.

(أ) عَ

(ب) صَ

(ج) سَ

(د) مساحة Δ س ص ع

(١٨) إذا كان نق طول نصف قطر الدائرة الخارجة عن المثلث س ص ع فإن : صَ / (٢ جا ص) = ...

(أ) نق (ب) ٢ نق (ج) ½ نق (د) ٤ نق

(١٩) إذا كان المثلث أ ب ح حاد الزوايا وكان ٢ أ = بَ / جا ب فإن : ق(∠أ) = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (ج) ٦٠° (د) ٧٥°

(٢٠) إذا كان : أ ب ح مثلث فيه : جا أ = ٢ جا ح ، ب ح = ٦ سم فإن : أ ب = ... سم

(أ) ٢ (ب) ٣ (ج) ٤ (د) ٦

(٢١) إذا كان طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب ح يساوي ٣ سم

وكان : جا أ + جا ب + جا ح = ٢ فإن محيط المثلث أ ب ح = ... سم

(أ) ٦ (ب) ٩ (ج) ١٢ (د) ٢٤

(٢٢) أ ب ح مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه ٦ سم وكانت مساحة الدائرة المارة برؤوسه تساوي ك π سم²

فإن : ك = ...

(أ) ٢√٣ (ب) ٨√٣ (ج) ١٢ (د) ٢٤

(٢٣) في أي مثلث أ ب ح يكون جا (أ + ب) / (جا أ + جا ب) = ...

(أ) ١ (ب) حَ / (أَ + بَ) (ج) أَ / (بَ + حَ) (د) بَ / (أَ + حَ)

(٢٤) في Δ أ ب ح يكون : أَ / (أَ + بَ) = جا أ / ....

(أ) جا ب (ب) جا ح (ج) جا أ + جا ب (د) جا أ + جا ح

(٢٥) في Δ س ص ع : إذا كان ٢ جا س = ٤ جا ص = ٢ جا ع فإن سَ : صَ : عَ = ...

(أ) ٢ : ٣ : ٤ (ب) ٦ : ٤ : ٣ (ج) ٢ : ٤ : ٦ (د) ٤ : ٣ : ٦

(٢٦) أ ب ح مثلث فيه : جا أ / ٣ = ٢ جا ب / ٥ = جا ح / ٤ فإن : أَ : بَ : حَ = ...

(أ) ٦ : ٥ : ٨ (ب) ٨ : ٥ : ٦ (ج) ٧ : ٢ : ٤ (د) ٣ : ٥ : ٤

(٢٧) فى Δ أ ب حـ إذا كان $\frac{\text{حا أ}}{٤} = \frac{\text{حا ب}}{٦} = \frac{\text{حا حـ}}{٧}$ فإن أكبر زاوية قياسًا تكون

(أ) ∠ أ (ب) ∠ ب (جـ) ∠ حـ (د) قائمة

(٢٨) إذا كان أ ب حـ مثلث فيه ق(∠ أ) : ق(∠ ب) : ق(∠ حـ) = ٢ : ٥ : ٤

فإن حـَ : أَ = ...

(أ) $\sqrt{٦}$: ٢ (ب) ٢ : ٣ (جـ) ٤ : ٣ (د) ٣ : ٢

(٢٩) فى أى مثلث أ ب حـ يكون $\frac{أ}{ب} \times \frac{\text{حا ب}}{\text{حا أ}}$ =

(أ) $\frac{حـ}{\text{حا حـ}}$ (ب) $\frac{\text{حا حـ}}{حـ}$ (جـ) ٤ نق² (د) ١

(٣٠) فى Δ أ ب حـ إذا كان نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث = ٤ سم

فإن $\frac{أ + ب + حـ}{\text{حا أ} + \text{حا ب} + \text{حا حـ}}$ = ...

(أ) ٤ (ب) ٢ (جـ) ٨ (د) ١٦

(٣١) إذا كان أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب وكان بَ = ١٠ سم فإن : $\frac{أ}{\text{حا أ}} + \frac{حـ}{\text{حا حـ}}$ = ... سم

(أ) ١٠ (ب) ٢٠ (جـ) ٤٠ (د) ١٠٠

(٣٢) إذا كان نصف قطر الدائرة المارة برؤوس Δ أ ب حـ يساوى نق

فإن محيط المثلث = ... (حا أ + حا ب + حا حـ)

(أ) نق (ب) ٢ نق (جـ) ٤ نق² (د) ٨ نق²

(٣٣) إذا كان أ ب حـ مثلث فيه . أَ - بَ = ٤ سم ، حا أ = $\frac{٣}{٢}$ حا ب فإن : أَ = ... سم

(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ١٢

(٣٤) إذا كان أ ب حـ مثلث محيطه ٢٤ سم وكان : حا أ + حا ب = ٣ حا حـ فإن : حـَ = ... سم

(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ٩

(٣٥) أ ب حـ مثلث فيه حا ب + حا حـ = ٤ حا أ وكان بَ + حـَ = ٢ أَ + ١٠ سم

فإن : أَ = ... سم

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

(٣٦) أ ب حـ مثلث فيه : أ ب = ٨ سم ، ب حـ = ١٢ سم ، ق(∠ أ) - ق(∠ حـ) = ٩٠°

فإن : طا حـ = ...

(أ) $\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{٤}{٣}$

(٣٧) إذا كان نق طول نصف قطر الدائرة الخارجة عن المثلث أ ب حـ وكان أَ = نق

فإن : ق(∠ أ) = ...

(أ) ٣٠° فقط. (ب) ٣٠° أ، ١٢٠° (جـ) ١٥٠° فقط. (د) ٣٠° أ، ١٥٠°

(٣٨) إذا كانت مساحة المثلث أ ب حـ هى Δ ، نق طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه

فإن : $\frac{٤ \text{ نق } Δ}{أَ بَ حـَ}$ =

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) $\frac{١}{٢}$

(٣٩) فى Δ أ ب حـ يكون $\frac{٢ ب}{\text{حا ب}}$ = ... نق حيث نق طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) ٨

(٤٠) أ ب حـ مثلث فيه بَ = ١٢ سم ، نق هو طول نصف قطر الدائرة الخارجة عن المثلث

فإن مساحة المثلث = ... سم²

(أ) $\frac{٢ أ حـ}{نق}$ (ب) $\frac{٣ أ حـ}{نق}$ (جـ) $\frac{٤ أ حـ}{نق}$ (د) $\frac{٦ أ حـ}{نق}$

(٤١) إذا كان المثلث أ ب حـ قائم الزاوية ومتساوى الساقين ، نق طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه

فإن مساحة Δ أ ب حـ = ... (بدلالة نق)

(أ) $\frac{١}{٢}$ نق² (ب) ٢ نق² (جـ) نق² (د) ٤ نق²

(٤٢) فى الشكل المقابل :

إذا كان محيط Δ أ ب حـ = ٢٠ سم

فإن طول قطر الدائرة المارة برؤوسه = ... سم

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

(٤٣) إذا كان أ ب حـ مثلث فيه : جتا (ب + حـ) = $\frac{٣}{٥}$ ، ب حـ = ٨ سم

فإن طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس Δ أ ب حـ = ... سم

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٨ (د) ١٠

(٤٤) مثلث مساحته = $\frac{أَ^٢ \text{ حا ب حا حـ}}{ك \text{ حا أ}}$ فإن : ك = ... ، ك ≠ ٠

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٤٥) إذا كان نق نصف قطر الدائرة الخارجة عن المثلث أ ب حـ وكان : أَ = $\frac{١}{٢}$ نق

فإن : ق(∠ أ) = ... حيث أ زاوية حادة.

(أ) حا⁻¹ (١) (ب) حا⁻¹ (٢) (جـ) حا⁻¹ $(\frac{١}{٢})$ (د) حا⁻¹ $(\frac{١}{٤})$

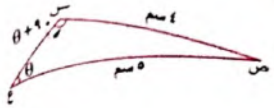
(٤٦) إذا كانت Δ هى مساحة المثلث س ص ع ، ح هى نصف محيط المثلث س ص ع

فإن : $\frac{٢}{عَ \text{ حا س}} + \frac{٢}{سَ \text{ حا ص}} + \frac{٢}{صَ \text{ حا ع}}$ = ...

(أ) $\frac{ح}{Δ}$ (ب) $\frac{٢ح}{Δ}$ (جـ) $\frac{٣ح}{Δ}$ (د) $\frac{٤ح}{Δ}$

٤٧ في الشكل المقابل :

ظا θ = ...



(أ) ٣/٥ (ب) ٤/٣

(ج) ٥/٤ (د) ٤/٥

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ س ص ع مثلث فيه : ق(∠س) = ٨٠° ، ق(∠ص) = ٦٠° ، ع = ١٠ سم
أوجد كلًا من س ، ص لأقرب سم — ١٥ سم ، ١٣ سم.

٢ 📖 أ ب ج مثلث فيه : ج = ١٩ سم ، ق(∠أ) = ١١٢° ، ق(∠ب) = ٣٢° أوجد ب ثم أوجد طول نصف قطر الدائرة الخارجة عن المثلث أ ب ج لأقرب رقمين عشريين. — ١٨,٠٤ سم ، ١٦,٥٦ سم.

٣ 📖 ل م ن مثلث فيه : م = ٦٨,٤ سم ، ق(∠م) = ١٠٠° ، ق(∠ن) = ٤٠°
أوجد : (١) ل (٢) طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث ل م ن
(٣) مساحة المثلث ل م ن لأقرب سم² — ٤٤,٦٤ سم ، ٣٤,٧٣ سم ، ٩٨١ سم².

٤ ل م ن مثلث فيه : ق(∠ل) = ٥٢° ١٨َ ، ق(∠ن) = ٤٤° ١٧َ ، ن ل = ٣٥ سم
أوجد : (١) طول كل من : م ن ، ل م
(٢) مساحة الدائرة المارة برؤوس المثلث ل م ن — ١٢,٧ سم ، ٢٧,٤ سم ، ١٢٠٨,٧ سم².

٥ أ ب ج مثلث فيه : ب = ١٠ سم ، ق(∠أ) = ٤٠° ، ق(∠ج) = ٨٠°
أوجد طول أكبر الأضلاع طولًا. — ١١ سم.

٦ أ ب ج مثلث فيه : ج = ٤,٥ سم ، ق(∠أ) = ١٠٠° ، ق(∠ب) = ١٥°
أوجد طول أصغر الأضلاع طولًا. — ١,٣ سم.

٧ أ ب ج مثلث فيه : ق(∠أ) = ٦٠° ، أ = ٧√٣ سم أوجد مساحة ومحيط الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب ج (π = ٢٢/٧) — ١٥٤ سم² ، ٤٤ سم.

٨ 📖 أ ب ج مثلث فيه : ق(∠أ) = ٦٠° ، ق(∠ب) = ٤٥°
أثبت أن : أ : ب : ج = √٦ : ٢ : √٣ + ١

٩ أ ب ج مثلث فيه : أ = ١٣ سم ، ق(∠أ) = ٥٣° ٨َ ، ج = ١٥ سم
احسب طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب ج ، احسب ق(∠ج)
٨,١ سم ، ٦٧° ٢٣َ ٩ً أو ١١٢° ٣٦َ ٥١ً.

١٠ أ ب ج مثلث فيه : ق(∠أ) = ٣٥° ، أ = ٨ سم ، ب = ٦ سم أوجد : ق(∠ب) — ٢٥° ٣٨َ ٤٥ً.

١١ 📖 أوجد محيط المثلث أ ب ج الذي فيه ج = ٨,٧ سم ، ق(∠أ) = ٥٧° ١٣َ ، ق(∠ب) = ٦٤° ١٨َ — ٢٦,٥ سم.

١٢ أ ب ج مثلث فيه : ق(∠ب) = ٤٥° ، ق(∠ج) = ٦٠° ، وطول قطر الدائرة المارة برؤوسه = ٤٠ سم
احسب مساحة ومحيط هذا المثلث لأقرب عدد صحيح — ٤٧٣ سم² ، ١٠٢ سم.

١٣ أ ب ج مثلث متساوي الساقين فيه : ق(∠أ) = ١٢٠° ، وطول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه يساوي ١٢ سم أوجد ج ثم احسب مساحة Δ أ ب ج — ١٢ سم ، ٦٢,٤ سم².

١٤ أ ب ج مثلث متساوي الساقين فيه : أ = ب ، ق(∠أ) = ١٥° ، محيطه = ٢٥ سم
أوجد مساحة الدائرة المارة برؤوسه. — ٤٧٤ سم².

١٥ 📖 إذا كان محيط Δ أ ب ج = ٤٠ سم ، ق(∠أ) = ٤٤° ، ق(∠ب) = ٦٦°
فأوجد أطوال أضلاع المثلث أ ب ج — ١٠,٩ سم ، ١٤,٣ سم ، ١٤,٨ سم.

١٦ أ ب ج مثلث فيه : ج = ١٢ سم ، ق(∠ب) = ٢ ق(∠أ) = ٦٠°
أوجد أ ثم أوجد مساحة المثلث لأقرب سم² — ٤,٢ سم ، ٢٢ سم².

١٧ 📖 أ ب ج مثلث مساحة سطحه ٤٥٠ سم² ، ق(∠ب) = ٨٢° ، ق(∠ج) = ٥٦°
فما قيمة أ ؟ — ٢٧ سم.

١٨ أ ب ج مثلث حاد الزوايا فيه : أ ج = ١٢ سم ، جا أ = ٠,٦ ، مساحته تساوي ٤٣,٢ سم²
أوجد طول أ ب ، طول ب ج ، ق(∠ب) — ١٢ سم ، ٧,٦ سم ، ٧١° ٣٤َ.

١٩ أوجد محيط المثلث أ ب ج الحاد الزوايا إذا كان :
أ = ٧ سم ، ب = ٨ سم ، ق(∠أ) = ٦٠° — ٢٠ سم.

٢٠ أ ب ج مثلث قائم الزاوية في ب ، د ∈ ب ج ، د ∉ ب ج بحيث ج د = ٤ سم
، ق(∠أ د ج) = ٤٥° ١٥َ ، ق(∠د أ ج) = ١٨° أوجد طول أ ب لأقرب سم — ٨ سم.

٢١ س ص ع مثلث فيه : ص ع = ١٥ سم ، ق(∠ص) = ٣٠° ، ق(∠ع) = ٧٠°
احسب طول العمود الساقط من س على ص ع — ٧,١٦ سم.

٢٢ أ ب ج مثلث منفرج الزاوية في ج فيه : أ = ٨ سم ، ج = ٢٠ سم ، ظا أ = ١/(٢√٢)
أوجد : ق(∠ج) — ١٢٣° ٣٢َ.

٢٢ أ ب حـ مثلث فيه : ب = ٥ سم ، ظا حـ = $\frac{٤}{٣}$ ، ق (∠ ب) = ٣٠°

أوجد لأقرب سنتيمتر كلاً من أ ، حـ ومساحة المثلث أ ب حـ

«١٠ سم ، ٨ سم ، ٢٠ سم²»

٢٤ س ص ع مثلث فيه : جا س + جا ص + جا ع = ٢,٣٧ ، ومحيطه = ٥٦,٨٨ سم

أوجد طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه.

«١٢ سم»

٢٥ أ ب حـ مثلث فيه : ق (∠ أ) = ٦٠° ، ق (∠ ب) = ٤٥° فإذا كان : أ + ب = ($\sqrt{٦}$ + ٢) سم

فأوجد كلاً من : أ ، ب

«$\sqrt{٦}$ سم ، ٢ سم»

٢٦ أ ب حـ مثلث فيه : جا أ : جا ب : جا حـ = ٢ : ٤ : ٥ ، حـ − ب = ٣ سم

أوجد كلاً من : أ ، ب

«٦ سم ، ١٢ سم»

٢٧ أ ب حـ مثلث فيه : ق (∠ أ) : ق (∠ ب) : ق (∠ حـ) = ٣ : ٤ : ٣

فإذا كان : أ = ٥ سم فأوجد محيط المثلث.

«١٥,٩ سم»

٢٨ أ ب حـ مثلث فيه : ق (∠ أ) : ق (∠ ب) : ق (∠ حـ) = ١ : ٢ : ٥

، فإذا كان محيط المثلث = ١٦ سم فأوجد طول أصغر أضلاع المثلث طولاً.

«٢,٥ سم»

٢٩ أ ب حـ مثلث فيه : ق (∠ أ) = $\frac{٢}{٣}$ ق (∠ ب) = $\frac{١}{٢}$ ق (∠ حـ) ، طول نصف قطر الدائرة المارة

برؤوسه = ١٠ سم أوجد مساحة Δ أ ب حـ

«١١٠ سم²»

٣٠ أ ب حـ مثلث فيه : ٦ جا أ = ٤ جا ب = ٣ جا حـ ، محيطه = ٤٥ سم

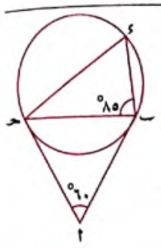
أوجد كلاً من : أ ، حـ

«١٠ سم ، ٢٠ سم»

٣١ فى Δ أ ب حـ إذا كان : $\frac{أ + ب - حـ}{٣} = \frac{أ + حـ - ب}{٥} = \frac{ب + حـ - أ}{٧}$

فأثبت أن : جا أ : جا ب : جا حـ = ٤ : ٥ : ٦

٣٢ فى الشكل المقابل :



أ ب ، أ حـ قطعتان مماستان للدائرة عند ب ، حـ

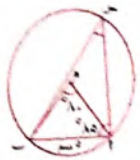
فإذا كان : ق (∠ أ) = ٦٠° ، ق (∠ ء ب حـ) = ٨٥°

، مساحة المثلث أ ب حـ = ٩ $\sqrt{٣}$ سم²

فأوجد لأقرب سنتيمتر محيط المثلث ء ب حـ

«١٧ سم»

٣٣ فى الشكل المقابل :



م دائرة ، أ ب = ٥ سم ، ق (∠ أ م ب) = ٨٠°

، ق (∠ حـ أ ب) = ٨٥°

أوجد : (١) محيط Δ أ ب حـ

(٢) مساحة سطح الدائرة م

«١٩,١٢ سم ، ٤٧,٥ سم²»

٣٤ أ ب حـ ء متوازى أضلاع فيه : ق (∠ أ) = ٥٠° ، ق (∠ ء ب حـ) = ٦٠° ، ب ء = ٨ سم

أوجد محيط متوازى الأضلاع.

«٣٨ سم»

٣٥ أ ب حـ ء متوازى أضلاع فيه : أ ب = ١٨ سم ، ق (∠ حـ أ ب) = ٣٦° ، ق (∠ ء ب أ) = ٤٤°

أوجد طول القطر أ حـ ، ومساحة متوازى الأضلاع.

«٢٥,٣٩ سم ، ٢٦٩ سم²»

٣٦ أ ب حـ ء متوازى أضلاع تقاطع قطراه فى م ، أ حـ = ٢٠ سم ، ق (∠ أ م ء) = ١٣٠°

، ق (∠ حـ أ ب) = ٨٥° أوجد طول ب ء ثم أوجد مساحة متوازى الأضلاع أ ب حـ ء

«٢٨,٢ سم ، ٢١٦ سم²»

٣٧ أ ب حـ ء شبه منحرف فيه : أ ء // ب حـ ، أ ء = ٢٠ سم ، ق (∠ ء) = ١٢٠°

، ق (∠ ب) = ٦٢° ، ق (∠ أ حـ ب) = ٢٥َ ٢٣°

أوجد : (١) طول كل من : أ حـ ، ب حـ لأقرب سم

(٢) مساحة شبه المنحرف أ ب حـ ء لأقرب سم²

«٢٩ سم ، ٢٣ سم ، ٣٠٥ سم²»

٣٨ أ ب حـ ء شكل رباعى فيه : حـ ء = ١٠٠ سم ، ق (∠ ب حـ أ) = ٣٦°

، ق (∠ ب ء أ) = ٥٥° ، ق (∠ ب حـ ء) = ٨٥° ، ق (∠ حـ ء أ) = ٨٧°

أوجد طول كل من : ب ء ، أ حـ لأقرب سنتيمتر

«١١٢ سم ، ١٤٤ سم»

٣٩ إذا كان أ ب حـ ء شكلاً رباعيًا فيه : ق (∠ أ ب حـ) = ٩٠° ، ق (∠ ب أ ء) = ٨٠°

، أ ب = أ ء = ١٠ سم ، ب ء = ب حـ احسب مساحة الشكل أ ب حـ ء

«١٠٢ سم²»

٤٠ فى أى مثلث أ ب حـ :

أثبت أن : (١) $\frac{٣ أ - ٤ ب}{٣ جا أ - ٤ جا ب} = \frac{حـ}{جا حـ}$ (٢) مساحة المثلث = $\frac{أ^{٢} جا ب جا حـ}{٢ جا أ}$

(٣) مساحة المثلث = $\frac{أ ب حـ}{٤ نق}$

حيث نق طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب حـ

ثالثًا / مسائل تقيس مهارات التفكير

1 اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كان طول نصف قطر الدائرة الخارجة عن المثلث ٢ ب حـ يساوى ٣ سم

فإن : $\frac{\text{أَ بَ حَ}}{\text{حا ٢ حا ب حا حـ}}$ = ...

(أ) ٣   (ب) ٦   (جـ) ٢٧   (د) ٢١٦

② إذا كان ٢ ب حـ مثلث فإن : أَ قتا ٢ + بَ قتا ب + حَ قتا حـ = ...

(أ) ٢ نق   (ب) ٤ نق   (جـ) ٦ نق   (د) ٨ نق

③ إذا كان : أَ = حا ب ، بَ = حا حـ ، حَ = حا ٢ فإن محيط الدائرة المارة برؤوس المثلث ٢ ب حـ يساوى ....

(أ) ١   (ب) $\frac{\pi}{٢}$ (جـ) π (د) ٢ π

④ فى Δ ٢ ب حـ : $\frac{\text{أَ حا ٢ + بَ حا ب + حَ حا حـ}}{\text{أَ}^٢ + \text{بَ}^٢ + \text{حَ}^٢}$ = ...

(أ) $\frac{١}{\text{نق}^٢}$ (ب) $\frac{١}{\text{٢ نق}}$ (جـ) ٢ نق   (د) نق^٢

⑤ إذا كان ٢ ب حـ مثلث مساحته ٢٤ سم^٢ وكان طول نصف قطر الدائرة الخارجة عنه ٥ سم

فإن : حا ٢ حا ب حا (٢ + ب) = ...

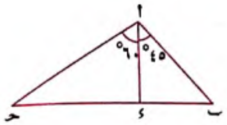
(أ) $\frac{٣}{٢٥}$ (ب) $\frac{٦}{٢٥}$ (جـ) $\frac{٩}{٢٥}$ (د) $\frac{١٢}{٢٥}$

⑥ فى الشكل المقابل :

طا θ = ...

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) ٢   (د) ١

⑦ فى الشكل المقابل :

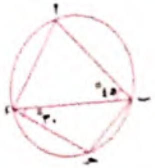


إذا كان : حـ ء = ٢ ء ب

فإن : $\frac{\text{حا ب}}{\text{حا حـ}}$ = ...

(أ) $\sqrt{٦}$ (ب) $\frac{\sqrt{٦}}{٤}$ (جـ) $\frac{\sqrt{٦}}{٣}$ (د) $\frac{٢\sqrt{٦}}{٣}$

⑧ فى الشكل المقابل :



إذا كان : ٢ء = ٤ $\sqrt{٢}$ سم فإن : ب حـ = ... سم

(أ) ٢ $\sqrt{٢}$ (ب) ٤   (جـ) ٤ $\sqrt{٢}$ (د) ٨

⑨ فى الشكل المقابل :

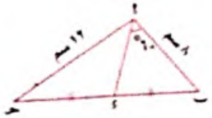
إذا كان : طا (∠ ء هـ حـ) = $\frac{٣}{٤}$

فإن طول نصف قطر الدائرة المارة

برؤوس Δ ٢ ب حـ = ... سم

(أ) ٣   (ب) ٣,٥   (جـ) ٣,٧٥   (د) ٤

⑩ فى الشكل المقابل :



ء منتصف $\overline{\text{ب حـ}}$ ، ق (∠ ب ٢ ء) = °٦٠

فإن : طا (∠ ء ٢ حـ) = ...

(أ) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (ب) $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ (جـ) ١   (د) $\sqrt{٣}$

⑪ فى الشكل المقابل :

مساحة الجزء المظلل ≈ .... سم^٢

(أ) ٤,٣٧   (ب) ٢٦,٢   (جـ) ٤٣,٧   (د) ٥٢,٦

2 إذا كان ٢ ب حـ ء شكلاً رباعيًا دائريًا

أثبت أن : ب حـ × حا (∠ ٢ ب ء) = ٢ء × حا (∠ حـ ء ب)

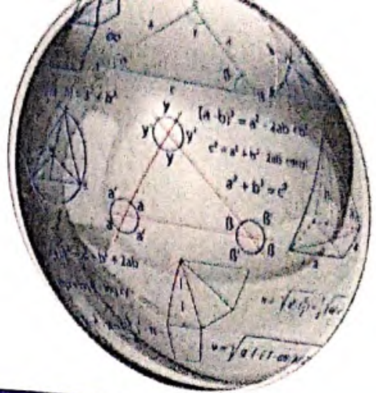
3 فى المثلث ٢ ب حـ :

أثبت أن : ① حا ٢ + حا ب + حا حـ = $\frac{٤ ع Δ}{\text{أَ بَ حَ}}$

② $\frac{١}{\text{حَ حا ٢}} + \frac{١}{\text{أَ حا ب}} + \frac{١}{\text{بَ حا حـ}} = \frac{ع}{Δ}$

حيث ع نصف محيط المثلث ٢ ب حـ ، Δ مساحة المثلث ٢ ب حـ

4 أثبت أن مساحة الدائرة المارة برؤوس المثلث ٢ ب حـ تساوى $\frac{\pi \text{ أَ بَ}}{\text{٤ حا ٢ حا ب}}$



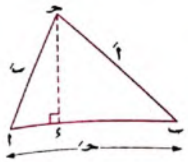
الدرس 2

قانون جيب التمام (قاعدة جيب التمام)

فى أى مثلث أ ب حـ يكون :

القاعدة		الصورة الأخرى
أ^{2} = ب^{2} + حـ^{2} − ٢ ب حـ جتا أ	ومنها	جتا أ = $\frac{ب^{2} + حـ^{2} − أ^{2}}{٢ ب حـ}$
ب^{2} = أ^{2} + حـ^{2} − ٢ أ حـ جتا ب	ومنها	جتا ب = $\frac{أ^{2} + حـ^{2} − ب^{2}}{٢ أ حـ}$
حـ^{2} = أ^{2} + ب^{2} − ٢ أ ب جتا حـ	ومنها	جتا حـ = $\frac{أ^{2} + ب^{2} − حـ^{2}}{٢ أ ب}$
تستخدم هذه القاعدة إذا علم طولا ضلعين فى Δ أ ب حـ وقياس الزاوية المحصورة بينهما.		تستخدم هذه القاعدة إذا علمت أطوال أضلاع Δ أ ب حـ أو النسبة بينها.

البرهان



ليكن المطلوب إثبات أن : أ^{2} = ب^{2} + حـ^{2} − ٢ ب حـ جتا أ

أولاً : إذا كان Δ أ ب حـ حاد الزوايا :

نرسم حـ ء ⊥ أ ب يقطعها فى ء

، من Δ أ ء حـ نجد أن : حـ ء = ب جا أ ، ء أ = ب جتا أ   ∴ ب ء = حـ − ب جتا أ

، فى Δ حـ ء ب القائم الزاوية فى ء : ∵ (ب حـ)^{2} = (حـ ء)^{2} + (ء ب)^{2}

أى أن أ^{2} = (ب جا أ)^{2} + (حـ − ب جتا أ)^{2}

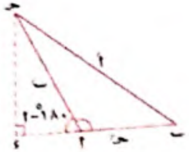
= ب^{2} جا^{2} أ + حـ^{2} − ٢ ب حـ جتا أ + ب^{2} جتا^{2} أ

= ب^{2} (جا^{2} أ + جتا^{2} أ) + حـ^{2} − ٢ ب حـ جتا أ

تذكر أن : جا^{2} أ + جتا^{2} أ = ١

∴ أ^{2} = ب^{2} + حـ^{2} − ٢ ب حـ جتا أ ومنها جتا أ = $\frac{ب^{2} + حـ^{2} − أ^{2}}{٢ ب حـ}$ (وهو المطلوب)

ثانيًا : إذا كان Δ أ ب حـ منفرج الزاوية فى أ :



نرسم حـ ء ⊥ ب أ يقطعه فى ء

، فى Δ أ ء حـ نجد أن : حـ ء = ب جا (١٨٠° − أ)

، أ ء = ب جتا (١٨٠° − أ)   ∴ ب ء = حـ + ب جتا (١٨٠° − أ)

، فى Δ حـ ء ب القائم الزاوية فى ء : ∵ (ب حـ)^{2} = (حـ ء)^{2} + (ء ب)^{2}

أى أن أ^{2} = (ب جا (١٨٠° − أ))^{2} + (حـ + ب جتا (١٨٠° − أ))^{2}

= (ب جا أ)^{2} + (حـ − ب جتا أ)^{2} = ب^{2} جا^{2} أ + حـ^{2} − ٢ ب حـ جتا أ + ب^{2} جتا^{2} أ

= ب^{2} (جا^{2} أ + جتا^{2} أ) + حـ^{2} − ٢ ب حـ جتا أ

∴ أ^{2} = ب^{2} + حـ^{2} − ٢ ب حـ جتا أ ومنها جتا أ = $\frac{ب^{2} + حـ^{2} − أ^{2}}{٢ ب حـ}$ (وهو المطلوب)

لاحظ أن : قانون جيب التمام صحيح أيضًا فى حالة المثلث القائم الزاوية [وذلك بوضع جتا أ = جتا ٩٠° = صفر]

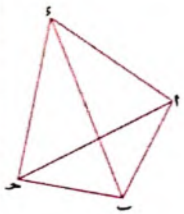
ملاحظـات

* لإيجاد قياس إحدى زوايا مثلث يفضل استخدام قانون جيب التمام لأنه يحدد نوع الزاوية إذا كانت حادة أو منفرجة.
* إذا كان أ : ب : حـ = ٢ : ٣ : ٤

نفرض أن : أ = ٢ ك ، ب = ٣ ك ، حـ = ٤ ك حيث ك ∈ ع$^{+}$

ثم نعوض فى قانون جيب التمام لإيجاد

قياسات زوايا Δ أ ب حـ



* لإثبات أن الشكل أ ب حـ ء رباعى دائرى :

− نثبت أن زاويتين متقابلتين فيه متكاملتان :

ق (∠ أ) + ق (∠ حـ) = ١٨٠°   **أى أن** جتا أ + جتا حـ = صفر

أ ، ق (∠ ب) + ق (∠ ء) = ١٨٠°   **أى أن** جتا ب + جتا ء = صفر

− نثبت أن قياسى زاويتين مرسومتين على قاعدة واحدة فيه وفى جهة واحدة منها متساويان :

كأن نثبت أن : ق (∠ ب أ حـ) = ق (∠ ب ء حـ)   **أى أن** جتا (∠ ب أ حـ) = جتا (∠ ب ء حـ)

مثال ①

في Δ أ ب حـ أوجد قيمة أ إذا كان : ب = ٣٠ سم ، حـ = ١٤ سم ، ق(∠أ) = ٦٠°

الحل

∵ أ^2 = ب^2 + حـ^2 − ٢ ب حـ جتا أ

∴ أ^2 = (٣٠)^2 + (١٤)^2 − ٢ × ٣٠ × ١٤ × جتا ٦٠° = ٦٧٦ ∴ أ = $\sqrt{٦٧٦}$ = ٢٦ سم

مثال ②

س ص ع مثلث فيه : س = ٤ سم ، ص = ٥ سم ، ع = ٦ سم

احسب قياس أكبر زواياه ، وكذلك احسب مساحته.

الحل

أكبر الزوايا قياسًا تقابل أكبر الأضلاع طولاً.

∴ جتا ع = $\frac{\text{س}^2 + \text{ص}^2 - \text{ع}^2}{٢\ \text{س ص}}$ = $\frac{٤^2 + ٥^2 - ٦^2}{٢ \times ٤ \times ٥}$ = ٠,١٢٥ ∴ ق(∠ع) ≈ ٩ َ ٤٩ َ ٨٢°

، مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ س ص جا ع = $\frac{١}{٢}$ × ٤ × ٥ × جا ٩ َ ٤٩ َ ٨٢° ≈ ٩,٩ سم^2

مثال ③

أ ب حـ مثلث فيه : $\frac{١}{٢}$ جا أ = $\frac{١}{٣}$ جا ب = $\frac{١}{٤}$ جا حـ احسب : ق(∠حـ)

الحل

∵ $\frac{\text{جا أ}}{٢}$ = $\frac{\text{جا ب}}{٣}$ = $\frac{\text{جا حـ}}{٤}$ ∴ $\frac{٢}{\text{جا أ}}$ = $\frac{٣}{\text{جا ب}}$ = $\frac{٤}{\text{جا حـ}}$

∴ أ : ب : حـ = ٢ : ٣ : ٤ وبفرض أن : أ = ٢ ك ، ب = ٣ ك ، حـ = ٤ ك

∴ جتا حـ = $\frac{\text{أ}^2 + \text{ب}^2 - \text{حـ}^2}{٢\ \text{أ ب}}$ = $\frac{٤\text{ك}^2 + ٩\text{ك}^2 - ١٦\text{ك}^2}{٢ \times ٢\text{ك} \times ٣\text{ك}}$ = $\frac{-٣\text{ك}^2}{١٢\text{ك}^2}$ = −$\frac{١}{٤}$

∴ ق(∠حـ) = ٢٩ َ ٢٨ َ ١٠٤°

مثال ④

أ ب حـ مثلث فيه : أ = ١٣ سم ، ب = ١٤ سم ، حـ = ١٥ سم أوجد طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه.

الحل

∵ جتا أ = $\frac{\text{ب}^2 + \text{حـ}^2 - \text{أ}^2}{٢\ \text{ب حـ}}$ = $\frac{١٩٦ + ٢٢٥ - ١٦٩}{٢ \times ١٤ \times ١٥}$ = $\frac{٣}{٥}$ ∴ جا أ = $\frac{٤}{٥}$

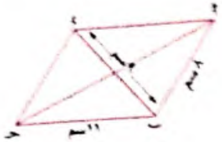
، ∵ $\frac{\text{أ}}{\text{جا أ}}$ = ٢ نق ∴ $\frac{١٣}{\frac{٤}{٥}}$ = ٢ نق ∴ نق = $\frac{١٣}{٢ \times \frac{٤}{٥}}$ = ٨ $\frac{١}{٨}$ سم

مثال ⑤

أ ب حـ ء متوازي أضلاع فيه : أ ب = ٨ سم ، ب حـ = ١١ سم ، ب ء = ٩ سم

أوجد طول قطره $\overline{\text{أ حـ}}$

الحل



في Δ أ ب ء : جتا أ = $\frac{(٨)^2 + (١١)^2 - (٩)^2}{٢ \times ٨ \times ١١}$ = $\frac{١٣}{٢٢}$

، ∵ ∠ب تكمل ∠أ (زاويتان متتاليتان في ▱ أ ب حـ ء)

∴ جتا ب = − جتا أ = $\frac{-١٣}{٢٢}$

∴ في Δ أ ب حـ : (أ حـ)^2 = (٨)^2 + (١١)^2 − ٢ × ٨ × ١١ × $\frac{-١٣}{٢٢}$ = ٢٨٩

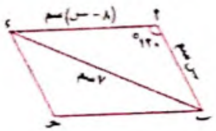
∴ أ حـ = ١٧ سم

مثال ⑥

أ ب حـ ء متوازي أضلاع فيه : ق(∠أ) = ١٢٠° ، ومحيطه = ١٦ سم

وطول القطر الأكبر فيه = ٧ سم أوجد مساحة متوازي الأضلاع علمًا بأن أ ب < ب حـ

الحل



نصف محيط متوازي الأضلاع = $\frac{١٦}{٢}$ = ٨ سم

فبفرض أن أ ب = س سم ∴ أ ء = (٨ − س) سم

∴ في Δ أ ب ء :

∵ (ب ء)^2 = (أ ب)^2 + (أ ء)^2 − ٢ (أ ب) (أ ء) جتا ١٢٠°

∴ ٤٩ = س^2 + (٨ − س)^2 − ٢ س (٨ − س) × (−$\frac{١}{٢}$)

∴ ٤٩ = س^2 + ٦٤ − ١٦ س + س^2 + ٨ س − س^2

∴ س^2 − ٨ س + ١٥ = ٠ ∴ (س − ٣) (س − ٥) = ٠ ∴ س = ٣ أ، س = ٥

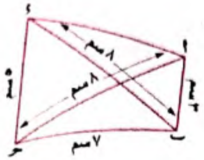
، ∵ أ ب < ب حـ ∴ أ ب = ٣ سم ، أ ء = ٥ سم

∴ م (▱ أ ب حـ ء) = ٢ م (Δ أ ب ء) = ٢ × $\frac{١}{٢}$ × ٣ × ٥ × جا ١٢٠° = $\frac{١٥\sqrt{٣}}{٢}$ سم^2

مثال ٧

أ ب حـ ء شكل رباعى فيه : أ ب = ٣ سم ، ب حـ = ٧ سم ، حـ ء = ٥ سم ، أ حـ = ب ء = ٨ سم

أثبت أن : الشكل أ ب حـ ء رباعى دائرى.



الحل

فى Δ ب أ حـ : جتا (∠ ب أ حـ) = $\frac{(٣)^{٢} + (٨)^{٢} - (٧)^{٢}}{٢ \times ٣ \times ٨} = \frac{١}{٢}$

، فى Δ ب ء حـ : جتا (∠ ب ء حـ) = $\frac{(٥)^{٢} + (٨)^{٢} - (٧)^{٢}}{٢ \times ٥ \times ٨} = \frac{١}{٢}$

∴ جتا (∠ ب أ حـ) = جتا (∠ ب ء حـ)

∴ ق (∠ ب أ حـ) = ق (∠ ب ء حـ) (وهما مرسومتان على $\overline{\text{ب حـ}}$ وفى جهة واحدة منها)

∴ الشكل أ ب حـ ء رباعى دائرى.

مثال ٨

أ ب حـ مثلث فيه : ء منتصف $\overline{\text{ب حـ}}$

أثبت أن : (أ ب)^{٢} + (أ حـ)^{٢} = ٢ (أ ء)^{٢} + ٢ (ب ء)^{٢}

وإذا كان : أ ب = ٣ سم ، أ حـ = ٤ سم ، أ ء = $\sqrt{٣,٥}$ سم فأوجد : طول $\overline{\text{ب حـ}}$

الحل

Δ أ ب ء فيه : (أ ب)^{٢} = (أ ء)^{٢} + (ب ء)^{٢} − ٢ (أ ء) (ب ء) جتا (∠ أ ء ب) (١)

، Δ أ حـ ء فيه : (أ حـ)^{٢} = (أ ء)^{٢} + (حـ ء)^{٢} − ٢ (أ ء) (حـ ء) جتا (∠ أ ء حـ)

، ∵ جتا (∠ أ ء ب) = − جتا (∠ أ ء حـ) ، حـ ء = ب ء

∴ (أ حـ)^{٢} = (أ ء)^{٢} + (ب ء)^{٢} + ٢ (أ ء) (ب ء) جتا (∠ أ ء ب) (٢)

بجمع (١) ، (٢) : ∴ (أ ب)^{٢} + (أ حـ)^{٢} = ٢ (أ ء)^{٢} + ٢ (ب ء)^{٢} (المطلوب أولاً)

∴ (٣)^{٢} + (٤)^{٢} = ٢ $(\sqrt{٣,٥})^{٢}$ + ٢ (ب ء)^{٢}

∴ ٢٥ = ٧ + ٢ (ب ء)^{٢} ∴ (ب ء)^{٢} = ٩

∴ ب ء = ٣ سم ∴ ب حـ = ٦ سم (المطلوب ثانيًا)

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① فى Δ س ص ع المقدار $\frac{س^{٢} + ص^{٢} - ع^{٢}}{٢ س ص}$ = ...

(أ) جتا س (ب) جتا ص (جـ) جتا ع (د) جا ع

② فى المثلث س ص ع يكون : ص^{٢} + ع^{٢} − س^{٢} = ٢ ص ع × ....

(أ) جتا س (ب) جا ع (جـ) جتا ع (د) جا س

③ فى Δ أ ب حـ : جتا (أ + ب) = ...

(أ) جتا حـ (ب) − جتا حـ (جـ) جا حـ (د) − جا حـ

④ إذا كان : أ ب حـ ء شكل رباعى دائرى فإن : جتا أ + جتا حـ = ...

(أ) ١ (ب) صفر (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) −١

⑤ فى المثلث س ص ع : ٢ س ص جتا (س + ص) = ...

(أ) س^{٢} + ص^{٢} − ع^{٢} (ب) ص^{٢} + ع^{٢} − س^{٢}

(جـ) س^{٢} − ع^{٢} + ص^{٢} (د) ع^{٢} − س^{٢} − ص^{٢}

⑥ المثلث ل م ن فيه : ل = ٥ سم ، م = ٧ سم ، ق (∠ ن) = ٦٠°

فإن : ن ≃ .... سم (لأقرب جزء من عشرة).

(أ) ٦,٢ (ب) ٥ (جـ) ٤,٣ (د) ٣,٥

⑦ Δ س ص ع فيه : س = ٥ سم ، ص = ٣ سم ، ق (∠ ع) = $\frac{٢}{٣}$ π فإن : ع = ...

(أ) ٧ (ب) ٨ (جـ) ٩ (د) ٤

⑧ فى Δ أ ب حـ : إذا كان ق (∠ أ) + ق (∠ ب) = ١٢٠° ، أ = ٢ سم ، ب = ٣ سم

فإن : حـ = ... سم

(أ) ٤ (ب) ٣ (جـ) $\sqrt{٧}$ (د) $\sqrt{٥}$

⑨ Δ أ ب حـ فيه : أ = ٩ سم ، ب = ١٥ سم ، ق (∠ حـ) = ١٠٦°

فإن محيطه ≃ .... سم

(أ) ٤٤ (ب) ٢٤ (جـ) ٣٤ (د) ٢٨

(١٠) أ ب حـ مثلث فيه : ب = ٢ سم ، حـ = ٢٫٥ سم ، جتا أ = $\frac{٢}{٥}$

فإن Δ أ ب حـ يكون ....

(أ) قائم الزاوية. (ب) متساوى الساقين.

(جـ) متساوى الأضلاع. (د) مختلف الأضلاع.

(١١) في المثلث س ص ع إذا كان : س = ص فإن : جتا س = ...

(أ) $\frac{٢ ص^٢}{ع}$ (ب) $\frac{ع}{٢ ص}$ (جـ) $\frac{ع}{٤ س}$ (د) $\frac{ص}{٢ س}$

(١٢) في Δ أ ب حـ يكون جتا (أ + ب) = ...

(أ) $\frac{أ^٢ + ب^٢ - حـ^٢}{٢ أ ب}$ (ب) $\frac{أ^٢ + حـ^٢ - ب^٢}{٢ أ ب}$

(جـ) $\frac{ب^٢ + حـ^٢ - أ^٢}{٢ ب حـ}$ (د) $\frac{حـ^٢ - أ^٢ - ب^٢}{٢ أ ب}$

(١٣) قياس أكبر زاوية في المثلث الذي أطوال أضلاعه ٣ سم ، ٥ سم ، ٧ سم تساوى ....°

(أ) ١١٠ (ب) ١٥٠ (جـ) ١٠٠ (د) ١٢٠

(١٤) أ ب حـ مثلث فيه : ب = ٤ سم ، أ + حـ = ١١ سم ، أ − حـ = ١ سم فإن : ....

(أ) المثلث منفرج الزاوية. (ب) المثلث قائم الزاوية.

(جـ) ق(∠ب) = ٢ ق(∠أ) (د) ق(∠أ) = ٢ ق(∠ب)

(١٥) في Δ أ ب حـ يكون : حـ (أ جتا ب + ب جتا أ) = ...

(أ) ٢ حـ^٢ (ب) حـ^٢ (جـ) أ^٢ (د) ب^٢

(١٦) في Δ أ ب حـ ، إذا كان : $\frac{\text{جا أ}}{\text{جا ب}}$ = ٢ جتا حـ ، فإن : ....

(أ) ب = حـ (ب) أ = حـ (جـ) أ = ب (د) أ = ب = حـ

(١٧) أ ب حـ مثلث فيه : أ^٢ + ب^٢ − حـ^٢ + $\sqrt{٣}$ أ ب = ٠ فإن : ق(∠حـ) = ...°

(أ) ٣٠ (ب) ١٥٠ (جـ) ٦٠ (د) ١٢٠

(١٨) في Δ أ ب حـ ، إذا كان ق(∠حـ) = ٦٠° ، أ^٢ + ب^٢ − حـ^٢ = ك أ ب فإن : ك = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ٢ (جـ) ١ (د) −١

(١٩) إذا كان أ ب حـ مثلث فيه : حـ^٢ = (أ + ب)^٢ − أ ب فإن : ق(∠حـ) = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (د) ١٢٠°

(٢٠) في Δ أ ب حـ إذا كان : ٤ جا أ = ٣ جا ب = ٦ جا حـ فإن : ق(∠حـ) ≃ .... (لأقرب درجة)

(أ) ٨٩° (ب) ٢٩° (جـ) ٥٧° (د) ٨٢°

(٢١) في Δ أ ب حـ : $\frac{١}{٢}$ جا أ = $\frac{١}{٣}$ جا ب = $\frac{١}{٤}$ جا حـ فإن جتا حـ = ...

(أ) $\frac{-٢}{٣}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) $\frac{-١}{٤}$ (د) $\frac{١}{٤}$

(٢٢) إذا كان : أ ب حـ مثلث فيه : ٥ جا أ جا ب = ٦ جا ب جا حـ = ٩ جا حـ جا أ

فإن : ق(∠حـ) ≃ ....

(أ) ٢٨° (ب) ٣٢° (جـ) ٣٦° (د) ٤٢°

(٢٣) إذا كان : أ ب حـ مثلث فيه : ٦ أ = ٤ ب = ٣ حـ فإن قياس أصغر زوايا المثلث = ...

(أ) ٢٨° ٥٧َ (ب) ٤١° ١٢َ (جـ) ٥٧° ٢٨َ (د) ٣٦° ٤٢َ

(٢٤) أ ب حـ مثلث فيه : ق(∠أ) = ٦٠° ، ب : حـ = ٥ : ٨ وكانت مساحة الدائرة المارة برؤوس المثلث تساوى ١٤٧ π سم^٢ فإن : محيط Δ أ ب حـ = ... سم

(أ) ٢١ (ب) ٣٤ (جـ) ٥٤ (د) ٦٠

(٢٥) إذا كان أ ب حـ مثلث حاد الزوايا فيه : أ = ٨ سم ، ب = ٥ سم ، ق(∠حـ) = ٦٠°

فإن : ق(∠أ) ≃ ....

(أ) ٨٣° ٤٢َ ١٢ً (ب) ٨١° ٤٧َ ١٢ً (جـ) ٣٨° ١١َ (د) ٦٠° ٣٣َ ١٠ً

(٢٦) أ ب حـ ء متوازى أضلاع فيه : أ ب = ٨ سم ، ب حـ = ١١ سم ، ب ء = ٩ سم

فإن : طول $\overline{\text{أ حـ}}$ = ... سم

(أ) ٩ (ب) ١٠ (جـ) ١١ (د) ١٧

(٢٧) أ ب حـ ء شكل رباعى فيه : أ ب = ٢٢ سم ، ب حـ = ٢٥ سم ، ء حـ = ١٨ سم

، ق(∠أ ء ب) = ٦٥° ، ق(∠ء ب أ) = ٥٠° فإن : ق(∠حـ ب ء) ≃ ....

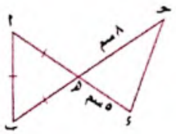
(أ) ٨٠° ٧٥َ (ب) ٤٢° ٤٩َ ١٩ً (جـ) ٤٤° ٢٨َ ٩ً (د) ٨٥° ٣٠َ

(٢٨) أ ب حـ مثلث فيه : أ = $\sqrt{٢}$ سم ، ب = $\sqrt{٣}$ سم ، حـ = ٢ سم

فإن : $\frac{\text{جتا أ جتا ب}}{\text{جتا (أ + ب)}}$ = ...

(أ) $\frac{٨}{١٥}$ (ب) $\frac{-١٥}{٨}$ (جـ) $\frac{-١٧}{١٥}$ (د) $\frac{٨}{١٧}$

(٢٩) في الشكل المقابل :



حـ ء = ... سم

(أ) ٦ (ب) ٧ (جـ) ٨ (د) ٩

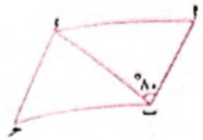
(٣٠) في الشكل المقابل أ ب حـ ء متوازي أضلاع

فإن أ حـ = ... سم

(أ) ٢ $\sqrt{١٣}$ (ب) ٢ $\sqrt{٣٧}$

(جـ) ٢ $\sqrt{١٧}$ (د) ١٤٨

(٣١) في الشكل المقابل :



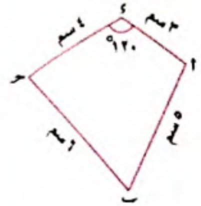
أ ب حـ ء متوازي أضلاع فيه ق (∠ أ ب ء) = ٨٠°

، ب ء = ٧ سم ، أ ب = ٥ سم

فإن محيط متوازي الأضلاع = ... لأقرب سم

(أ) ٢٥ (ب) ٢٦ (جـ) ٢٩ (د) ٣٠

(٣٢) في الشكل المقابل :

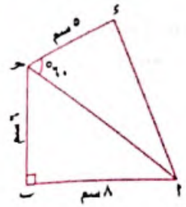


جا ب = ...

(أ) $\frac{١}{٥}$ (ب) $\frac{٢}{٥}$

(جـ) $\frac{٣}{٥}$ (د) $\frac{٤}{٥}$

(٣٣) في الشكل المقابل :



أ ب حـ ء شكل رباعي فيه :

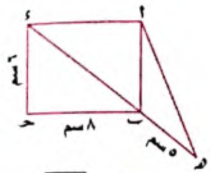
أ ب = ٨ سم ، ب حـ = ٦ سم ، ق (∠ ب) = ٩٠°

، ء حـ = ٥ سم ، ق (∠ أ حـ ء) = ٦٠°

فإن مساحة الدائرة المارة برؤوس Δ أ ء حـ = ... سم²

(أ) ٩ π (ب) ١٦ π (جـ) ٢٥ π (د) ٤٩ π

(٣٤) في الشكل المقابل :



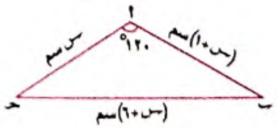
أ ب حـ ء مستطيل فيه : ء حـ = ٦ سم

، ب حـ = ٨ سم ، هـ ∈ ء ب حيث : ب هـ = ٥ سم

فإن : أ هـ = ... سم

(أ) $\sqrt{٩٣}$ (ب) $\sqrt{٩٧}$ (جـ) ١٠ (د) $\sqrt{١٠٣}$

(٣٥) في الشكل المقابل :



قيمة س = ... سم

(أ) ٧ (ب) ٨

(جـ) ٩ (د) ١٠

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ س ص ع مثلث فيه : ق (∠ ع) = ٩٥° ، س َ = ١٣ سم ، ص َ = ١٦ سم

أوجد : ع َ

٢١٫٥٠ سم.

٢ أ ب حـ مثلث فيه : أ َ = ٢ سم ، حـ َ = ٥ سم ، ق (∠ ب) = ٣٦ َ ٢١

أوجد : ب َ لأقرب سم

٣٠ سم.

٣ أوجد قياسات زوايا المثلث أ ب حـ الذي فيه : أ َ = ٧٫٦ سم ، ب َ = ٥٫٨ سم ، حـ َ = ٣٫٤ سم

٦٫٨ َ ٤٢٠ ، ٤١ َ ٢٠° ، ٢٥ َ ٦°.

٤ أ ب حـ مثلث فيه : أ َ = ١٣ سم ، ب َ = ١٤ سم ، حـ َ = ١٥ سم

أوجد : ق (∠ ب) ثم أوجد مساحة سطح المثلث أ ب حـ لأقرب سم²

٥٩ َ ٢٩° ، ٨٤ سم².

٥ أوجد قياس أصغر زاوية في Δ س ص ع إذا كان :

س َ = ١٨ سم ، ص َ = ٢٧ سم ، ع َ = ٢٤ سم

ثم أوجد مساحة الدائرة المارة برؤوس المثلث س ص ع

٤٠ َ ٤٨° ، ٥٩٦ سم².

٦ أ ب حـ مثلث فيه : ق (∠ حـ) = ٢٣ َ ٩٦° ، أ َ = ٧ سم ، ب َ = ٩ سم أوجد :

① حـ َ ② مساحة سطح المثلث أ ب حـ لأقرب سم²

③ طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب حـ لأقرب سنتيمتر.

١٢٠ سم ، ٣١ سم² ، ٦ سم.

٧ أ ب حـ مثلث محيطه ٥٢ سم ، أ َ = ١٣ سم ، ب َ = ١٧ سم أوجد قياس أكبر زاوية في المثلث ثم احسب مساحة سطحه لأقرب سنتيمتر مربع.

٩٣ َ ٢٢° ، ١١٠ سم².

٨ أوجد قياس أكبر زاوية في Δ س ص ع الذي فيه : س َ = ٢٤٫٥ سم ، ص َ = ١٨ سم ، ع َ = ١٠ سم ثم أوجد محيط الدائرة المارة برؤوسه ($\pi = \frac{٢٢}{٧}$)

١١٩ َ ١٩° ، ٨٨ سم.

٩ Δ س ص ع النسبة بين أطوال أضلاعه س َ : ص َ : ع َ = ٤ : ٥ : ٦ بين أن قياس أصغر زواياه هو ٢٥ َ ٤١° تقريبًا.

١٠ س ص ع مثلث فيه : جا س : جا ص : جا ع = ٧ : ٨ : ١٢

أوجد قياس أكبر زواياه.

٦٤ َ ١٠٦°.

١١ أ ب حـ مثلث فيه : أ َ = ٤ سم ، ب َ = ٥ سم ، جتا حـ = $\frac{-١}{٢}$

أوجد حـ َ ثم أوجد مساحة Δ أ ب حـ

٧٫٨٠ سم ، ٥ $\sqrt{٣}$ سم².

١٢ ا ب حـ مثلث فيه : أ = ١٦ سم ، حـَ = ١٨ سم ، طا ب = $\frac{٣}{٤}$

أوجد مساحة المثلث ثم احسب محيطه. ٨٦,٤ سم^٢ ، ٤٥ سم

١٣ ا ب حـ مثلث فيه : ٢ جا ا = ٣ جا ب = ٤ جا حـ أوجد قياس أصغر زواياه. ٢٦° ٢٣َ

١٤ ا ب حـ مثلث فيه : $\frac{١}{٣}$ جا ا = $\frac{١}{٤}$ جا ب = $\frac{١}{٥}$ جا حـ

أوجد : ق (∠ حـ) وإذا كان محيط المثلث = ٢٤ سم أوجد مساحته. ٩٠° ، ٢٤ سم^٢

١٥ ا ب حـ مثلث فيه : ء منتصف ب حـ فإذا كان : ق (∠ ب) = ٧٥° ، ق (∠ ا) = ٦٠° ، أ = ٨ سم

فأوجد طول كل من : ا حـ ، ا ء ٨,٩٢ سم ، ٦,٧ سم

١٦ ا ب حـ مثلث فيه : أ = ٨ سم ، بَ = ٧ سم ، حـَ = ٩ سم ، فرضت نقطة ء على ب حـ بحيث

ب ء = ٤ سم احسب طول ا ء ثم أوجد طول نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث ا ب حـ ٧ سم ، ٤,٧ سم

١٧ ا ب حـ ء متوازي أضلاع فيه : ا حـ = ١٦ سم ، ب ء = ٢٠ سم ، ق (∠ ا م ب) = ٥٠°

حيث م ملتقى القطرين أوجد : ا ب ، ا ء لأقرب سم ٨ سم ، ١٦ سم

١٨ ا ب حـ ء متوازي أضلاع فيه : ا ب = ٩ سم ، ب حـ = ١٣ سم ، ا حـ = ٢٠ سم

أوجد طول ب ء ١٠ سم

١٩ ا ب حـ ء متوازي أضلاع محيطه ٢٠ سم فإذا كانت النسبة بين طولي ضلعين متجاورين ٢ : ٣ فإذا كان :

ب ء = ٨ سم فأوجد طول ا حـ ٦,٣ سم

٢٠ ا ب حـ ء متوازي أضلاع فيه : ق (∠ ا) = ٦٠° ، محيطه = ٤٤ سم ، طول القطر الأصغر يساوي

١٤ سم ، ا ب < ا ء أوجد : ق (∠ ا ء ب) ثم احسب مساحة متوازي الأضلاع ا ب حـ ء لأقرب سم^٢

٢١° ٤٧َ ، ٨٣ سم^٢

٢١ ا ب حـ ء شبه منحرف فيه : ا ء // ب حـ ، ا ء = ٤٢ سم ، ا ب = ٣٠ سم

، ب حـ = ٤٨ سم ، ق (∠ ا) = ١٠٠°

أوجد طول كل من : ب ء ، حـ ء ٥٥,٧ سم ، ٢٠ سم

٢٢ ا ب حـ ء شكل رباعي فيه : ا ب = ا ء = ٩ سم ، ب حـ = ٥ سم ، حـ ء = ٨ سم ، ا حـ = ١١ سم

أثبت أن : الشكل ا ب حـ ء رباعي دائري.

٢٣ ا ب حـ ء شكل رباعي دائري فيه :

ا ب = ا ء = ٩ سم ، ب حـ = ٥ سم ، حـ ء = ٨ سم أوجد : ا حـ ١١ سم

٢٤ ا ب حـ ء شكل رباعي فيه : ا ب = ٦ سم ، ب حـ = ١٤ سم ، حـ ء = ١٠ سم

، ا حـ = ب ء = ١٦ سم أثبت أن : الشكل ا ب حـ ء رباعي دائري.

٢٥ ا ب حـ ء شكل رباعي فيه : ا ب = ٢٧ سم ، ب حـ = ١٢ سم ، حـ ء = ٨ سم

، ء ا = ١٢ سم ، ا حـ = ١٨ سم أثبت أن : ا حـ ينصف ∠ ب ا ء

ثم أوجد مساحة الشكل : ا ب حـ ء ١٢٤ سم^٢

٢٦ ا ب حـ ء شكل رباعي فيه : ق (∠ ء ا ب) = ق (∠ ء ب حـ) = ٩٠° ، ب ء = ١٠ سم ، ا ء = ٨ سم

، ق (∠ ء حـ ب) = ٣٠° أوجد : ا حـ لأقرب سم ٢٢ سم

٢٧ ا ب حـ مثلث فيه : أ = ٢ بَ ، ق (∠ حـ) = ٦٠°

أوجد : ق (∠ ب) ، ق (∠ ا) ١٩° ٦َ ، ٥٤ ١٠٠°

٢٨ ا ب حـ مثلث فيه : أ = ٥ سم ، ق (∠ ب) = ١٢٠° ، مساحته = ١٠ $\sqrt{٣}$ سم^٢

أوجد كلاً من : حـَ ، بَ وكذلك ق (∠ ا) ٨ سم ، ١١,٣٦ سم ، ٢٢° ٢٥َ

٢٩ ا ب حـ مثلث مساحته ٦٤ سم^٢ ، ق (∠ ا) = ٣٠° ، بَ : حـَ = ٣ : ٤

أوجد محيط Δ ا ب حـ ٤١,٨ سم

٣٠ ا ب حـ مثلث فيه : أ = ٦ سم ، بَ = ١٠ سم ، مساحة المثلث تساوي ٢٠ سم^٢

فإذا كانت ∠ ا حـ ب منفرجة فأوجد كلاً من : ق (∠ حـ) ، طول ا ب ١٣٨° ١١َ ، ١٥ سم

٣١ إذا كان : جا ا = $\frac{٢}{٣}$ جا ب = $\frac{١}{٢}$ جا حـ ، حـَ - أ = ٤ سم

أوجد كلًا من : بَ ، ق (∠ ا) ٦ سم ، ٢٨° ٥٧َ

٣٢ إذا كان جا ا : جا ب : جا حـ = ٢ : ٥ : ٧ أثبت أن : جتا ا : جتا ب : جتا حـ = ١٣ : ١١ : -٧

٣٣ ا ب حـ مثلث محيطه ٧٠ سم ، أ = ٢٦ سم ، ق (∠ ا) = ٦٠°

أوجد : مساحة سطحه. ١٠٥ $\sqrt{٣}$ سم^٢

٣٤ ا ب حـ مثلث محيطه ٣٤ سم ، أ = ١٢ سم ، بَ - حـَ = ٦ سم

أوجد قياس أصغر زواياه ثم احسب مساحته. ١٩° ٤٦َ ٢٤ ، ٤٧,٩ سم^٢

٣٥ مثلث أطوال أضلاعه هي ١٤ ، ١٠ ، س من السنتيمترات فإذا كان قياس أكبر زواياه هو ١٢٠°

أوجد س علمًا بأن (س < ١٠) ٦ سم

٣٦ Δ أ ب حـ فيه : ق (∠ حـ) = ١٢٠° ، أ = ب - ٢ ، حـ = ب + ٢

أوجد كلًا من : أ ، ب ، حـ

«٣٠ ، ٥ ، ٧»

٣٧ في المثلث أ ب حـ إذا كان (أ + ب + حـ) (أ + ب - حـ) = ٣ أ ب

أثبت أن : ق (∠ حـ) = ٦٠°

٣٨ في المثلث أ ب حـ إذا كان : (أ + ب + حـ) (أ + ب - حـ) = ك أ ب

فأثبت أن : ك ∈] ٠ ، ٤ [ثم أوجد : ق (∠ حـ) عندما ك = ١

«١٢٠°»

٣٩ أ ب حـ ء متوازي أضلاع أثبت أن : (أ حـ)^{٢} + (ب ء)^{٢} = ٢ (أ ب)^{٢} + ٢ (ب حـ)^{٢}

٤٠ أ ب حـ مثلث فيه : ء منتصف ب حـ أثبت أن : (أ ب)^{٢} + (أ حـ)^{٢} = ٢ (أ ء)^{٢} + ٢ (ب ء)^{٢}

وإذا كان : أ ب = ٥ سم ، أ حـ = ٨ سم ، ب حـ = ١٢ سم أوجد : أ ء

«$\frac{\sqrt{٣٤}}{٢}$ سم»

٤١ أثبت أن : ظتا ب + ظتا حـ = $\frac{أ^{٢}}{٢ Δ}$ حيث Δ يعبر عن مساحة Δ أ ب حـ

٤٢ أ ب حـ مثلث فيه : ب^{٢} = (حـ - أ)^{٢} + حـ أ أوجد : ق (∠ ب)

«٦٠°»

٤٣ س ص ع مثلث فيه : س^{٢} = ص^{٢} + ع^{٢} - ص ع ظتا س

أوجد : ق (∠ س)

«٩٠° أو ٣٠° أو ١٥٠°»

٤٤ Δ أ ب حـ فيه : جتا ب = $\frac{حـ}{٢ أ}$ أثبت أن : Δ أ ب حـ متساوي الساقين.

٤٥ أ ب حـ ء هـ خماسي منتظم طول ضلعه ١٨,٢٦ سم ، أوجد طول قطره أ حـ

«٢٩,٥٠ سم»

٤٦ اكتشف الخطأ : أ ب حـ مثلث فيه :

أ = ٧ سم ، ب = ١٠ سم ، حـ = ٥ سم ، ق (∠ أ) ≃ ٤٠,٥٤°

أوجد : ق (∠ ب)

حل زياد

∵ $\frac{ب}{جا ب} = \frac{أ}{جا أ}$

∴ $\frac{١٠}{جا ب} = \frac{٧}{جا ٤٠,٥٤°}$

∴ جا ب = $\frac{١٠ جا ٤٠,٥٤°}{٧}$ ≃ ٠,٩٢٨٥

∴ ق (∠ ب) = ٦٨,٢°

حل كريم

∵ جتا ب = $\frac{أ^{٢} + حـ^{٢} - ب^{٢}}{٢ أ حـ}$

∴ جتا ب = $\frac{(٧)^{٢} + (٥)^{٢} - (١٠)^{٢}}{٢ × ٧ × ٥}$

≃ -٠,٣٧١٤

∴ ق (∠ ب) ≃ ١١١,٨°

أي من الحلين هو الصحيح ؟ ولماذا ؟

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت : أ (٠ ، ١) ، ب (٣ ، ٤) ، حـ (١ ، ٣) هي رؤوس مثلث

فإن : جتا (∠ أ حـ ب) = ...

(أ) $\frac{٤}{٥}$ (ب) $-\frac{٤}{٥}$ (جـ) $\frac{٣}{٥}$ (د) $-\frac{٣}{٥}$

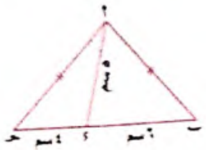
② في الشكل المقابل :

لإيجاد طول ء هـ يلزم معرفة ....

(أ) طول أ ب (ب) مساحة Δ أ ب حـ

(جـ) محيط Δ أ ب حـ (د) أي مما سبق.

③ في الشكل المقابل :

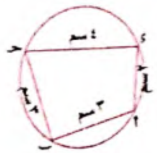


أ ب = ... سم

(أ) ٦ (ب) ٧

(جـ) ٨ (د) ٩

④ في الشكل المقابل :

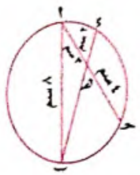


جتا أ = ...

(أ) $-\frac{١}{٦}$ (ب) $-\frac{١}{٢}$

(جـ) $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ (د) $\frac{١}{٢}$

⑤ في الشكل المقابل :

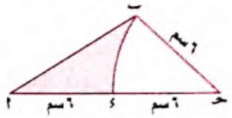


ق (∠ ب أ هـ) ≃ ....

(أ) ٣٤ ٣٩° (ب) ٣٩ ٣٤°

(جـ) ١٨ ٣٤° (د) ٣٤ ١٨°

⑥ في الشكل المقابل :



إذا كان : ق (∠ حـ) = ٤٠,٤°

فإن محيط الجزء المظلل ≃ .... سم

(أ) ١٥,٣ (ب) ١٣,٤ (جـ) ٦,٩ (د) ٢١,٣

⑦ إذا كانت مساحة المثلث أ ب جـ = ١٢ سم²

فإن (ب² + جـ² − أ²) ظا أ = ...

(أ) ١٢ (ب) ٢٤ (جـ) ٤٨ (د) ٩٦

⑧ في Δ أ ب جـ إذا كان ق(∠ أ) = ٦٠°

فإن (١ + أ/جـ + ب/جـ)(١ + جـ/ب − أ/ب) = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

⑨ في أي مثلث أ ب جـ إذا كان (أ³ + ب³ + جـ³)/(أ + ب + جـ) = أ² فإن ق(∠ أ) = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٤٥° (د) ١٥٠°

⑩ في الشكل المقابل :

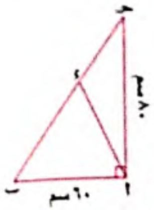
أ ب جـ ء ، س جـ هـ و مربعان

إذا كان ب جـ = ٣ جـ هـ

فإن : جا (∠ ب س هـ) = ...

(أ) ١/√٥ (ب) ٢/√٥ (جـ) −١/√٥ (د) −٢/√٥

⑪ في الشكل المقابل :



أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في أ

، أ ب = ٦٠ سم ، أ جـ = ٨٠ سم

ورسم أء يقسم Δ أ ب جـ إلى مثلثين لهما نفس المحيط

فإن : أء = ... سم

(أ) ٢٤ √٥ (ب) ٥ √٢٤

(جـ) ٣٥ ٢/٣ (د) ٤٥ ١/٢

٣ في Δ أ ب جـ إذا كان : جتا ب / أ = جتا أ / ب

فأثبت أن : Δ أ ب جـ إما قائم الزاوية أو متساوي الساقين.

٣ Δ أ ب جـ قائم الزاوية في ب فإذا كان هـ نقطة داخل المثلث بحيث أن

هـ أ = ١٠ سم ، هـ ب = ٦ سم ، ق(∠ أ هـ ب) = ق(∠ ب هـ جـ) = ق(∠ جـ هـ أ)

أوجد : طول هـ جـ

«٣٣ سم»

٤ Δ أ ب جـ قائم الزاوية في ب ، م ، و تنتميان إلى أجـ بحيث أ م = م و = و جـ

فإذا كان ب م = ٣ سم ، ب و = ٤ سم أوجد : محيط Δ أ ب جـ لأقرب سنتيمتر

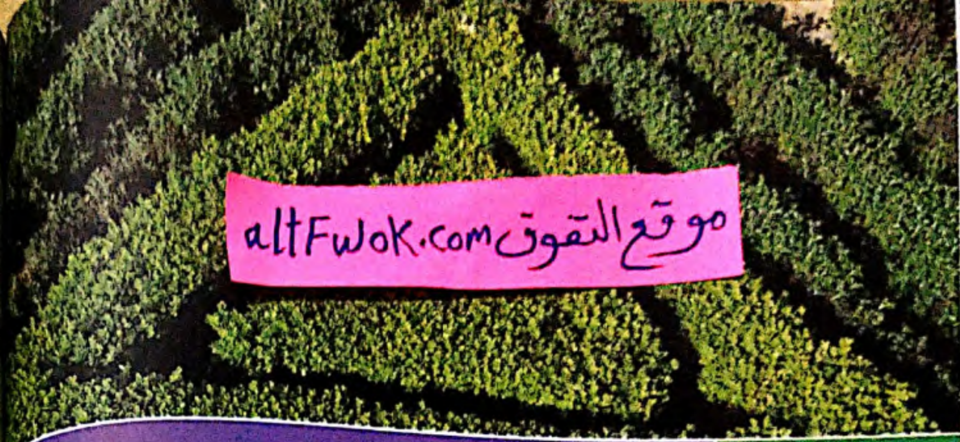
«١٦ سم»

٥ في أي مثلث أ ب جـ أثبت أن :

① جتا أ / أ + جتا ب / ب + جتا جـ / جـ = (أ² + ب² + جـ²) / (٢ أ ب جـ)

② أ² + ب² + جـ² = ٢ (ب جـ جتا أ + أ جـ جتا ب + أ ب جتا جـ)

③ ظا أ / ظا جـ = (أ² + ب² − جـ²) / (ب² + جـ² − أ²)



الدرس 3 حل المثلث

حل المثلث يعنى إيجاد أطوال أضلاعه وقياسات زواياه المجهولة إذا علم ثلاثة من هذه العناصر الستة (أحدها على الأقل طول ضلع). وهناك أربعة حالات لحل المثلث نعرض لها فيما يلى :

الحالة الأولى حل المثلث إذا علم فيه قياسا زاويتين وطول ضلع

في Δ أ ب حـ إذا علم ق(∠أ) ، ق(∠ب) ، أ :

١ نستخدم العلاقة : ق(∠حـ) = ١٨٠° − [ق(∠أ) + ق(∠ب)] لإيجاد : ق(∠حـ)

٢ نستخدم القانون : $\frac{\text{أ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ب}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{حـ}}{\text{جا حـ}}$ لإيجاد : ب ، حـ

مثال ١

حل المثلث أ ب حـ الذى فيه : ق(∠أ) = ٣٨° ٥٢َ ، ق(∠ب) = ٩٦° ٥١َ ، أ = ٢٢,٣ سم

الحل

ق(∠حـ) = ١٨٠° − (٣٨° ٥٢َ + ٩٦° ٥١َ) = **٤٤° ١٧َ**

، ∵ $\frac{\text{أ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ب}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{حـ}}{\text{جا حـ}}$

∴ $\frac{٢٢,٣}{\text{جا } ٣٨° ٥٢'} = \frac{\text{ب}}{\text{جا } ٩٦° ٥١'} = \frac{\text{حـ}}{\text{جا } ٤٤° ١٧'}$

∴ ب = $\frac{٢٢,٣ \text{ جا } ٩٦° ٥١'}{\text{جا } ٣٨° ٥٢'}$ ≈ **٣٥,٣ سم** ، حـ = $\frac{٢٢,٣ \text{ جا } ٤٤° ١٧'}{\text{جا } ٣٨° ٥٢'}$ ≈ **٢٤,٨ سم**

الحالة الثانية حل المثلث إذا علم فيه طولا ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما

في Δ أ ب حـ إذا علم أ ، ب ، ق(∠حـ) :

١ نستخدم القانون : حـ² = أ² + ب² − ٢ أ ب جتا حـ لإيجاد : حـ

٢ يفضل استخدام القانون : جتا أ = $\frac{\text{ب}^2 + \text{حـ}^2 - \text{أ}^2}{٢ \text{ ب حـ}}$ لإيجاد : ق(∠أ)

وذلك لأن قانون جيب التمام يفرق بين الزاوية الحادة والزاوية المنفرجة (أو يستخدم قانون الجيب لإيجاد قياس الزاوية المقابلة لأصغر الضلعين المعلومين)

٣ نستخدم العلاقة : ق(∠ب) = ١٨٠° − [ق(∠أ) + ق(∠حـ)] لإيجاد : ق(∠ب)

مثال ٢

حل المثلث أ ب حـ الذى فيه : أ = ٨ سم ، ب = ٥ سم ، ق(∠حـ) = ٦٠° ٢َ

الحل

∵ حـ² = أ² + ب² − ٢ أ ب جتا حـ = ٦٤ + ٢٥ − ٢ × ٨ × ٥ جتا ٦٠° ٢َ ≈ ٤٩,٠٤

∴ حـ ≈ **٧ سم**

∴ جتا أ = $\frac{\text{ب}^2 + \text{حـ}^2 - \text{أ}^2}{٢ \text{ ب حـ}} = \frac{٢٥ + ٤٩ - ٦٤}{٢ \times ٥ \times ٧} = \frac{١}{٧}$

∴ ق(∠أ) ≈ **٨١° ٤٧َ**

∴ ق(∠ب) = ١٨٠° − (٦٠° ٢َ + ٨١° ٤٧َ) = **٣٨° ١١َ**

حل آخر :

بعد إيجاد حـ يمكن إيجاد ق(∠ب) باستخدام قانون الجيب لأن ∠ب تقابل أصغر الضلعين المعلومين بالمعطيات ، ثم نوجد ق(∠أ)

∵ $\frac{\text{حـ}}{\text{جا حـ}} = \frac{\text{ب}}{\text{جا ب}}$ ∴ $\frac{٧}{\text{جا } ٦٠° ٢'} = \frac{٥}{\text{جا ب}}$

∴ جا ب = $\frac{٥ \text{ جا } ٦٠° ٢'}{٧}$ ≈ ٠,٦١٨٨ ∴ ق(∠ب) ≈ ٣٨° ١٤َ أ، ١٤١° ٤٦َ

، ∵ ب ليس طول أكبر أضلاع المثلث ∴ ∠ب لا يمكن أن تكون منفرجة

∴ ق(∠ب) = ٣٨° ١٤َ

∴ ق(∠أ) = ١٨٠° − (٦٠° ٢َ + ٣٨° ١٤َ) = ٨١° ٤٤َ

لاحظ أن : الاختلافات البسيطة فى قياسات الزوايا بين الحلين يرجع إلى استخدام قيم تقريبية بحاسبة الجيب.

الحالة الثالثة حل المثلث إذا علمت أطوال أضلاعه الثلاثة

فى Δ أ ب حـ إذا علم أ ، ب ، حـ :

[١] نستخدم القانون جتا أ = (بَ² + حـَ² − أَ²) / (٢ بَ حـَ) لإيجاد : ق (د أ)

[٢] نستخدم القانون جتا ب = (حـَ² + أَ² − بَ²) / (٢ حـَ أَ) لإيجاد : ق (د ب)

[٣] نستخدم العلاقة ق (د حـ) = ١٨٠° − [ق (د أ) + ق (د ب)] لإيجاد : ق (د حـ)

مثال ٣

حل المثلث أ ب حـ الذى فيه : أَ = ٥ سم ، بَ = ٧ سم ، حـَ = ١١ سم

الحل

∵ جتا أ = (بَ² + حـَ² − أَ²) / (٢ بَ حـَ) = (٤٩ + ١٢١ − ٢٥) / (٢ × ٧ × ١١) = ١٤٥ / ١٥٤ ∴ ق (د أ) ≈ ١٩° ٤١َ

، ∵ جتا ب = (حـَ² + أَ² − بَ²) / (٢ حـَ أَ) = (١٢١ + ٢٥ − ٤٩) / (٢ × ١١ × ٥) = ٩٧ / ١١٠ ∴ ق (د ب) ≈ ٢٨° ٨َ

∴ ق (د حـ) = ١٨٠° − (١٩° ٤١َ + ٢٨° ٨َ) = ١٣٢° ١١َ

تذكر أن

مجموع طولى أى ضلعين فى مثلث أكبر من طول الضلع الثالث فمثلًا إذا كان : أَ = ٢ سم ، بَ = ٥ سم ، حـَ = ٨ سم فإن هذه الأطوال لا تصلح أن تكون أطوالًا لأضلاع مثلث.

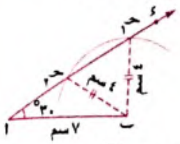
الحالة الرابعة حل المثلث إذا علم فيه طولا ضلعين وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما [الحالة المبهمة]

مثال توضيحى

باستخدام الأدوات الهندسية ارسم Δ أ ب حـ الذى فيه :

أ ب = ٧ سم ، ق (د أ) = ٣٠° ، ب حـ = ٤ سم ثم تحقق من إجابتك باستخدام قانون الجيب.

الحل



- نرسم قطعة مستقيمة أ ب طولها = ٧ سم
- نرسم د أ قياسها ٣٠° مع أ ب ولتكن ب أ ء
- نركز بسن الفرجار فى النقطة ب وبفتحة طولها ب حـ = ٤ سم ونرسم قوس يقطع المستقيم أ ء فى حـ
- نلاحظ أن النقطة حـ لها موضعين أى أننا يمكننا رسم مثلثين لهم نفس الشروط السابقة هما أ ب حـ₁ ، أ ب حـ₂ وبالقياس نجد أن : ق (د حـ) ≈ ٦١° فى Δ أ ب حـ₁ أ، ق (د حـ) ≈ ١١٩° فى Δ أ ب حـ₂

التحقق من الإجابة باستخدام قانون الجيب

∵ أ / جا أ = حـ / جا حـ ∴ ٤ / جا ٣٠ = ٧ / جا حـ

∴ جا حـ = (٧ جا ٣٠°) / ٤ = ٧/٨ (موجبة) ∴ حـ تقع فى الربع الأول (حادة) أ، الثانى (منفرجة)

∴ ق (د حـ) ≈ ٦١° أ، ق (د حـ) = ١١٩°

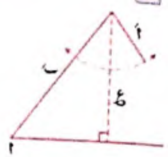
وعمومًا باستخدام الحل الهندسى يمكن التوصل إلى ما يلى

- فى Δ أ ب حـ إذا علم أ ، ب ، ق (د أ) نوجد ع = ب جا أ

ولإيجاد عدد الحلول الممكنة للمثلث نقارن بين قيم أ ، ب ، ع كما يلى

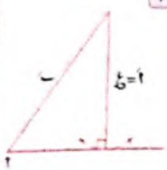
أولًا : إذا كانت د أ حادة وكان :

[١]



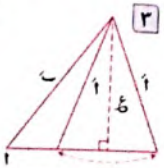
أ < ع فإنه لا يمكن رسم مثلث

[٢]



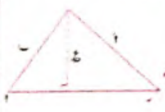
أ = ع فإنه يمكن رسم مثلث وحيد قائم الزاوية

[٣]



ع < أ < ب فإنه يمكن رسم مثلثين

[٤]



أ ≥ ب فإنه يمكن رسم مثلث وحيد

ثانيًا : إذا كانت د أ قائمة أو منفرجة وكان :

[١]

أ ≤ ب فإنه لا يمكن رسم مثلث

[٢]

أ > ب فإنه يمكن رسم مثلث وحيد

- يمكن حل المثلث فى هذه الحالة باستخدام قانون الجيب مباشرة دون تحديد عدد المثلثات الممكنة مع الأخذ فى الاعتبار ما يلى :

[١] د أ تقع فى الربع الأول (إذا كانت حادة)، تقع فى الربع الثانى (إذا كانت منفرجة).

[٢] دالة الجيب مداها [−١ ، ١]

[٣] إذا كان فى المثلث زاوية منفرجة فإن الزاويتين الأخريين لابد وأن تكونا حادتين.

مثال ٤

بين ما إذا كانت الشروط الآتية تحقق وجود مثلث وحيد أو أكثر من مثلث أو لا تحقق وجود أي مثلث على الإطلاق ثم أوجد الحلول الممكنة:

١ أ ب حـ مثلث فيه: ق(∠أ) = ١١٢° ، أ = ٧ سم ، ب = ٤ سم

٢ أ ب حـ مثلث فيه: ق(∠أ) = ١١٢° ، أ = ٤ سم ، ب = ٧ سم

٣ ل م ن مثلث فيه: ق(∠ل) = ٥٠° ، ل = ٤ سم ، م = ٧ سم

٤ ء هـ و مثلث فيه: ق(∠ء) = ٦٠° ، ء = ٧,٥ سم ، هـ = ٥√٣ سم

٥ ل م ن مثلث فيه: ق(∠ل) = ٣٠° ، ل = ٦ سم ، م = ٩ سم

٦ أ ب حـ مثلث فيه: ق(∠أ) = ٤٠° ، أ = ٨,٥ سم ، ب = ٧ سم

الحل

١ ∵ ∠أ منفرجة ، أ > ب

∴ يوجد للمثلث حل وحيد

∵ أ/جا أ = ب/جا ب

∴ ٧/جا ١١٢° = ٤/جا ب

∴ جا ب = ٤ جا ١١٢°/٧ ≈ ٠,٥٢٩٨ ∴ ق(∠ب) ≈ ٣٢°

ومنها ق(∠حـ) = ١٨٠° − (١١٢° + ٣٢°) = ٣٦°

∵ أ/جا أ = حـ/جا حـ ∴ ٧/جا ١١٢° = حـ/جا ٣٦°

∴ حـ ≈ ٤,٤ سم

> **لاحظ أن**
> المثلث به زاوية واحدة على الأكثر منفرجة.
> ∵ ∠أ منفرجة ∴ ∠ب لا بد وأن تكون حادة
> ∴ ب تقع في الربع الأول فقط

٢ ∵ ∠أ منفرجة ، أ < ب

∴ الشروط لا تحقق وجود أي مثلث على الإطلاق

> **لاحظ أن**
> ∵ ٤/جا ١١٢° = ٧/جا ب ∴ جا ب = ٧ جا ١١٢°/٤ ≈ ١,٦
> وهذا مستحيل لأن جا ب ∉ [-١ ، ١]

٣ ∵ ∠ل حادة ، ع = م جا ل = ٧ جا ٥٠° ≈ ٥,٤ سم

∵ ل < ع ∴ الشروط لا تحقق وجود أي مثلث على الإطلاق.

٤ ∵ ∠ء حادة ، ع = هـ جا ء = ٥√٣ جا ٦٠° = ٧,٥ سم

∵ ء = ع ∴ يوجد للمثلث حل وحيد وهو مثلث قائم الزاوية في هـ

∴ ق(∠و) = ١٨٠° − (٦٠° + ٩٠°) = ٣٠° ، و = √((٥√٣)² − (٧,٥)²) = ٥√٣/٢ سم

٥ ∵ ∠ل حادة ، ع = م جا ل = ٩ جا ٣٠° = ٤,٥ سم ، ∵ ٤,٥ < ٦ < ٩

أي أن ع < ل < م ∴ يوجد للمثلث حلان

∵ ل/جا ل = م/جا م ∴ ٦/جا ٣٠° = ٩/جا م ∴ جا م = ٣/٤

∴ م تقع في الربع الأول أو الثاني

∴ ق(∠م) ≈ ٤٨° ٣٥′ ٢٥″

ومنها ق(∠ن)

= ١٨٠° − (٣٠° + ٤٨° ٣٥′ ٢٥″)

= ١٠١° ٢٤′ ٣٥″

∵ ل/جا ل = ن/جا ن

∴ ٦/جا ٣٠° = ن/جا ١٠١° ٢٤′ ٣٥″

∴ ن ≈ ١١,٧٦ سم

أو

ق(∠م) = ١٨٠° − ٤٨° ٣٥′ ٢٥″

= ١٣١° ٢٤′ ٣٥″

ومنها ق(∠ن)

= ١٨٠° − (٣٠° + ١٣١° ٢٤′ ٣٥″)

= ١٨° ٣٥′ ٢٥″

∵ ٦/جا ٣٠° = ن/جا ١٨° ٣٥′ ٢٥″

∴ ن ≈ ٣,٨٣ سم

٦ ∵ ∠أ حادة ، أ > ب

∴ يوجد للمثلث حل وحيد

∵ أ/جا أ = ب/جا ب

∴ ٨,٥/جا ٤٠° = ٧/جا ب

∴ جا ب = ٧ جا ٤٠°/٨,٥ ≈ ٠,٥٣ ∴ ق(∠ب) ≈ ٣٢°

ومنها ق(∠حـ) = ١٨٠° − (٤٠° + ٣٢°) = ١٠٨°

∵ أ/جا أ = حـ/جا حـ ∴ ٨,٥/جا ٤٠° = حـ/جا ١٠٨°

∴ حـ = ٨,٥ جا ١٠٨°/جا ٤٠° ≈ ١٢,٥٨ سم

> **لاحظ أنه**
> إذا أخذنا هنا ق(∠ب) بحيث تقع في الربع الثاني
> ∴ ق(∠ب) = ١٨٠° − ٣٢° = ١٤٨°
> وهذا مستحيل لأنه ليس من المعقول أن يكون مجموع قياسي زاويتين في مثلث = ٤٠° + ١٤٨° = ١٨٨° أكبر من ١٨٠°

ملاحظة

يمكن حل المثلث فى الحالة المبهمة باستخدام قانون جيب التمام لإيجاد طول الضلع الثالث فنحصل على معادلة تربيعية وبحلها يكون عدد المثلثات هو عدد الحلول الموجبة الناتجة من هذه المعادلة.

مثال ٥

باستخدام الملاحظة السابقة حل المثلث أ ب حـ الذى فيه :

أ = ٦ سم ، ب = ٨ سم ، ق(∠ أ) = ٣٠°

الحل

∵ $أ^٢ = ب^٢ + حـ^٢ - ٢ ب حـ \text{ جتا } أ$

∴ $(٦)^٢ = (٨)^٢ + حـ^٢ - ٢ × ٨ × حـ \text{ جتا } ٣٠°$

∴ $حـ^٢ - ٨\sqrt{٣}\, حـ + ٢٨ = ٠$

∴ $حـ = \frac{٨\sqrt{٣} \pm \sqrt{(-٨\sqrt{٣})^٢ - ٤(١)(٢٨)}}{٢(١)}$

∴ حـ ≈ ١١,٤ سم أ، حـ ≈ ٢,٤٥٦ سم

، ∵ كل قيمة موجبة لـ حـ تقابل مثلثاً واحداً

∴ يوجد لدينا مثلثان ثم نوجد جتا ب من العلاقة : $\text{جتا } ب = \frac{حـ^٢ + أ^٢ - ب^٢}{٢ حـ أ}$

تذكر أن

القانون العام لحل معادلة تربيعية على الصورة $أ س^٢ + ب س + حـ = ٠$ هو $س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤ أ حـ}}{٢ أ}$

عندما حـ ≈ ١١,٤ سم	عندما حـ = ٢,٤٥٦ سم
∴ $\text{جتا } ب_١ = \frac{(١١,٤)^٢ + (٦)^٢ - (٨)^٢}{٢ (١١,٤)(٦)}$	∴ $\text{جتا } ب_٢ = \frac{(٢,٤٥٦)^٢ + (٦)^٢ - (٨)^٢}{٢ (٢,٤٥٦)(٦)}$
∴ ق(∠ $ب_١$) ≈ ٤١° ٤٩َ	∴ ق(∠ $ب_٢$) ≈ ١٣٨° ١٢َ
ومنها ق(∠ $حـ_١$) = ١٨٠° - (٣٠° + ٤١° ٤٩َ)	ومنها ق(∠ $حـ_٢$) = ١٨٠° - (٣٠° + ١٣٨° ١٢َ)
= ١٠٨° ١١َ	= ١١° ٤٨َ

∴ الحل الأول هو حـ = ١١,٤ سم ، ق(∠ ب) = ٤١° ٤٩َ ، ق(∠ حـ) = ١٠٨° ١١َ

، الحل الثانى هو حـ = ٢,٤٥٦ سم ، ق(∠ ب) = ١٣٨° ١٢َ ، ق(∠ حـ) = ١١° ٤٨َ

* حاول حل هذا المثال باستخدام قاعدة الجيب.

مثال ٦

حل المثلث أ ب حـ الذى فيه : ق(∠ أ) = ٤٠° ، ق(∠ حـ) = ٣٥°

، طول نصف قطر الدائرة المارة برءوسه ٦ سم

الحل

ق(∠ ب) = ١٨٠° - (٤٠° + ٣٥°) = ١٠٥°

∴ $\frac{أ}{\text{جا } ٤٠°} = \frac{ب}{\text{جا } ١٠٥°} = \frac{حـ}{\text{جا } ٣٥°} = ١٢$

∴ أ ≈ ٧,٧ سم ، ب ≈ ١١,٦ سم ، حـ ≈ ٦,٩ سم

على حل المثلث

• مقدم • تطبيق • مستويات عليا • من أسئلة الكتاب المدرسي

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) يقصد بحل المثلث ....

(أ) إيجاد أطوال أضلاعه. (ب) إيجاد قياسات زواياه.

(جـ) إيجاد العلاقة بين أطوال أضلاعه وقياسات زواياه. (د) إيجاد أطوال أضلاعه وقياسات زواياه.

(٢) محيط Δ أ ب جـ الذي فيه : ب = ١١ سم ، ق(∠أ) = ٦٧° ، ق(∠جـ) = ٤٦°

يساوى = ... (لأقرب سم).

(أ) ٢٢ (ب) ٣٨ (جـ) ٣١ (د) ٢٧

(٣) عند حل المثلث أ ب جـ الذي فيه : أ = ٥ سم ، ب = ٧ سم ، ق(∠جـ) = ٦٥°

فإن : جـ = ... سم (لأقرب جزء من عشره).

(أ) ٤,٤ (ب) ٢,١ (جـ) ٦,٧ (د) ٨,٢

(٤) عند حل Δ أ ب جـ الذي فيه : أ = ٢ سم ، ب = ٤$\sqrt{٢}$ سم ، جـ = ٢$\sqrt{٥}$ سم فإن :

أولاً : جا أ = ...

(أ) $\frac{٣}{\sqrt{١٠}}$ (ب) $\frac{٤}{٥}$ (جـ) $\frac{٢}{\sqrt{١٠}}$ (د) $\frac{\sqrt{١٠}}{٥}$

ثانياً : ق(∠جـ) = ...°

(أ) ١٨ َ ٣٢° (ب) ٤٣ َ ٢٧° (جـ) ١٣٥° (د) ٤٥°

(٥) عدد حلول Δ أ ب جـ الذي فيه : ق(∠جـ) = ١١٥° ، جـ = ١٢ سم ، أ = ٩ سم

هو ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) صفر

(٦) عدد الحلول الممكنة للمثلث أ ب جـ الذي فيه : أ = ٨ سم ، ب = ١٠ سم ، ق(∠أ) = ٤٢°

هو ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) عدد لا نهائي. (د) صفر

(٧) عدد الحلول الممكنة للمثلث أ ب جـ حيث : ق(∠أ) = ٦٠° ، ب = ٣ سم ، أ = ٥ سم

هو ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) صفر (د) عدد لا نهائي.

(٨) عدد حلول المثلث س ص ع الذي فيه : س = ٥ سم ، ص = ٦ سم ، ق(∠س) = ٧٠°

يساوى ....

(أ) صفر (ب) ٢ (جـ) ١ (د) ٣

(٩) Δ س ص ع فيه : س = ٣٠ سم ، ص = ٢٠ سم ، ق(∠س) = ١٠٠°

فإن هذه الشروط ....

(أ) تحقق وجود مثلث وحيد. (ب) تحقق وجود مثلثين.

(جـ) تحقق وجود ثلاثة حلول. (د) لا تحقق وجود أي مثلث.

(١٠) Δ أ ب جـ فيه : أ = ٢٠ سم ، ب = ٢٥ سم ، ق(∠أ) = ٤٠° فإن هذه الشروط ....

(أ) تحقق وجود مثلث وحيد. (ب) تحقق وجود مثلثين.

(جـ) تحقق وجود ثلاثة حلول. (د) لا تحقق وجود أي مثلث.

(١١) Δ س ص ع فيه : ق(∠س) = ١٠٠° ، س = ٣ سم ، ص = ٤ سم

هذه الشروط ....

(أ) تحقق وجود مثلث وحيد. (ب) تحقق وجود مثلثين.

(جـ) تحقق وجود ثلاثة حلول. (د) لا تحقق وجود أي مثلث.

(١٢) إذا كان للمثلث أ ب جـ حيث أ = ١٥ سم ، ق(∠ب) = ٣٠° حل وحيد

فإن : ب يمكن أن يساوى .... سم

(أ) ٨ (ب) ٧ (جـ) ٧,٥ (د) ٨,٥

(١٣) إذا كان للمثلث س ص ع حيث س = ١٠ سم ، ق(∠ص) = ٥٠° حلان

فإن : ص يمكن أن يساوى .... سم

(أ) ٦ (ب) ١١ (جـ) ٧,٦٦ (د) ٨

(١٤) إذا كانت الشروط التالية لا تحقق وجود للمثلث س ص ع حيث س = ١٧ سم ، ق(∠ص) = ٩٢°

فإن : ص يمكن أن يساوى .... سم

(أ) ٢٠ (ب) ٢٥ (جـ) ١٨ (د) ١٦

⁂ (١٥) إذا كانت الشروط التالية لا تحقق وجود للمثلث ل م ن حيث ل = ٣٥ سم ، ق(∠ م) = ٧٥°

فإن : مَ يمكن أن يساوى .... سم

(أ) ٤٥ (ب) ٧٥ (جـ) ٣٢ (د) ٤٠

⁂ (١٦) عند حل Δ أ ب حـ الذى فيه : أ = ١٥ سم ، جتا ب = $\frac{١}{٢}$ ، ظا حـ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

فإن محيط Δ أ ب حـ = ... نق ، حيث نق طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث.

(أ) $(٢ + \sqrt{٢})$ (ب) $(٢ + \frac{\sqrt{٢}}{٢})$ (جـ) $(٢ + \sqrt{٣})$ (د) ٢

ثانيًا الأسئلة المقالية

مسائل على الحالة الأولى لحل المثلث (طول ضلع وقياسا زاويتين)

١ حل المثلث ل م ن الذى فيه : مَ = ١٧ سم ، ق(∠ ل) = ١٦ ٣٢° ، ق(∠ ن) = ١٩ ٤٤°

٩,٥٠ سم ، ١٢,٢ سم ، ٢٥ ١٠٢°.

٢ حل المثلث أ ب حـ الذى فيه : أ ب = ٩ سم ، ق(∠ أ) = ٢ ق(∠ ب) = ٨٠°

ثم احسب مساحته لأقرب سم^{٢}

١٠,٢٠ سم ، ٦,٧ سم ، ٦٠° ، المساحة ≈ ٣٠ سم^{٢}.

٣ حل المثلث س ص ع الذى فيه : س ص = ٤٠ سم ، ق(∠ س) = ١٢ ٧٥°

، ق(∠ ص) = ١٥ ٤٨° ثم أوجد ارتفاع المثلث المرسوم من ع على $\overline{س ص}$

٤٦,٤٠ سم ، ٣٥,٨ سم ، ٣٣ ٥٦° ، الارتفاع ≈ ٢٤,٦ سم.

مسائل على الحالة الثانية لحل المثلث (طولا ضلعين وقياس زاوية محصورة)

٤ حل المثلث أ ب حـ الذى فيه : ق(∠ أ) = ١٢ ١٥٣° ، ب = حـ = ٦ سم

١١,٦٧ سم ، ٢٤ ١٣° ، ٢٤ ١٣°.

٥ حل المثلث ل م ن الذى فيه : لَ = ١٢,٥ سم ، نَ = ٧,٢٥ سم ، ق(∠ م) = ٨١,٢°

١١,٩٦ سم ، ٥٣ ٧٦° ، ٢٢ ٢٤°.

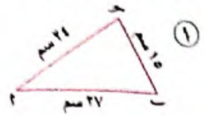
٦ حل المثلث ل م ن الذى فيه : ل م = ٤٨,٥ سم ، م ن = ٤٦ سم ، جتا م = −٠,٦

٨٤,٥٣ سم ، ٤٨ ٢٥° ، ٥٢ ١٢٦° ، ٢٠ ٢٧°.

مسائل على الحالة الثالثة لحل المثلث (أطوال ثلاثة أضلاع)

٧ حل المثلث أ ب حـ فى كل من الشكلين الآتيين :

(١)



(٢)

٨ حل المثلث أ ب حـ الذى فيه : أ = ١٣ سم ، ب = ١٤ سم ، حـ = ١٥ سم

٨ ٥٣° ، ٢٩ ٥٩° ، ٢٣ ٦٧°.

٩ حل المثلث أ ب حـ الذى فيه : أ = ٥ سم ، ب = ٢ حـ = ٨ سم

٥٥ ٣٠° ، ٦ ١٢٥° ، ٩ ٢٤°.

مسائل على الحالة الرابعة لحل المثلث (طولا ضلعين وقياس زاوية مقابلة لأحدهما)

١٠ حل المثلث أ ب حـ الذى فيه : أ = ١٠ سم ، ب = ٩ سم ، ق(∠ ب) = ٥٧°

١١ حل المثلث أ ب حـ الذى فيه : ق(∠ أ) = ٥٠° ، أ = ٤ سم ، ب = ٣ سم

١٢ حل المثلث أ ب حـ الذى فيه : ق(∠ حـ) = ١١٦° ، حـ = ١٢ سم ، أ = ١٠ سم

١٣ بيّن ما إذا كانت الشروط الآتية تحقق وجود مثلث وحيد أو أكثر من مثلث أو لا تحقق وجود أى مثلث على الإطلاق ثم أوجد الحلول الممكنة مقربًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة :

(١) أ = ١٥ سم ، ب = ١٠ سم ، ق(∠ أ) = ١٢٠°

(٢) أ = ٤ سم ، حـ = ١٦ سم ، ق(∠ حـ) = ١١٥°

(٣) أ = ١٢ سم ، ب = ١٥ سم ، ق(∠ أ) = ١٠٠°

(٤) أ = ٢٠ سم ، ب = ٢٨ سم ، ق(∠ أ) = ٤٢°

(٥) أ = ٥ سم ، ب = ٧ سم ، ق(∠ أ) = ٦٠°

(٦) أ = ١٢ سم ، حـ = ٧ سم ، ق(∠ أ) = ٢٧°

(٧) أ = ٤ $\sqrt{٣}$ سم ، ب = ٦ سم ، ق(∠ ب) = ٦٠°

(٨) أ = ٦ سم ، ب = ٨ سم ، ق(∠ أ) = ٤٧°

١٤ مسألة مفتوحة : أ ب حـ مثلث فيه : ق(∠ ب) = ٥٨° ، أ = ٤٢ سم

أوجد : ب التى لا يوجد حل للمثلث أ ب حـ عندها. فسر إجابتك.

مسائل متنوعة

(١٥) حل المثلث أ ب حـ المتساوى الساقين الذى فيه : ق (∠ أ) = ١١٠° ، أ = ٨ سم
«٤,٩ سم ، ٤,٩ سم ، ٣٥° ، ٣٥°»

(١٦) حل المثلث أ ب حـ الذى فيه : أ = ٢١ سم ، جا ب = ٣/٥ ، ظا حـ = ٥/١٢
«١٧,٣ سم ، ٨,٣ سم ، ١٠٤° ١٥َ ، ٥٣° ٨َ ، ٢٢° ٣٧َ»

(١٧) حل المثلث أ ب حـ الذى فيه : أ = ٥ سم ، ق (∠ ب) = ١٢٠°
، ومساحته تساوى ١٠ √٣ سم²
«١١,٣٦ سم ، ٨ سم ، ٢٢° ٢٤َ ، ٣٧° ٣٦َ»

(١٨) حل المثلث أ ب حـ الذى فيه : ق (∠ أ) : ق (∠ ب) : ق (∠ حـ) = ٤ : ٥ : ٦
ومحيطه يساوى ٥٠ سم
«١٤,٥ سم ، ١٦,٩ سم ، ١٨,٦ سم ، ٤٨° ، ٦٠° ، ٧٢°»

(١٩) حل المثلث أ ب حـ الذى فيه : جا أ : جا ب : جا حـ = ٣ : ٤ : ٦ ومحيطه يساوى ٥٢ سم
«١٢ سم ، ١٦ سم ، ٢٤ سم ، ٢٦° ٣٢َ ، ٣٦° ٢٠َ ، ١١٧° ١٧َ»

(٢٠) حل المثلث أ ب حـ الحاد الزوايا الذى فيه : أ = ٢١ سم ، ب = ٢٥ سم ، وطول قطر الدائرة المارة برؤوسه يساوى ٢٨ سم
«٢٦ سم ، ٤٨° ٣٥َ ، ٦٣° ١٤َ ، ٦٨° ١١َ»

(٢١) حل المثلث أ ب حـ الذى فيه : حـ = ٥ سم ، ق (∠ أ) = ٨٢° ، وطول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه = ٨ سم
«١٥,٨ سم ، ١٥,٧ سم ، ٧٩° ٤٧َ ، ١٨° ١٣َ»

(٢٢) حل المثلث أ ب حـ الذى فيه : أ = ٧ سم ، ق (∠ ب) = ٤٠°
، ومحيط الدائرة المارة برؤوس المثلث = ٤٤ سم (π = ٢٢/٧)
«٩ سم ، ١٣ سم ، ٣٠° ، ١١٠°»

(٢٣) حل المثلث س ص ع الذى فيه : ق (∠ س) = ٨٢° ، ق (∠ ع) = ٥٦°
ومساحته = ٩٠٠ سم²
«٥٦ سم ، ٣٨ سم ، ٤٧ سم ، ٤٢°»

(٢٤) حل المثلث أ ب حـ الذى فيه :
ق (∠ أ) = ٣٥° ، ق (∠ ب) = ٧٥° ، أ + ٣ حـ = ٢٥ سم «٤,٢ سم ، ٧,١ سم ، ٦,٩ سم ، ٧٠°»

(٢٥) حل المثلث أ ب حـ الذى فيه : أ = ١٣ سم ، ق (∠ ب) = ٤٢° ، طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه يساوى ٨ سم
«١٠,٧ سم ، ١٥,٩ سم ، ٥٤° ٢٠َ ، ٨٣° ٤٠َ ، أ ١٠,٧ سم ، ٣,٤ سم ، ١٢٥° ٤٠َ ، ١٢° ٢٠َ»

(٢٦) فى كل مما يأتى هل يمكن تكوين مثلث أ ب حـ أم لا ؟ وإذا كان ممكنًا حل هذا المثلث :

(١) أ = ٣,٢ سم ، ب = ٧,٦٣ سم ، حـ = ٦,٤ سم

(٢) أ = ١٢ سم ، ب = ٢١ سم ، ق (∠ حـ) = ٩٥°

(٣) أ = ١ سم ، ب = ٥ سم ، حـ = ٤ سم

(٤) ق (∠ أ) = ٤٢° ، أ = ٧ سم ، ب = ١٠ سم

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان أ ب حـ مثلث فيه : أ = ٣ سم ، ب = ٨ سم ، جا أ = ٥/١٣
فإن عدد المثلثات التى يمكن تكوينها من المعلومات السابقة هى ....

(أ) صفر (ب) ١
(جـ) ٢ (د) المعلومات غير كافية.

(٢) إذا كان أ ب حـ مثلث فيه : أ حـ = ٨ سم ، ق (∠ أ) = ٤٠° وكان ٨ جا ٤٠° < ب حـ < أ حـ
فإن ....

(أ) لا يمكن رسم المثلث. (ب) يمكن رسم مثلث وحيد.
(جـ) يمكن رسم مثلثين. (د) يمكن رسم عدد لا نهائى من المثلثات.

(٣) إذا كان أ ب حـ مثلث فيه : أ حـ = ٨ سم ، ق (∠ أ) = ٤٠° وكان ب حـ < ٨ جا ٤٠°
فإن ....

(أ) لا يمكن رسم المثلث. (ب) يمكن رسم مثلث وحيد.
(جـ) يمكن رسم مثلثين. (د) يمكن رسم عدد لا نهائى من المثلثات.

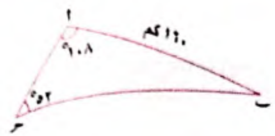
تطبيقات حياتية على الوحدة الرابعة

📖 من أسئلة الكتاب المدرسي

١ 📖 **الربط بالجغرافيا :**

الشكل المقابل يمثل مواقع ثلاث مدن أ ، ب ، حـ

أوجد لأقرب كيلو متر :



(١) المسافة بين أ ، حـ

(٢) المسافة بين ب ، حـ

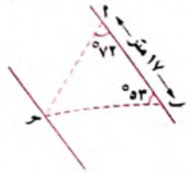
٦٩٠ كم ، ١٩٣ كم

٢ 📖 **فى الشكل المقابل :**

العلامتان أ ، ب تقعان على الحافة نفسها لجدول مياه

والمسافة بينهما ١٧ مترًا ، تقع العلامة حـ على الحافة

المقابلة بحيث : ق (∠ب أ حـ) = ٧٢° ، ق (∠أ ب حـ) = ٥٢°



أوجد : (١) المسافة بين العلامتين أ ، حـ لأقرب متر.

(٢) المسافة بين حافتى الجدول بفرض أنهما متوازيتان لأقرب رقمين عشريين.

١٧ م ، ١٥.٧٦ م

٣ 📖 **معارض الفنون :** علقت صورة فى معرض بواسطة خيط مربوط بحلقتين على الحافة الأفقية العليا من الصورة ويمر على مسمار فى حائط ، فإذا كان طول الخيط على كل جهة من المسمار ٣٠ سم ، وقياس الزاوية بين جزئى الخيط ٥٠° فأوجد المسافة بين الحلقتين على حافة الصورة لأقرب سنتيمتر. ٢٥ سم

٤ 📖 **الربط بالزراعة :** يريد مزارع وضع سياج بقطعة أرض مثلثة الشكل طولا ضلعين فيها ٩٨ م ، ٦٤ م ، وقياس الزاوية المحصورة بينهما ٥٢° فما طول هذا السياج ؟ ٢٣٩ م

٥ 📖 تحركت سفينتان أ ، ب فى نفس اللحظة من أحد الموانئ ، فإذا تحركت أ فى اتجاه ٢٠° جنوب الشرق حيث قطعت مسافة ٢٤ كم وتحركت ب فى اتجاه ٥٥° شمال الشرق حيث قطعت مسافة ١٠ كم فى نفس الزمن أوجد المسافة بين السفينتين فى نهاية هذا الزمن. ٢٣.٥ كم

٦ 📖 **مسافات :** يركب كريم دراجته البخارية ليقطع المسافة من المدينة أ إلى المدينة حـ مرورًا بالمدينة ب بسرعة منتظمة مقدارها ٣٦ كم/س ، ثم يعود من المدينة حـ إلى المدينة أ مباشرة بسرعة منتظمة مقدارها ٤٢ كم/س أوجد :

(١) الإزاحة بالكيلو متر بين المدينة حـ ، المدينة أ

(٢) الزمن الكلى بالدقيقة للرحلة كلها.

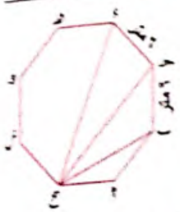
٢١ كم ، ٧٠ دقيقة

٧ 📖 **التصميم المعمارى :**

صمم مهندس معمارى مبنى على

شكل مثمن منتظم ، طول كل ضلع من أضلاعه ٦ أمتار.

أوجد أطوال الأقطار $\overline{ع ب}$ ، $\overline{ع حـ}$ ، $\overline{ع د}$



١١.١ متر ، ١٤.٥ متر ، ١٥.٧ متر

الجزء الخاص
بالامتحانات

الرياضيات
البحتة

• اختبارات
• امتحانات

امتحانات إلكترونية باستخدام تقنية QR

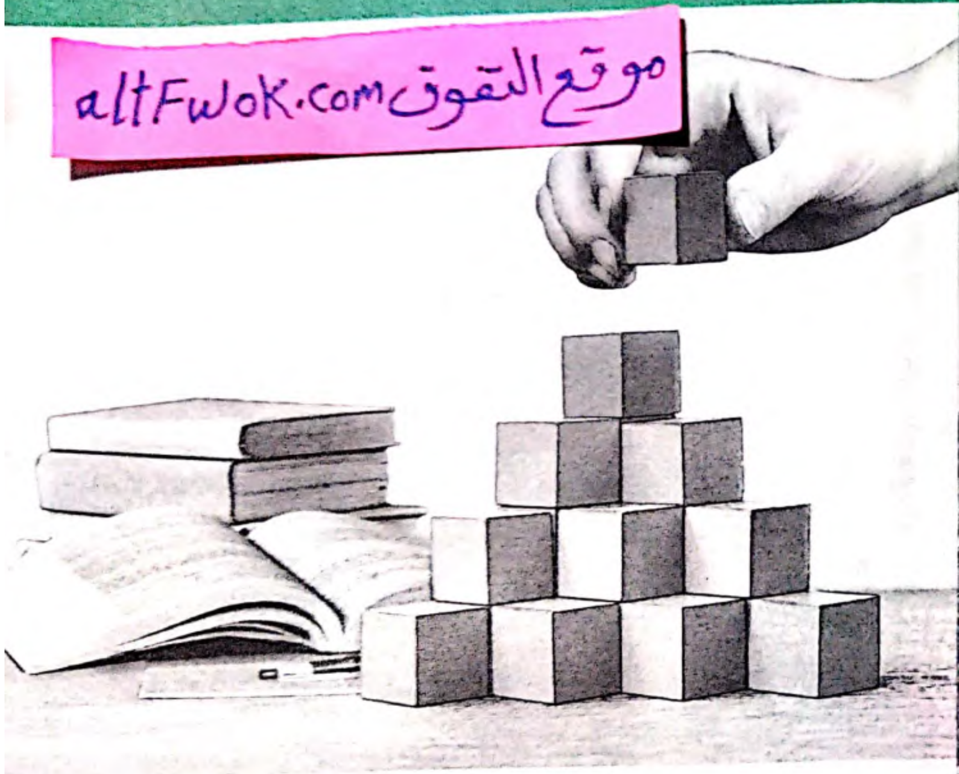
2022
المعاصر
إعداد نخبة من خبراء التعليم

الصف الثانى الثانوى
القسم العلمى
الفصل الدراسى الأول

محتويات الكتاب

- ◄ الاختبـارات التراكميــة القصيــرة.
- ◄ امتحانــات الكتــاب المدرســى.
- ◄ الامتحانــات النهائيــة.
- ◄ الإجابـــات.

الاختبارات التراكمية القصيرة



- ◄ **أولًا** : اختبارات تراكمية قصيرة فى الجبر.
- ◄ **ثانيًا** : اختبارات تراكمية قصيرة فى التفاضل.
- ◄ **ثالثًا** : اختبارات تراكمية قصيرة فى حساب المثلثات.

أولاً اختبارات تراكمية قصيرة في الجبر

اختبار 1 على درس 1 من الوحدة الأولى

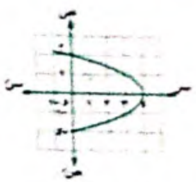
الدرجة الكلية ١٠

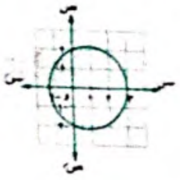
أجب عن الأسئلة الآتية :

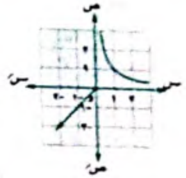
السؤال الأول ٤ درجات — لكل جزئية درجة

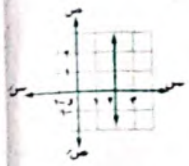
اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① أي من الأشكال الآتية يمثل دالة في س ؟

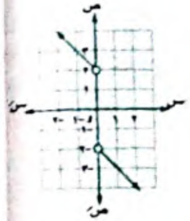

(أ)


(ب)


(جـ)

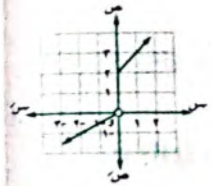

(د)

② الشكل المقابل يمثل دالة في س مجالها ....



(أ) ح (ب) ح −]−٢ ، ٢[(جـ) ح − [−٢ ، ٢] (د) ح − {٠}

③ الشكل المقابل يمثل دالة في س مداها ....



(أ) ح − [٠ ، ٢] (ب) ح − {٠} (جـ) ح − [٠ ، ٢[(د) ح −]٠ ، ٢]

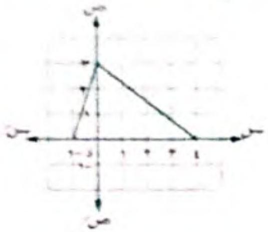
④ إذا كانت : د (س) = $\sqrt{٤ - س^{2}}$ فإن : مجال د = ...

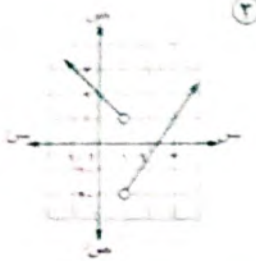
(أ) [−٢ ، ٢] (ب)]−٢ ، ٢[(جـ) [−٢ ، ٢[(د)]−٢ ، ٢]

السؤال الثاني ٦ درجات — لكل جزئية درجتان

ابحث اطراد كل من الدوال الممثلة بالأشكال الآتية :

①


②


③

اختبار 2 حتى درس 2 من الوحدة الأولى

الدرجة الكلية ١٠

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٦ درجات — لكل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت : د (س) = $\frac{1}{س}$ ، ر (س) = $\sqrt{س}$ فإن : مجال (د · ر) = ...

(أ) ح − {٠} (ب) ح (جـ) ح$^{+}$ (د) [٠ ، ∞[

② إذا كانت : د (س) = س + ١ ، ر (س) = س^{2} فإن : (د ∘ ر) (٢) = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٩

③ مجال الدالة د : د (س) = $\sqrt{٥ - س}$ يساوي ....

(أ) ح − {٥} (ب) ح$^{+}$ (جـ)]−∞ ، ٥] (د) [٥ ، ∞[

④ إذا كانت : د (س) = $\sqrt{س}$ ، ر (س) = س^{2} فإن : مجال (د ∘ ر) = ...

(أ) [٠ ، ∞[(ب) ح (جـ) ح$^{+}$ (د) ح$^{-}$

⑤ إذا كانت : د (س) = $\sqrt{س - ١}$ ، ر (س) = $\sqrt{١ - س}$

فإن : مجال (د + ر) هو ....

(أ) [١ ، ∞[(ب)]−∞ ، ١] (جـ) [−١ ، ∞[(د) {١}

⑥ إذا كانت العلاقة بين س ، د (س) ، ر (س) كما بالجدول المقابل لبعض قيم س فإن قيمة س التى تحقق أن ر (د (س)) = -١ هى ....

س	د (س)	ر (س)
-١	-٢	٤
صفر	٠	٣
١	٢	٢
٢	٤	١
٣	٦	٠
٤	٨	-١

(أ) ٨ (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) ٤

السؤال الثانى ٤ درجات — كل جزئية درجتان

إذا كانت : د (س) = $\frac{١}{س}$ ، ر (س) = س + ٣

فأوجد : ① (د ∘ ر) (س) ② (ر ∘ د) (س)

واذكر المجال فى كل من الحالتين.

اختبار 3 حتى درس 3 من الوحدة الأولى

الدرجة الكلية ١٠

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٦ درجات — كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت الدالة د زوجية فى [أ ، ب] فإن : ب = ...

(أ) أ (ب) -أ (جـ) ٢أ (د) $أ^٢$

② مجال الدالة د : د (س) = $\frac{٥}{\sqrt[٣]{س - ٨}}$ هو ....

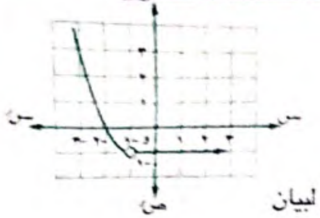
(أ) ح (ب) ح - {٢} (جـ) ح - {٨} (د) [٨ ، ∞[

③ الدالة الفردية من بين الدوال المعرفة بالقواعد الآتية هى ....

(أ) د (س) = س جا س (ب) د (س) = جتا س

(جـ) د (س) = ٥ (د) د (س) = س جتا س

④ الشكل المقابل يمثل دالة مداها ....



(أ) ح - {-١} (ب) [-١ ، ∞[

(جـ)]-١ ، ∞[(د) ح

⑤ إذا كانت د دالة أحادية وكانت النقطة (٢ ، ٣) تنتمى لبيان الدالة د ، فأى النقط الآتية يمكن أن تنتمى لبيان د ؟

(أ) (٥ ، ٣) (ب) (٢ ، -١) (جـ) (٣ ، ٢) (د) كل ما سبق.

⑥ إذا كانت د (س) = $س^٣$ ، ر (س) = $س^٢$ + ١ فأى مما يأتى يكون دالة فردية ؟

(I) (د × ر) (II) (د ∘ ر) (III) (ر ∘ د)

(أ) I فقط (ب) II ، III (جـ) I ، II (د) I ، III

السؤال الثانى ٤ درجات

إذا كانت : $د_١$ (س) = $س^٥$ ، $د_٢$ (س) = جا س أوجد : ($د_١$ + $د_٢$) (س)

ثم ابحث نوع ($د_١$ + $د_٢$) من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك.

اختبار 4 حتى درس 4 من الوحدة الأولى

الدرجة الكلية ١٠

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٣ درجات

مثل بيانيًا الدالة د : د (س) = { |س| عندما س ≤ ٠ ، $س^٢$ عندما س > ٠ } ومن الرسم استنتج مدى الدالة

وبيِّن نوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك وادرس اطرادها.

السؤال الثانى ٢ درجة

أوجد مجال الدالة د : د (س) = $\frac{٢س + ١}{س - ٢}$

وأثبت أن : د دالة أحادية.

السؤال الثالث ٣ درجات

إذا كانت : د (س) = س^{٢} − ١ ، ر (س) = س + ١

فارسم الدالة $\frac{د}{ر}$ مبينًا مجال ومدى الدالة ثم ابحث اطرادها.

السؤال الرابع ٢ درجة

ارسم الشكل البيانى للدالة د : د (س) = { س − ١ ، ٢ < س ≤ ٤ ؛ −١ ، −٢ ≤ س ≤ ٢ }

ومن الرسم عين المدى.

الدرجة الكلية ١٠

اختبار 5 حتى درس 5 من الوحدة الأولى

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٦ درجات كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① منحنى الدالة د : د (س) = س^{٢} + ٤ هو نفس منحنى الدالة ر : ر (س) = س^{٢} بإزاحة مقدارها ٤ وحدات فى اتجاه ....

(أ) $\overleftarrow{\text{و س}}$ (ب) $\overrightarrow{\text{و س}}$ (ج) $\overleftarrow{\text{و ص}}$ (د) $\overleftarrow{\text{و ص}}$

② الدالة الأحادية من بين الدوال المعرفة بالقواعد الآتية هى ....

(أ) د$_{١}$ (س) = س + ٢ (ب) د$_{٢}$ (س) = س^{٢}

(ج) د$_{٣}$ (س) = |س| (د) د$_{٤}$ (س) = ٥

③ إذا كانت د دالة حيث د (س) = $\frac{١}{س}$ فإن نقطة التماثل للدالة التى قاعدتها د (س + ١) هى ....

(أ) (١ ، ٠) (ب) (٠ ، ١) (ج) (−١ ، ٠) (د) (−١ ، ١)

④ إذا كانت : د (س) = $\sqrt{س + ٤}$ ، ر (س) = س^{٢} − ٤

فإن : (د ∘ ر) (س) = ...

(أ) |س| (ب) س^{٢} (ج) س^{٢} + ٤ (د) ٢

⑤ إذا كانت د (س) دالة حقيقية مجالها [−٢ ، ٣] فإن مجال الدالة ر (س) = د (س − ٢) هو ....

(أ) [−٢ ، ٣] (ب) [−٤ ، ١] (ج) [٠ ، ٥] (د) ع

⑥ إذا كانت د (س) دالة فردية فإن |د (س)| تكون ....

(أ) فردية. (ب) زوجية.

(ج) زوجية وفردية معًا. (د) ليست زوجية وليست فردية.

السؤال الثانى ٤ درجات

مثل بيانيًا الدالة د : د (س) = |٤ − س^{٢}| ومن الرسم استنتج مدى الدالة وبيّن نوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك وادرس اطرادها.

الدرجة الكلية ١٠

اختبار 6 حتى درس 6 من الوحدة الأولى

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٦ درجات كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① مجال الدالة د : د (س) = $\frac{٥}{\sqrt{س - ٤}}$ هو ....

(أ) [٤ ، ∞[(ب)]٤ ، ∞[(ج)]−∞ ، ٤] (د)]−∞ ، ٤[

② الدالة د حيث د (س) = { ٢ عندما س > ٠ ؛ −٢ عندما س < ٠ } متماثلة بالنسبة للنقطة ....

(أ) (٢ ، ٠) (ب) (−٢ ، ٠) (ج) (٠ ، ٠) (د) (٢ ، −٢)

③ المساحة المحصورة بين منحنيى الدالتين د : د (س) = |س + ٢| − ٢

، ر : ر (س) = صفر هى .... وحدة مربعة.

(أ) ٢ (ب) ٣ (ج) ٤ (د) ٥

④ الدالة الأحادية من بين الدوال المعرفة بالقواعد الآتية هى ....

(أ) د(س) = س² (ب) د(س) = |س|

(جـ) د(س) = ١/س (د) د(س) = ٣

⑤ مجموعة حل المتباينة: |س − ٢| ≥ −٤ فى ح هى ....

(أ)]−٢، ٦[(ب) [−٢، ٦] (جـ) ح (د) ∅

⑥ نفرض أن المنحنى د(س) = −س³ انتقل ٤ وحدات لليمين ووحدتين لأسفل وكان المنحنى الناتج هو ر(س) فإن: ر(−٢) = ...

(أ) −٢١٨ (ب) −٢٠ (جـ) ٦ (د) ٢١٤

السؤال الثانى ٤ درجات — كل جزئية درجتان

أوجد فى ح مجموعة الحل لكل من:

① √(س² − ٦س + ٩) + ٢س = ٩ ② ١ / |٢س − ٣| > ٢

اختبار 7 حتى درس 1 من الوحدة الثانية

الدرجة الكلية ١٠

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول ٦ درجات — كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

① إذا كانت: د دالة فردية فى الفترة [أ، ب] فإن: ب = ...

(أ) أ (ب) −أ (جـ) ٢أ (د) أ²

② نقطة تماثل الدالة د: د(س) = (س − ٢)³ + ١ هى ....

(أ) (٢، ١) (ب) (−٢، ١) (جـ) (٢، −١) (د) (−٢، −١)

③ مجموعة الحل للمعادلة: √(س³) = ٨ فى ح هى ....

(أ) {٢} (ب) {٤} (جـ) {١٦} (د) {٦٤}

④ مجموعة الحل للمعادلة: س^(٢/٣) = ٢٥ فى ح هى ....

(أ) {٥} (ب) {٥، −٥} (جـ) {١٢٥} (د) {١٢٥، −١٢٥}

⑤ إذا كان: ٧^(س+١) = ٣^(٢س+٢) فإن: س = ...

(أ) −١ (ب) ١ (جـ) ٤ (د) صفر

⑥ إذا كانت: د₁(س) = ٣^س ، د₂(س) = ٩^س فإن قيمة س التى تحقق أن د₁(٢س − ١) + د₂(س + ١) = ٧٥٦ هى ....

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٧

السؤال الثانى ٤ درجات — كل جزئية درجتان

أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلتين الآتيتين:

① س^(٤/٣) − ١٠ س^(٢/٣) + ٩ = ٠

② |س + ٢| = ٢س − ١٠

اختبار 8 حتى درس 2 من الوحدة الثانية

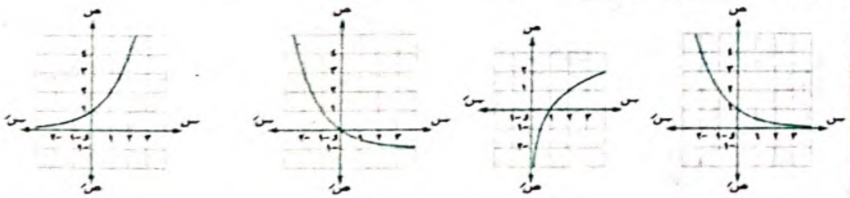
الدرجة الكلية ١٠

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول ٦ درجات — كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

① الدالة د حيث د(س) = ٢^(−س) يمثلها الشكل البيانى ....



(أ) (ب) (جـ) (د)

② إذا كانت الدالة د حيث د (س) = $\frac{1}{س}$ فإن نقطة التماثل للدالة التى قاعدتها د (س + ١) هى ......

(أ) (١ ، ٠) (ب) (٠ ، ١) (جـ) (-١ ، ٠) (د) (-١ ، ١)

③ مجموع جذور المعادلة : $س^{4}$ = ١٦ يساوى ......

(أ) ٢ (ب) -٢ (جـ) صفر (د) ±٢

④ إذا كانت : د (س) = $أ^{س}$ ، أ > ١ فإن : د (س) > ١ عندما ......

(أ) س ∈ ح (ب) س ∈ $ح^{+}$ (جـ) س ∈ $ح^{-}$ (د) س ∈ ص

⑤ الدالة د : د (س) = $(٢ أ)^{س}$ تكون متناقصة عندما أ ∈ ......

(أ)]٠ ، ١[(ب)]١ ، ∞[(جـ)]٠ ، ٢[(د)]٠ ، $\frac{1}{2}$[

⑥ إذا كانت : د (س) = ٣س + ١ ، ر (س) = $س^{2}$ - ٣ فإن : (د ∘ ر) (٢) = ...

(أ) ٦ (ب) ٤ (جـ) ٣ (د) -٤

السؤال الثانى ٤ درجات

يتكاثر النحل فى إحدى الخلايا فيزداد بمعدل ٢٥ ٪ كل أسبوع فإذا كان عدد النحل ٦٠ نحلة اكتب دالة أسية تمثل عدد النحل بعد ن أسبوع ثم قدر عدد النحل بعد ٦ أسابيع.

اختبار 9 حتى درس 3 من الوحدة الثانية

الدرجة الكلية ١٠

أجب عن الأسئلة الآتية :

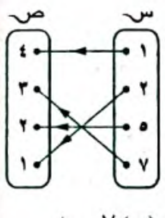
السؤال الأول ٦ درجات — كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① الشكل المقابل يمثل دالة

د : س ⟵ ص

فإن : $د^{-1}$ (٤) = ...



(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٥ (د) ٧

② إذا كانت : $٣^{د(س)}$ = ٢ س - ١ فإن : $د^{-1}$ (٠) = ...

(أ) ١ (ب) -١ (جـ) ٢ (د) ٥

③ منحنى ر : ر (س) = | س + ٣ | هو نفس منحنى د : د (س) = | س | بإزاحة مقدارها ٣ وحدات فى اتجاه ......

(أ) $\overleftarrow{و س}$ (ب) $\overrightarrow{و س}$ (جـ) $\overleftarrow{و ص}$ (د) $\overrightarrow{و ص}$

④ مجال الدالة د : د (س) = $\frac{1}{|س| - ٣}$ هو ......

(أ) {٣ ، -٣} (ب) [-٣ ، ٣]

(جـ) ح - [-٣ ، ٣] (د) ح - {-٣ ، ٣}

⑤ إذا تقاطع منحنى الدالة د مع منحنى الدالة $د^{-1}$ فى نقطة (أ ، $\frac{٤}{أ}$) فإن : أ = ...

(أ) ٢ (ب) ±٢ (جـ) ٤ (د) ±٤

⑥ إذا كانت : د (س) = $س^{2}$ ، ر (س) = س - ٣ فإن مجموعة حل المعادلة : ر (د (س)) = $ر^{-1}$ (س) فى ح هى ......

(أ) {٢ ، -٣} (ب) {٣} (جـ) {٣ ، -٢} (د) {٢ ، ٣}

السؤال الثانى ٤ درجات • كل جزئية درجتان

إذا كانت د دالة بحيث د (س) = $\frac{٢س + ٣}{س + ١}$ فأوجد :

① مجال ومدى د ② $د^{-1}$ (س) وعين مجال ومدى $د^{-1}$

اختبار 10 حتى درس 4 من الوحدة الثانية

الدرجة الكلية ١٠

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٦ درجات — كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كان : $لو_{س}$ ٤ = ٢ فإن : س = ...

(أ) ٤ (ب) ±٢ (جـ) ٢ (د) -٢

② مجال الدالة د : د (س) = $لو_{١ - س}$ س هو ....

(أ) س > ٠ (ب) س < ١ (جـ) ٠ < س < ١ (د) ٠ ≤ س ≤ ١

③ إذا كانت : د (س) = ٦ س فإن : $د^{-١}$ (س) = ...

(أ) ٦ س (ب) $\frac{٦}{س}$ (جـ) $\frac{س}{٦}$ (د) س − ٦

④ مجموعة حل المعادلة : |س − ٣| + ١ = ٠ فى ح هى ....

(أ) ح (ب) {−١} (جـ) ∅ (د) {٤}

⑤ إذا كانت د (س) = $لو_{أ}$ (٢ س + ٤) وكانت $د^{-١}$ (٥) = ١٤ فإن : أ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

⑥ حاصل ضرب جذرى المعادلة : $س^{٢}$ − ٣ |س| − ١٠ = ٠ يساوى ....

(أ) −٢٥ (ب) −١٥ (جـ) ١٠ (د) ٢٥

السؤال الثانى **٤ درجات** كل جزئية درجتان

حل فى ح المعادلتين الآتيتين :

① $لو_{٤}$ $لو_{٢}$ $لو_{٣}$ (س + ١) = ٠ ② $\left(\frac{٣}{٢}\right)^{|س - ٢|}$ = ٣ $\frac{٣}{٨}$

اختبار 11 حتى درس 5 من الوحدة الثانية

الدرجة الكلية
١٠

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول **٦ درجات** كل جزئية درجتان

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① المقدار $\frac{٣ \text{ لو } ٢}{\text{لو } ٤ + \text{لو } ٣}$ يكافئ: ....

(أ) $لو_{٣}$ ٢ (ب) $لو_{٧}$ ٢ (جـ) $لو_{١٢}$ ٨ (د) $لو_{٧}$ ٨

② إذا كان منحنى ص = $لو_{٤}$ (١ − أ س) يمر بالنقطة $\left(\frac{١}{٤} ، -\frac{١}{٢}\right)$ فإن : أ = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٨

③ إذا كانت : د (س) = ٢ س + ١ ، ر (س) = $س^{٢}$ − ٥

فإن : (ر ∘ د) (−٣) = ...

(أ) −٥ (ب) ٥ (جـ) ٥٩ (د) −٩٥

④ إذا كانت : ص = $\sqrt[٣]{س}$ لكل س ≤ ٠ فإن الدالة العكسية لها ص = ...

(أ) $\frac{١}{٣}$ $س^{٣}$ (ب) $س^{٣}$ (جـ) $س^{٣}$ − ١ (د) $س^{-\frac{١}{٣}}$

⑤ إذا كان : ل ، م هما جذرا المعادلة : ٣ $س^{٢}$ − ١٦ س + ١٢ = ٠

فإن : $لو_{٢}$ ل + $لو_{٢}$ م = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ١٢ (د) ١٦

⑥ $\frac{١}{١ + لو_{ب} أ + لو_{ب} حـ}$ + $\frac{١}{١ + لو_{حـ} أ + لو_{حـ} ب}$ + $\frac{١}{١ + لو_{أ} ب + لو_{أ} حـ}$ = ...

(أ) $لو_{أ}$ ب حـ (ب) $لو_{ب}$ أ حـ (جـ) $لو_{حـ}$ أ ب (د) ١

السؤال الثانى **٤ درجات**

إذا كان : لو (س + ص) = $\frac{١}{٢}$ (لو س + لو ص) + لو ٢

أثبت أن : س = ص

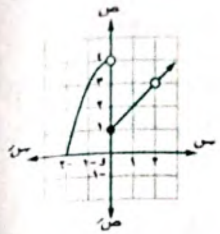
الدرجة الكلية ١٠

اختبار 1 على درس 1 من الوحدة الثالثة

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٤ درجات — كل جزئية درجة

من الشكل المقابل أوجد :



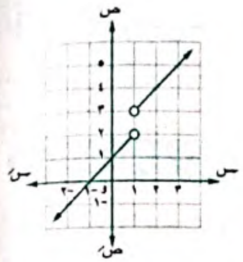
(١) د (صفر⁺)   (٢) د (صفر⁻)

(٣) د (٢)   (٤) $\underset{س \to ٢}{\text{نها}}$ د (س)

السؤال الثانى ٦ درجات — كل جزئية درجتان

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) الشكل المقابل هو التمثيل البيانى للدالة د



فإن : $\underset{س \to ١}{\text{نها}}$ د (س) = ...

(أ) ٢   (ب) ٣   (جـ) ١   (د) غير موجودة.

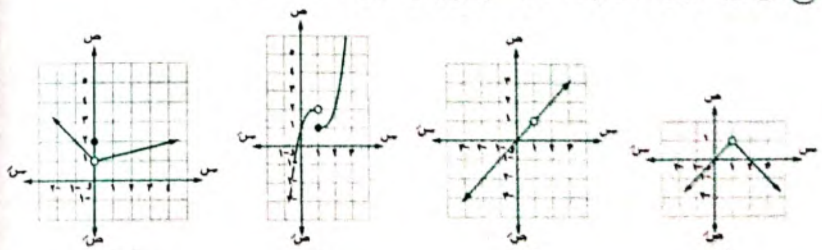
(٢) فى الشكل المقابل :

عندما $\theta \to \frac{\pi}{٢}$

فإن : ص ← .... سم

(أ) صفر   (ب) ٥   (جـ) ١٠   (د) $١٠\sqrt{٢}$

(٣) أى من الدوال الممثلة بالأشكال الآتية ليس لها نهاية عند س = ١ ؟



(أ)   (ب)   (جـ)   (د)

الدرجة الكلية ١٠

اختبار 2 حتى درس 2 من الوحدة الثالثة

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٢ درجة — كل جزئية نصف درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

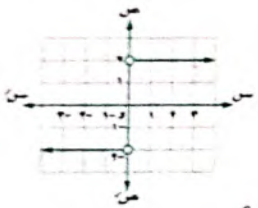
(١) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{١ + س}{٤ س - ١}$ = ...

(أ) −١   (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) $\frac{-١}{٤}$ (د) ١

(٢) $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \frac{س^٢ - ٩}{س - ٣}$ = ...

(أ) −٦   (ب) صفر   (جـ) ٣   (د) ٦

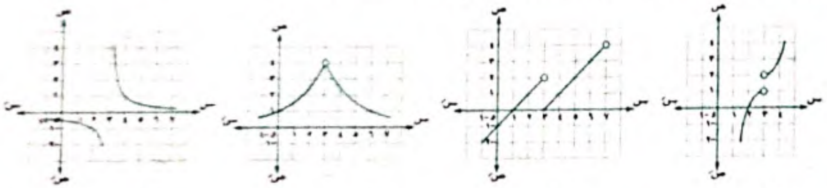
(٣) الشكل البيانى المقابل يمثل د (س)



فإن : $\underset{س \to ٢}{\text{نها}}$ د (س) = ...

(أ) ٠   (ب) −٢   (جـ) ٢   (د) غير موجودة.

(٤) أى من الدوال الممثلة بالأشكال الآتية لها نهاية عند س = ٣ ؟



(أ)   (ب)   (جـ)   (د)

السؤال الثانى ٨ درجات — كل جزئية درجتان

أوجد قيمة :

(١) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\sqrt{س + ٤} - ٢}{س^٢ + س}$

(٢) $\underset{س \to ١}{\text{نها}} \frac{٣ س^٢ + س - ٤}{س^٢ - ١}$

(٣) $\underset{س \to ٤}{\text{نها}} \frac{س^٢ - ١٥ س - ٤}{س - ٤}$

(٤) $\underset{س \to ١}{\text{نها}} \left(\frac{١}{س - ١} - \frac{٢}{س^٢ - ١}\right)$

الدرجة الكلية ١٠

اختبار 3 حتى درس 3 من الوحدة الثالثة

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٦ درجات (كل جزئية درجة)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① $\underset{س \leftarrow ١}{نهـا} \frac{س^{٧} - ١}{س - ١} = ...$

(أ) ٧ (ب) ٨ (جـ) ٦ (د) صفر

② $\underset{س \leftarrow أ}{نهـا} \frac{س^{ن} - أ^{ن}}{س^{م} - أ^{م}} = ...$

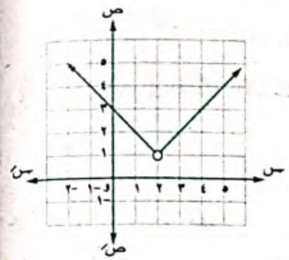
(أ) $\frac{م}{ن}$ (ب) $\frac{م}{ن}(أ)^{م-ن}$ (جـ) $\frac{ن}{م}(أ)^{م-ن}$ (د) $\frac{ن}{م}(أ)^{ن-م}$

③ $\underset{هـ \leftarrow ٠}{نهـا} \frac{(س + هـ)^{٥} - س^{٥}}{هـ} = ...$

(أ) $س^{٥}$ (ب) $٥ س^{٤}$ (جـ) صفر (د) ١

④ في الشكل المقابل :

$\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا} د(س) = ...$



(أ) ١ (ب) −١ (جـ) ٢ (د) غير موجودة.

⑤ إذا كانت : ن دالة وكانت $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا} \frac{ن(س) - ٨}{س - ٢} = ٧$ فإن : $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا} \frac{٢ س^{٢} - ن(س)}{س - ٢} = ...$

(أ) ١ (ب) ٤ (جـ) ٨ (د) ١٥

⑥ $\underset{س \leftarrow ١}{نهـا} \frac{س^{٦} - ٦٤}{س - ٢} = ...$

(أ) $٦(٢)^{٥}$ (ب) ١٢٨ (جـ) $٦٤(٢)^{٥}$ (د) ٦٣

السؤال الثاني ٤ درجات (كل جزئية درجتان)

أوجد قيمة :

① $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا} \frac{س^{٧} - ١٢٨}{س^{٢} + ٣ س - ١٠}$

② $\underset{س \leftarrow -٢}{نهـا} \frac{(س + ٣)^{٥} - ١}{س + ٢}$

الدرجة الكلية ١٠

اختبار 4 حتى درس 4 من الوحدة الثالثة

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٢ درجة (كل جزئية نصف درجة)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① $\underset{س \leftarrow \infty}{نهـا} \frac{س^{-٣} + ٣ س^{-٢} + ١}{س^{-٢} + س^{-١} + ٣} = ...$

(أ) ٢ (ب) ١ (جـ) ٣ (د) $\frac{١}{٣}$

② $\underset{س \leftarrow ٣}{نهـا} \frac{س^{٣} - ٢٧}{س^{٢} - ٩} = ...$

(أ) $\frac{٣}{٢}$ (ب) $٤\frac{١}{٢}$ (جـ) ٣ (د) ٢٧

③ إذا كانت : $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا} \frac{س^{٢} - ٤ أ}{س - ٢}$ لها وجود فإن : أ = ...

(أ) −١ (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٤

④ $\underset{س \leftarrow \infty}{نهـا} (٤ + ٣ س - س^{٣}) = ...$

(أ) ٤ (ب) ٢ (جـ) ∞ (د) $-\infty$

السؤال الثاني ٨ درجات (كل جزئية درجتان)

أوجد قيمة :

① $\underset{س \leftarrow \infty}{نهـا} \frac{١}{س}\sqrt{٣ + ٤ س^{٢}}$

② $\underset{س \leftarrow \infty}{نهـا} س \left(\sqrt{٤ س^{٢} + ١} - ٢ س\right)$

③ $\underset{س \leftarrow \infty}{نهـا} \frac{س^{٧} + ٥}{٣ س^{٤} - ٨}$

④ $\underset{س \leftarrow ٤}{نهـا} \frac{(س - ٣)^{٧} - ١}{س - ٤}$

الدرجة الكلية ١٠

اختبار 5 حتى درس 5 من الوحدة الثالثة

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٦ درجات (كل جزئية درجة)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① $\lim\limits_{\text{س}\to 0} ٢\,\text{س ظتا } ٤\,\text{س} =$ ....

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) $\frac{1}{2}$ (د) صفر

② $\lim\limits_{\text{س}\to \infty} \frac{\text{س}^3 + 5}{\text{س}\,(2\,\text{س}^2 + 3)} =$ ....

(أ) $\frac{5}{8}$ (ب) ١ (جـ) $\frac{1}{2}$ (د) $\frac{5}{3}$

③ $\lim\limits_{\text{س}\to 0} \frac{2\,\text{س} + \text{جا } 3\,\text{س}}{\text{ظا } 5\,\text{س}} =$ ....

(أ) ٥ (ب) $\frac{6}{5}$ (جـ) ١ (د) صفر

④ $\lim\limits_{\text{س}\to 0} \frac{5 - 5\,\text{جتا س}}{\text{س}} =$ ....

(أ) ٢٥ (ب) ٥ (جـ) صفر (د) ٢

⑤ إذا كان : أ > ب > صفر فإن : $\lim\limits_{\text{س}\to \infty} \frac{\text{س}^{\text{أ}}}{\text{س}^{\text{ب}}} =$ ....

(أ) ∞ (ب) $-\infty$ (جـ) صفر (د) أ − ب

⑥ $\lim\limits_{\text{س}\to 0} \frac{\text{جا س} + \text{جا } 2\,\text{س} + \text{جا } 3\,\text{س} + \text{جا } 4\,\text{س}}{\text{ظا س} + \text{ظا } 2\,\text{س} + \text{ظا } 3\,\text{س} + \text{ظا } 4\,\text{س}} =$ ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٤ (د) ١٠

السؤال الثاني ٤ درجات (كل جزئية درجتان)

أوجد قيمة :

① $\lim\limits_{\text{س}\to 0} \frac{\text{س}^2 + \text{جا } 3\,\text{س}^2}{\text{س ظا } 2\,\text{س}}$

② $\lim\limits_{\text{س}\to 0} \frac{\sqrt{\text{س} + 4} - 2}{\text{س}^2 + \text{س}}$

الدرجة الكلية ١٠

اختبار 6 حتى درس 6 من الوحدة الثالثة

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٦ درجات (كل جزئية درجة)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت : $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^2$ فإن : $\lim\limits_{\text{س}\to 2} \text{د}\left(\text{د}(\text{س})\right) =$ ....

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ١٦ (د) ٣٢

② $\lim\limits_{\text{س}\to 9} \frac{3 - \sqrt{\text{س}}}{27 - \sqrt{\text{س}^3}} =$ ....

(أ) $\frac{1}{9}$ (ب) $\frac{1}{27}$ (جـ) ٣ (د) $-\frac{1}{27}$

③ إذا كانت : $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{أ جتا س} + \frac{15\,\text{جا س}}{\text{س}} & ، \ 0 < \text{س} \\ \frac{\text{س}^6 - 64}{\text{س}^2 - 8} & ، \ 0 > \text{س} \end{cases}$

وكانت د لها نهاية عندما س = ٠ فإن : أ = ...

(أ) −٧ (ب) ٨ (جـ) −١ (د) ١

④ إذا كانت : $\lim\limits_{\text{س}\to \infty} \frac{\text{أ س} + 6}{2\,\text{س} - 7} = 4$ فإن : أ = ... حيث أ ∈ ح

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

⑤ إذا كانت د دالة زوجية وكانت $\lim\limits_{\text{س}\to 2} \text{د}(\text{س}) = 5$ أى الجمل الآتية صحيح ؟

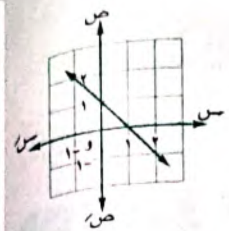
(أ) $\lim\limits_{\text{س}\to -2} \text{د}(\text{س}) = 5$

(ب) $\lim\limits_{\text{س}\to -2} \text{د}(\text{س}) = -5$

(جـ) $\lim\limits_{\text{س}\to -2} \text{د}(\text{س}) =$ صفر

(د) $\lim\limits_{\text{س}\to -2} \text{د}(\text{س}) = -2$

⑥ الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د



فإن : $\lim_{س \to ٢}$ | د (س) | = ...

(أ) −١ (ب) صفر

(جـ) ١ (د) غير موجودة.

السؤال الثانى ٤ درجات

ابحث وجود $\lim_{س \to ٢}$ د (س) إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} \frac{س^٢ - ٧س + ١٢}{س - ٣} & ، س > ٢ \\ ٢س - ٧ & ، س < ٢ \end{cases}$

الدرجة الكلية

١٠

اختبار 7 حتى درس 7 من الوحدة الثالثة

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٦ درجات (كل جزئية درجة)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① الدالة د : د (س) = ٤ س$^{-٢}$ + $\frac{س}{س^٢ - ٩}$ متصلة لكل س ∈ ....

(أ) ح (ب) ح − {٠}

(جـ) ح − {٣ ، −٣} (د) ح − {٣ ، −٣ ، ٠}

② إذا كانت د : د (س) = $\begin{cases} \frac{س^٨ - أ^٨}{س^٥ - أ^٥} & ، س \neq أ \\ ٢٠٠ & ، س = أ \end{cases}$

متصلة عند س = أ فإن : أ = ...

(أ) ٥ (ب) $\frac{٨}{٥}$ (جـ) ١٢٥ (د) $\frac{١}{٥}$

③ الدالة د : د (س) = $\frac{س + ٢}{\sqrt{س} - ٢}$ متصلة لكل س ∈ ....

(أ)]٤ ، ∞[(ب)]٠ ، ∞[(جـ)]٠ ، ∞[− {٤} (د)]−∞ ، ٢[

④ إذا كانت د : د (س) = $\begin{cases} \frac{|س|}{س} + ٦ & ، س < ٠ \\ أ^٢ + جتا ٣س & ، س \geq ٠ \end{cases}$ متصلة عند س = ٠

فإن : أ = ...

(أ) ٢ (ب) $\pm\sqrt{٦}$ (جـ) ± ٢ (د) $\pm\sqrt{٥}$

⑤ إذا كانت د دالة أحادية كثيرة حدود وكانت $\lim_{س \to ٢}$ د (س) = ٣

فإن : $\lim_{س \to ٢}$ د$^{-١}$ (س) = ...

(أ) −٢ (ب) −٣ (جـ) ٢ (د) ٣

⑥ $\lim_{س \to ٠} \frac{س\ جا ٢س + جا^٢ ٣س}{طا^٢ ٣س + س^٢}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ٢ (جـ) صفر (د) $\frac{١١}{١٠}$

السؤال الثانى ٤ درجات

ابحث اتصال الدالة د حيث د (س) = $\begin{cases} س^٢ + ٣ & ، س \geq ١ \\ \frac{س^٢ + ٢س - ٣}{س - ١} & ، س < ١ \end{cases}$

عند س = ١

ثالثًا اختبارات تراكمية قصيرة فى حساب المثلثات

الدرجة الكلية ١٠

اختبار 1 على درس 1 من الوحدة الرابعة

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٦ درجات (كل جزئية درجة ونصف)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① فى Δ أ ب حـ إذا كان : أ = ٦ سم ، ق (∠ ب) = ٢ ق (∠ أ) = ٨٠°

فإن : حـ = ... سم.

(أ) $\frac{\text{٦ جا ٤٠°}}{\text{جا ٦٠°}}$ (ب) $\frac{\text{جا ٦٠°}}{\text{٦ جا ٤٠°}}$ (جـ) $\frac{\text{جا ٤٠°}}{\text{٦ جا ٦٠°}}$ (د) $\frac{\text{٦ جا ٦٠°}}{\text{جا ٤٠°}}$

② إذا كان : أ ب حـ مثلثًا متساوى الأضلاع طول ضلعه يساوى ٨ $\sqrt{٣}$ سم فإن طول قطر الدائرة الخارجة لهذا المثلث يساوى .... سم.

(أ) ٨ (ب) ١٦ $\sqrt{٣}$ (جـ) ١٦ (د) ٤ $\sqrt{٣}$

③ فى المثلث س ص ع إذا كان : $\frac{\text{٢ س}}{\text{جا س}}$ = ٨ سم

فإن مساحة الدائرة المارة برؤوسه تساوى .... سم^2.

(أ) ١٦ π (ب) ٨ π (جـ) ٤ π (د) ٦٤ π

④ إذا كان : أ ب حـ مثلثًا فإن : $\frac{\text{جا (أ + ب)}}{\text{جا أ + جا ب}}$ = ...

(أ) ١ (ب) $\frac{\text{حـ}}{\text{أ + ب}}$ (جـ) $\frac{\text{أ}}{\text{أ + حـ}}$ (د) $\frac{\text{ب}}{\text{أ + حـ}}$

السؤال الثانى ٤ درجات

أ ب حـ مثلث فيه : حـ = ١٩ سم ، ق (∠ أ) = ١١٢° ، ق (∠ ب) = ٣٢°

أوجد لأقرب رقمين عشريين كلًا من : ب ، طول نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث.

الدرجة الكلية ١٠

اختبار 2 حتى درس 2 من الوحدة الرابعة

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٦ درجات (كل جزئية درجة)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① فى المثلث س ص ع إذا كان : $\frac{\text{جا س}}{٣} = \frac{\text{جا ص}}{٤} = \frac{\text{جا ع}}{٥}$

فإن قياس أكبر زاوية فى المثلث يساوى ....

(أ) ٦٠° (ب) ٧٥° (جـ) ٩٠° (د) ١٢٠°

② فى Δ أ ب حـ يكون $\frac{\text{أ}}{\text{أ + ب}}$ = ...

(أ) $\frac{\text{جا أ}}{\text{جا ب}}$ (ب) $\frac{\text{جا أ}}{\text{جا حـ}}$ (جـ) $\frac{\text{جا أ}}{\text{جا أ + جا ب}}$ (د) $\frac{\text{جا أ}}{\text{جا أ + جا حـ}}$

③ طول قطر الدائرة الخارجة للمثلث أ ب حـ الذى فيه : أ = ٨ جا أ سم يساوى .... سم.

(أ) ٤ (ب) ٨ جا أ (جـ) ٨ (د) ٥

④ المثلث س ص ع فيه : س = ص ، $\frac{\text{ع}^2 - \text{٢ س}^2}{\text{س}^2}$ = ١ فإن : ق (∠ ع) = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ١٢٠° (د) ١٥٠°

⑤ إذا كان : أ ب حـ مثلثًا مساحته ٢٤ سم^2 وكان طول نصف قطر الدائرة الخارجة عنه ٥ سم

فإن : جا أ جا ب جا (أ + ب) = ...

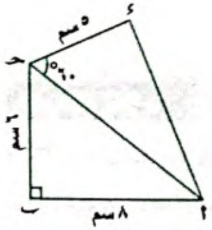
(أ) $\frac{٣}{٢٥}$ (ب) $\frac{٦}{٢٥}$ (جـ) $\frac{٩}{٢٥}$ (د) $\frac{١٢}{٢٥}$

⑥ فى Δ أ ب حـ إذا كان : ق (∠ أ) = ٦٠°

فإن : $\left(١ + \frac{\text{أ}}{\text{حـ}} + \frac{\text{ب}}{\text{حـ}}\right)\left(١ + \frac{\text{حـ}}{\text{ب}} - \frac{\text{أ}}{\text{ب}}\right)$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

السؤال الثانى ٤ درجات

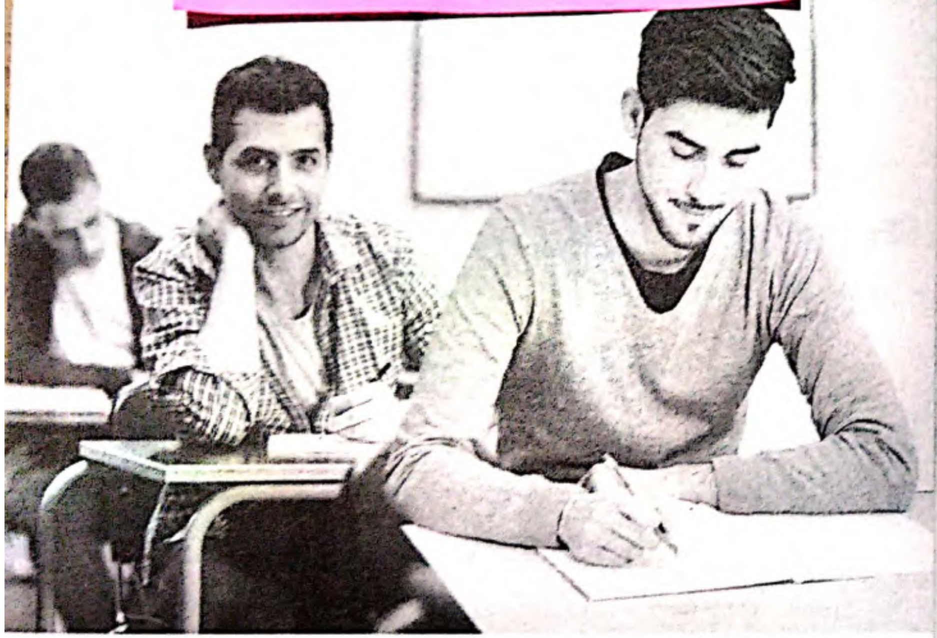


فى الشكل المقابل :

أ ب حـ ء شكل رباعى فيه : أ ب = ٨ سم ، ب حـ = ٦ سم ، ق (∠ ب) = ٩٠° ، ء حـ = ٥ سم ، ق (∠ أ حـ ء) = ٦٠°

أوجد مساحة الدائرة المارة برؤوس Δ أ ء حـ

امتحانات الكتاب المدرسى



◄ **أولًا : نماذج اختبارات الكتاب المدرسى فى الجبر.**

◄ **ثانيًا : نماذج اختبارات الكتاب المدرسى فى التفاضل وحساب المثلثات.**

الدرجة الكلية ١٠

اختبار 3 حتى درس 3 من الوحدة الرابعة

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٦ درجات (كل جزئية درجة)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① عدد حلول المثلث أ ب حـ الذى فيه : ق (∠ أ) = ٦٠° ، أ = ٧ سم ، حـ = ٩ سم هو ....

(أ) واحد. (ب) اثنان. (جـ) صفر. (د) ثلاثة.

② إذا كان نق هو طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس Δ أ ب حـ

فإن : $\frac{أ}{٢ \text{ جا } أ}$ = ...

(أ) نق (ب) ٢ نق (جـ) $\frac{١}{٢}$ نق (د) نق^٢

③ فى المثلث أ ب حـ إذا كان : أ = حـ فإن : جتا حـ = ...

(أ) $\frac{٢ ب}{حـ}$ (ب) $\frac{حـ}{٢ ب}$ (جـ) $\frac{ب}{٢ أ}$ (د) $\frac{حـ}{٢ أ}$

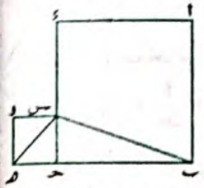
④ قياس أكبر زاوية فى المثلث الذى أطوال أضلاعه ٦ سم ، ١٠ سم ، ١٤ سم يساوى ....

(أ) ١٢٠° (ب) ١٥٠° (جـ) ١٣٥° (د) ٦٠°

⑤ إذا كانت مساحة المثلث أ ب حـ = ١٢ سم^٢ فإن : (ب^٢ + حـ^٢ − أ^٢) ظا أ = ...

(أ) ١٢ (ب) ٢٤ (جـ) ٤٨ (د) ٩٦

⑥ فى الشكل المقابل :



أ ب حـ ء ، س حـ هـ و مربعان

إذا كان : ب حـ = ٢ حـ هـ

فإن : جا (∠ ب س هـ) = ...

(أ) $\frac{١}{\sqrt{٥}}$ (ب) $\frac{٢}{\sqrt{٥}}$ (جـ) $\frac{-١}{\sqrt{٥}}$ (د) $\frac{-٢}{\sqrt{٥}}$

السؤال الثانى ٤ درجات

فى المثلث أ ب حـ إذا كان : ق (∠ أ) = ٤٠° ، أ = ٢٤ سم ، ب = ٣٠ سم

كم مثلثًا يحقق ذلك ؟ أوجد حـ إذا كان ممكنًا فى كل حالة.

الاختبار الأول

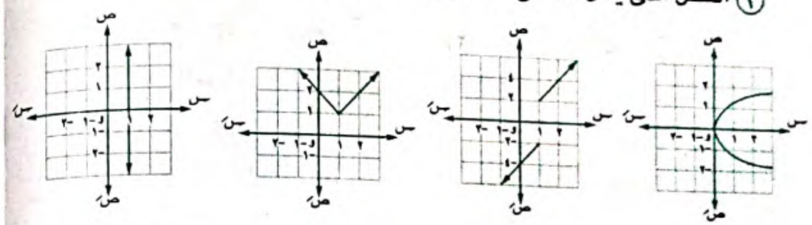
أجب عن الأسئلة الآتية :

1 اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كان : $٥^{س} = ٢$ فإن : $٢٥^{س} =$ ....

(أ) ١٠ (ب) ٦ (جـ) ٥ (د) ٤

② الشكل الذى يمثل دالة فى س من بين الأشكال الآتية هو ....



(أ) (ب) (جـ) (د)

③ إذا كان منحنى ص = لو$_{٤}$ (١ − أس) يمر بالنقطة $(\frac{١}{٤} ، -\frac{١}{٢})$

فإن : أ = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٨

④ الدالة الأحادية من بين الدوال المعرفة بالقواعد الآتية هى ....

(أ) $د_{١}(س) = س + ٢$ (ب) $د_{٢}(س) = س^{٢}$

(جـ) $د_{٣}(س) = |س|$ (د) $د_{٤}(س) = ٥$

2 (أ) عين مجال كل من الدالتين المعرفتين بالقاعدتين الآتيتين :

① $د(س) = \frac{س}{\sqrt{١ - س}}$ ② $ر(س) = \frac{س - ١}{س^{٢} - ١} + \frac{١}{س + ١}$

(ب) إذا كانت د دالة حيث $د(س) = \begin{cases} س^{٢} & ، س > ٠ \\ -٢س & ، س < ٠ \end{cases}$

فارسم الشكل البيانى للدالة ومن الرسم أوجد مدى هذه الدالة.

3 (أ) إذا كانت $د_{١}$: ح ← ح حيث $د_{١}(س) = ٣س - ١$

، $د_{٢}$: [−٢ ، ٢] ← ح حيث $د_{٢}(س) = ٣ - ٢س$

فارسم الدالة ($د_{١} + د_{٢}$) محددًا مجالها ثم ابحث اطراد الدالة.

(ب) أوجد الدالة العكسية للدالة : ص = س + ١ ومثلهما فى شكل واحد.

4 (أ) أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلتين الآتيتين :

① لو$_{٤}$ س = ١ − لو$_{٤}$ (س − ٣) ② |س + ٢| = |س − ٣|

(ب) استخدم منحنى الدالة د حيث $د(س) = س^{٢}$ فى رسم كل من :

① $د_{١}(س) = د(س + ٢)$ ② $د_{٢}(س) = س^{٢} + ٢$

5 (أ) أوجد فى ح مجموعة حل المتباينة : $|٣س - ٢| \geq ٧$

(ب) أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة : $س^{\frac{٤}{٣}} - ١٠ س^{\frac{٢}{٣}} + ٩ =$ صفر

الاختبار الثانى

أجب عن الأسئلة الآتية :

1 اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كان : $٣^{س - ٢} = ٢^{س - ٢}$ فإن : س = ...

(أ) ٣ (ب) −٢ (جـ) صفر (د) ٢

② إذا كان : ص = $\sqrt[٣]{س}$ لكل س ≥ ٠ فإن الدالة العكسية لها هى ص = ...

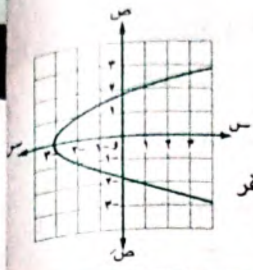
(أ) $\frac{١}{٣} س^{٣}$ (ب) $س^{٣}$ (جـ) $س^{٣} - ١$ (د) $س^{-\frac{١}{٣}}$

③ إذا كانت : د دالة فردية على [−س ، س]

فإن : د(−س) + د(س) = ...

(أ) ٢س (ب) غير معرفة. (جـ) −٢س (د) صفر

④ المنحنى الموضح بالشكل المقابل متماثل حول المستقيم الذى معادلته ....



(أ) س = صفر (ب) ص = صفر (جـ) ص = -٢ (د) س = ٢

٢ (أ) إذا كانت: $د(س) = أ^{س}$ فأثبت أن المقدار: $\frac{1}{د(س) + 1} + \frac{1}{د(-س) + 1}$ له قيمة ثابتة مهما كانت قيمة س

(ب) اختصر لأبسط صورة: $لو_{ب}\, أ^{2} \times لو_{حـ}\, ب^{2} \times لو_{أ}\, حـ$

٣ (أ) استخدم منحنى الدالة د حيث $د(س) = |س|$ لتمثيل كل مما يأتى:

① $د_1(س) = |س| + 1$ ② $د_2(س) = 2 - |س|$

(ب) ارسم منحنى كلٍّ من الدالتين المعرفتين بالقاعدتين الآتيتين وحدد مداها ثم ابحث اطرادها:

① $د(س) = \sqrt{س^{2} - 4س + 4}$

② $د(س) = |س^{2} - 4س + 1|$ حيث $س \in [0 ، 4]$

٤ (أ) ابحث نوع كلٍّ من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك:

① $د_1(س) = س\, جتا\, س$ ② $د_2(س) = \begin{cases} س^{2} ، & س \geq 0 \\ |س| ، & س < 0 \end{cases}$ ③ $د_3(س) = س^{2}|س| - 1$

(ب) أوجد فى ح مجموعة الحل لكل مما يأتى:

① $|س| + س = 0$ ② $2|س - 3| - |6 - 4س| > 0$

٥ (أ) إذا كانت: $د(س) = س^{2} - 1$ ، $ر(س) = س + 1$ فارسم منحنى الدالة $\frac{د}{ر}(س)$ مبينًا مجال ومدى الدالة ثم ابحث اطرادها.

(ب) بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة: $لو\, 25 + \frac{لو\, 8 \times لو\, 16}{لو\, 64}$

الاختبار الأول

أجب عن الأسئلة الآتية:

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

① $\lim_{س \to \infty} \frac{س^{3} + 5}{س(2س^{2} + 3)} = $ ....

(أ) $\frac{5}{8}$ (ب) ١ (جـ) $\frac{1}{2}$ (د) $\frac{5}{3}$

② فى Δ أ ب حـ إذا كان: ٤ جا أ = ٣ جا ب = ٦ جا حـ فإن: ق(∠حـ) = ...

(أ) 89° (ب) 29° (جـ) 57° (د) 82°

③ إذا كانت: $د(س) = \begin{cases} \frac{س^{2} - 1}{س - 1} ، & س \neq 1 \\ 2أ ، & س = 1 \end{cases}$ متصلة عند س = ١ فإن: أ = ...

(أ) صفر (ب) -٢ (جـ) ٢ (د) ١

④ فى Δ س ص ع يكون: $\frac{س^{2} + ص^{2} - ع^{2}}{2\, س\, ص} = $ ....

(أ) جتا س (ب) جتا ص (جـ) جتا ع (د) جا ع

٢ (أ) أوجد: ① $\lim_{س \to 2} \frac{س^{5} - 32}{س^{2} + 3س - 10}$ ② $\lim_{س \to 0} \frac{جا\, 2س + 5\, جا\, 3س}{س}$

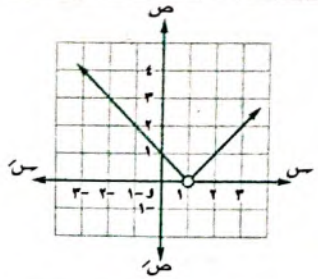
(ب) حل المثلث أ ب حـ الحاد الزوايا الذى فيه: أ = ٢١ سم ، ب = ٢٥ سم وطول قطر الدائرة المارة برؤوسه ٢٨ سم.

٣ (أ) من الرسم البيانى المقابل أوجد:

① $\lim_{س \to 1} د(س)$

② $\lim_{س \to 2} د(س)$

③ د(١)



(ب) أ ب حـ ء متوازى أضلاع فيه : $\text{ق}(\angle \text{أ}) = ٥٠^\circ$ ، $\text{ق}(\angle \text{ء ب حـ}) = ٧٠^\circ$

، $\text{ب ء} = ٨$ سم أوجد محيط متوازى الأضلاع.

---

٤ (أ) أ ب حـ مثلث فيه : $\text{أ} = ٥$ سم ، $\text{ب} = ٧$ سم ، $\text{ق}(\angle \text{أ}) = ٤٠^\circ$

أوجد : $\text{ق}(\angle \text{ب})$

(ب) أوجد قيمة أ التى تجعل الدالة د متصلة عند $\text{س} = ٢$ حيث :

$$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^٢ - ١ & ، \text{س} \geq ٢ \\ \text{س} - ٢\text{أ} & ، \text{س} < ٢ \end{cases}$$

---

٥ (أ) ابحث وجود نهاية للدالة د حيث :

$$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \frac{\text{طا } ٢\text{س}}{\text{جا س}} & \text{عندما } \text{س} > ٠ \\ \frac{٥\text{س} + ٦}{\text{س} + ٣} & \text{عندما } \text{س} < ٠ \end{cases}$$

عندما $\text{س} \leftarrow ٠$

(ب) أوجد : $\lim_{\text{س} \to ١} \frac{٤ - \sqrt{\text{س} + ١٥}}{١ - \text{س}^٢}$

الاختبار الثانى

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① $\lim_{\text{س} \to ٣} \frac{\text{س} - ٣}{\text{س}^٢ - ٩} = \text{.............}$

(أ) ٣ (ب) $\frac{١}{٩}$ (جـ) $\frac{١}{٣}$ (د) $\frac{١}{٦}$

② فى $\triangle \text{أ ب حـ}$ يكون : $\text{جتا}(\text{أ} + \text{ب}) = \text{.............}$

(أ) $\frac{\text{أ}^٢ + \text{ب}^٢ - \text{حـ}^٢}{٢\text{أ ب}}$ (ب) $\frac{\text{أ}^٢ + \text{حـ}^٢ - \text{ب}^٢}{٢\text{أ ب}}$

(جـ) $\frac{\text{ب}^٢ + \text{حـ}^٢ - \text{أ}^٢}{٢\text{ب حـ}}$ (د) $\frac{\text{حـ}^٢ - \text{أ}^٢ - \text{ب}^٢}{٢\text{أ ب}}$

③ أ ب حـ مثلث فيه : $\frac{\text{جا أ}}{٣} = \frac{٢\text{ جا ب}}{٥} = \frac{\text{جا حـ}}{٤}$ فإن : $\text{أ} : \text{ب} : \text{حـ} = \text{.............}$

(أ) ٦ : ٥ : ٨ (ب) ٨ : ٥ : ٦ (جـ) ٧ : ٢ : ٤ (د) ٣ : ٥ : ٦

④ $\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\sqrt{\text{س}^٢ + ٣}}{٢\text{س} + ١} = \text{.............}$

(أ) ١ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) ٣

---

٢ (أ) إذا كانت الدالة د حيث $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \frac{\text{س}^٢ + ٢\text{س} - ٣}{\text{س} + ٣} & ، \text{س} \neq -٣ \\ \text{س} + \text{أ} & ، \text{س} = -٣ \end{cases}$

متصلة عند $\text{س} = -٣$ فأوجد : قيمة أ

(ب) أ ب حـ مثلث فيه : $\frac{١}{٣} \text{ جا أ} = \frac{١}{٤} \text{ جا ب} = \frac{١}{٥} \text{ جا حـ}$

أوجد : $\text{ق}(\angle \text{حـ})$ وإذا كان محيط المثلث = ٢٤ سم أوجد مساحته.

---

٣ (أ) أوجد : $\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{١ - \text{جتا س} + \text{جا } ٣\text{س}}{١ - \text{جتا س} + \text{طا } ٢\text{س}}$

(ب) حل المثلث أ ب حـ الذى فيه : $\text{أ} = ٩$ سم ، $\text{ب} = ١٥$ سم ، $\text{ق}(\angle \text{حـ}) = ١٠٦^\circ$

---

٤ (أ) أوجد : $\lim_{\text{س} \to -٢} \frac{(\text{س} + ٣)^٥ - ١}{\text{س}^٢ - ٤}$

(ب) أ ب حـ ء شكل رباعى فيه : $\text{أ ب} = ٢٧$ سم ، $\text{ب حـ} = ١٢$ سم ، $\text{حـ ء} = ٨$ سم

، $\text{ء أ} = ١٢$ سم ، $\text{أ حـ} = ١٨$ سم أثبت أن : $\overleftarrow{\text{أ حـ}}$ ينصف $\angle \text{ب أ ء}$

ثم أوجد مساحة الشكل أ ب حـ ء

---

٥ (أ) أوجد قيمة :

① $\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\sqrt{\text{س} + ٤} - ٢}{\text{س}^٢ + \text{س}}$ ② $\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{١}{\text{س}} \sqrt{٣ + ٤\text{س}^٢}$

(ب) شكل خماسى منتظم محيطه ٣٠ سم. أوجد مساحة سطحه.

يمكنك حل الامتحانات التفاعلية من خلال مسح QR code الخاص بكل امتحان

◄ أولًا : نماذج الامتحانات النهائية.

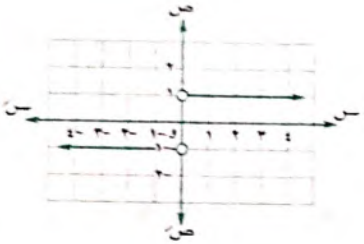
◄ ثانيًا : نماذج امتحانات بنظام أسئلة الاختيار من متعدد.

النموذج الأول

امتحان تفاعلي ١

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ مدى الدالة الممثلة بالشكل المقابل هو ....



(أ) $\{1\}$

(ب) $\{1 ، -1\}$

(جـ) $\{-1\}$

(د) ح

---

٢ إذا كانت النقطة $\left(س ، \frac{٤}{س}\right)$ نقطة تقاطع منحنى الدالة د والدالة العكسية لها $د^{-1}$

فإن : س = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ± ٢ (د) ± ٤

---

٣ $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{٢س + ٣}{٥س^{٢} + ٤} =$ ....

(أ) ٢ (ب) صفر (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{٢}{٥}$

---

٤ في Δ أ ب جـ إذا كان : ٤ جا أ = ٣ جا ب = ٦ جا جـ فإن : ق(∠جـ) = ...

(أ) ٨٩° (ب) ٢٩° (جـ) ٥٧° (د) ٨٢°

---

٥ أ ب جـ مثلث فيه : ق(∠جـ) = $٢٣' \ ٩٦^\circ$ ، أ = ٧ سم ، ب = ٩ سم

أوجد : جـ ، مساحة Δ أ ب جـ لأقرب $سم^{٢}$

---

٦ إذا كانت : د(١) = ٣ ، ر(٣) = ٥ فإن : (ر ∘ د) (١) = ...

(أ) ٣ (ب) ٥ (جـ) ١٥ (د) $\frac{٣}{٥}$

٧ مجموعة حل المعادلة : $٢^{٢س} - ١٢ \times ٢^{س} + ٢^{٥}$ = صفر في ح هي ....

(أ) {٢ ، ٣} (ب) {٢} (جـ) {٣} (د) {٤ ، ٨}

---

٨ استخدم منحنى الدالة د حيث د (س) = $\frac{١}{س}$ لتمثيل منحنى الدالة ر حيث ر (س) = د (س − ٢) + ٢ ومن الرسم عيّن مداها وابحث اطرادها.

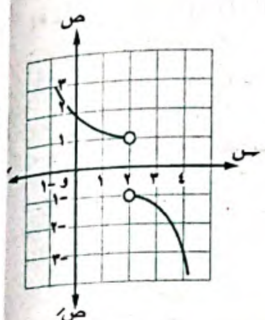
---

٩ $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{(س + ٢)^{٥} - ٣٢}{س}$ = ...

(أ) ٢٥ (ب) ٦٤ (جـ) ٨٠ (د) ١٠٠

---

١٠ الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د فإن : $\lim\limits_{س \to ٢}$ | د (س) | = ...



(أ) ١

(ب) −١

(جـ) ٢

(د) غير موجودة.

---

١١ عدد الحلول الممكنة للمثلث ل م ن حيث : ق (∠ل) = ٤٠° ، لَ = ١٢ سم ، مَ = ١٥ سم يساوي ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) صفر (د) عدد لا نهائي.

---

١٢ مجموع جذري المعادلة : $٢٥^{س} - ١٢ \times ٥^{س} + ٢٧ = ٠$ يساوي ....

(أ) $لو_{٥}$ ١٢ (ب) ١٢ (جـ) $لو_{٥}$ ٢٧ (د) ٢٧

---

١٣ إذا كان : س = ٥ + ٢$\sqrt{٦}$ فإن : لو $\left(س + \frac{١}{س}\right)$ = ...

(أ) ١ (ب) ٥ − ٢$\sqrt{٦}$ (جـ) ١٠ (د) ٥ + ٢$\sqrt{٦}$

١٤ أ ب جـ مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه ٥$\sqrt{٣}$ سم فإن طول قطر الدائرة المارة برؤوسه يساوي .... سم.

(أ) ٥$\sqrt{٣}$ (ب) ١٠$\sqrt{٣}$ (جـ) ١٠ (د) ٥

---

١٥ إذا كانت د (س) = ٢ + $\sqrt{٣ - س}$ فأوجد مجال ومدى د ثم أوجد $د^{-١}$ (س) وعين مجال $د^{-١}$ ومداها.

---

١٦ إذا كانت د : ح ← ح حيث د (س) = (أ + ١) س + ب − ٢ وكانت د (س) تربط كل عدد حقيقي بنفسه فإن : (أ ، ب) = ...

(أ) (١ ، ٣) (ب) (٠ ، ٣) (جـ) (٠ ، ٢) (د) (١ ، ٢)

---

١٧ إذا كانت د (س) = $\frac{س^{٢} - ١٦}{س - ٤}$ عند س ≠ ٤ فإن : قيمة د (٤) التي تجعل الدالة متصلة عند هذا الموضع تساوي ....

(أ) غير معرفة. (ب) $\lim\limits_{س \to ٤} \frac{س^{٢} - ١٦}{س - ٤}$

(جـ) صفر (د) ١٦

---

١٨ مجموعة حل المعادلة : $لو_{٣}$ س × $لو_{٢}$ ٣ = ٥ في ح هي ....

(أ) {٣٢} (ب) {٥} (جـ) {٣} (د) {٢}

---

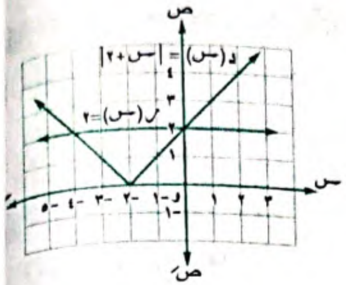
١٩ إذا كان أ ب جـ مثلثًا فيه ق (∠أ) : ق (∠ب) : ق (∠جـ) = ٣ : ٥ : ٤ فإن $حـ^{٢}$: $أ^{٢}$ = ...

(أ) $\sqrt{٦}$: ٢ (ب) ٢ : ٣ (جـ) ٤ : ٣ (د) ٣ : ٢

٢٠ في الشكل المقابل : مجموعة حل المتباينة

د (س) > ر (س) في ح

هي ....



(أ) {−٤ ، ٠}

(ب) [−٤ ، ٠]

(جـ) ح − [−٤ ، ٠]

(د)]−٤ ، ٠[

---

٢١ إذا كانت د دالة حيث :

د (س) = { س^{٢} − س + ٤ عندما س < ٢ ؛ ك عندما س = ٢ ؛ ٥ س − ٤ عندما س > ٢ }

① ابحث وجود نهـــا$_{س \leftarrow ٢}$ د (س)

② أوجد إن أمكن قيمة ك التي تجعل د متصلة عند س = ٢

---

٢٢ نوع الدالة د : د (س) = $\frac{\text{جاس}}{\text{س}}$ هي ....

(أ) زوجية. (ب) فردية. (جـ) لا زوجية ولا فردية. (د) زوجية وفردية.

---

٢٣ نهـــا$_{س \leftarrow ٠}$ $\frac{\text{جا}\ \pi\ |س|}{٤\ س}$ = ...

(أ) $\frac{\pi}{٤}$ (ب) ١ (جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) غير موجودة.

---

٢٤ إذا كان : س$^{\frac{٣}{٢}}$ = ٨ فإن : س = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٨ (د) ٩

---

٢٥ نهـــا$_{س \leftarrow ٢}$ $\frac{س^{٢} - ٧ س + ٦}{٣ س^{٢} - ٨ س + ٤}$ = ...

(أ) $\frac{٥}{٤}$ (ب) $\frac{٤}{٥}$ (جـ) $\frac{١}{٣}$ (د) $\frac{٣}{٢}$

٢٦ إذا كانت : نهـــا$_{س \leftarrow ١}$ $\frac{٢ س + أ}{س + ١}$ = ٥ فإن : أ = ...

(أ) ٢ (ب) ٥ (جـ) ٨ (د) ١٠

---

٢٧ في أي Δ س ص ع يكون : سَ^{٢} + صَ^{٢} − ٢ سَ صَ جتا ع = ...

(أ) سَ^{٢} (ب) صَ^{٢} (جـ) عَ^{٢} (د) عَ

---

٢٨ مجموعة الحل في ح للمتباينة : $\sqrt{٤ س^{٢} - ١٢ س + ٩}$ ≥ ٩ تساوي ....

(أ)]−٣ ، ٦[(ب) [−٣ ، ٦] (جـ) ح − [−٣ ، ٦] (د) ح −]−٣ ، ٦[

---

٢٩ مجموعة حل المعادلة : | ٣ − ٢ س | − ٥ س = ٣ في ح هي ....

(أ) {٠ ، ٣} (ب) {٠ ، −٢} (جـ) {٠} (د) ∅

---

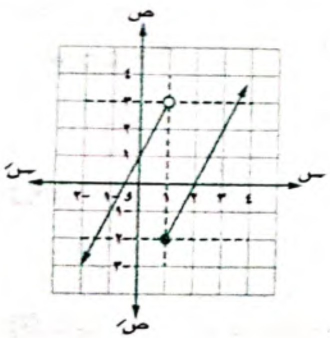
٣٠ إذا كانت : د (س − ١) = ٢$^{س - ٥}$ ، د (س + ٣) = $\frac{١}{٣٢}$ فإن : س = ...

(أ) −٤ (ب) −٢ (جـ) ٤ (د) ٦

---

٣١ إذا كان الشكل المقابل

يمثل منحنى الدالة د فإن :



نهـــا$_{س \leftarrow ٠}$ د (س) + د (١$^{+}$) + د (١$^{-}$) = ...

(أ) ٢

(ب) ٣

(جـ) ٤

(د) ٦

---

٣٢ Δ أ ب حـ محيطه ٣٢ سم ، وكان : جا أ + جا حـ = $\frac{٢}{٣}$ ، جا ب = $\frac{١}{٤}$

فإن : بَ = ...

(أ) ٦ (ب) ٩ (جـ) ١٢ (د) ١٥

النمـــوذج الثانى

امتحان تفاعلى ٢

أجب عن الأسئلة الآتية :

١) إذا كانت د : ط ⟵ ط حيث د (س) = ٢ س ، ت : ط ⟵ ط حيث

ت (س) = { س/٢ ، س زوجى ؛ (س + ١)/٢ ، س فردى } فإن : (د ∘ ت) (٣) − (د ∘ ت) (٨) = ...

(أ) ٤ (ب) ٨ (جـ) −٤ (د) −٥

---

٢) نهـــا (س ⟵ ∞) $\left(\frac{٣}{٥}\right)^{\frac{١}{س}}$ = ...

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) $\frac{٣}{٥}$ (د) ∞

---

٣) أ ب جـ مثلث فيه ء منتصف ب جـ أثبت أن : (أ ب)^٢ + (أ جـ)^٢ = ٢ (أ ء)^٢ + ٢ (ب ء)^٢

وإذا كان : أ ب = ٥ سم ، أ جـ = ٨ سم ، ب جـ = ١٢ سم أوجد : أ ء

---

٤) إذا كانت د : د (س) = { (س^٢ − ١)/(س − ١) ، س ≠ ١ ؛ ٢ أ ، س = ١ } متصلة عند س = ١

فإن : أ = ...

(أ) صفر (ب) −٢ (جـ) ٢ (د) ١

---

٥) Δ أ ب جـ فيه : $\frac{أ}{\text{جا } أ}$ = ٦ سم فإن طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه = ... سم

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٥ (د) ٦

---

٦) إذا كانت : د دالة فردية وكان س د (س) + س^٢ د (−س) = ٢

فإن : د (٢) = ...

(أ) ٣ (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) $\frac{-١}{٣}$ (د) −٣

---

٧) إذا كان : س = ٥ + ٢ $\sqrt{٦}$ أوجد فى أبسط صورة قيمة : لو $\left(\frac{١}{س} + س\right)$ بدون الحاسبة.

٨) فى Δ س ص ع يكون : $\frac{س^٢ + ص^٢ - ع^٢}{٢ س ص}$ = ...

(أ) جتا س (ب) جتا ص (جـ) جتا ع (د) جا ع

---

٩) نهـــا (س ⟵ ١) $\frac{س^٢ - س^{-٢}}{س - س^{-١}}$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) −٢

---

١٠) إذا كانت : د (س) = ٣$^{-س}$ فإن مجموعة الحل فى ع للمعادلة :

د (٢ س) − ٢٨ د (س) + د (٣) = صفر هى ....

(أ) {١ ، ٢٧} (ب) {٢٧} (جـ) {٠ ، ٣} (د) {٣}

---

١١) إذا كان : لو أ ∈]٠ ، ١[فإن : أ ∈ ....

(أ)]٠ ، ١[(ب)]١ ، ٢[(جـ)]١ ، ١٠[(د)]١ ، ∞[

---

١٢) منحنى الدالة الزوجية يكون متماثلًا حول المستقيم ....

(أ) ص = س (ب) $\overleftrightarrow{ص ص}$ (جـ) $\overleftrightarrow{س س}$ (د) ص = −س

---

١٣) Δ ل م ن فيه : $\frac{\text{جا } ل}{٣} = \frac{٢ \text{ جا } م}{٣} = \frac{\text{جا } ن}{٤}$ فإن : لَ : مَ : نَ = ...

(أ) ٦ : ٨ : ٣ (ب) ٣ : ٦ : ٨ (جـ) ٨ : ٣ : ٦ (د) ٦ : ٣ : ٨

---

١٤) أ ب جـ مثلث فيه : جـَ = ٧ سم ، ق (∠ أ) = ٧٠° ، ق (∠ ب) = ٤٠°

فإن : بَ = ... سم

(أ) ٦,٣ (ب) ٨,٤ (جـ) ٣,٦ (د) ٤,٨

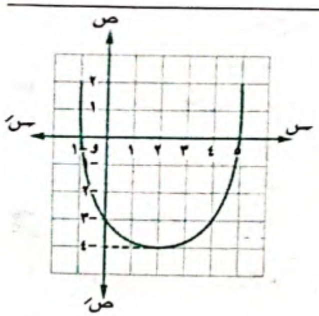
---

١٥) إذا كان الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د فإن :

نهـــا (س ⟵ ٢) $\frac{[د (س)]^٢ + د (س) - ١٢}{د (س) + ٤}$ = ...

(أ) −٧ (ب) −٤

(جـ) −١ (د) ٣



١٦ استخدم منحنى الدالة د : د(س) = $\frac{١}{س}$ لرسم منحنى الدالة ر : ر(س) = $\frac{١}{س - ٢}$ + ٣ ومن الرسم عين مجال ومدى ر واطرادها ونوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك ، هل الدالة ر أحادية أم لا ؟

---

١٧ مدى الدالة د : د(س) = $\frac{س - ٢}{٢ - س}$ يساوى ....

(أ) ح (ب) ح − {٢} (جـ) ح − {−٢} (د) {−١}

---

١٨ إذا كان : ص = أ$^{\text{لو}_أ \text{س}}$ فإن : ....

(أ) س + ص = ٠ (ب) س = ٢ ص
(جـ) س − ص = ٠ (د) س = $\frac{١}{٢}$ ص

---

١٩ لو$_٣$ ٥ × لو$_٢$ ٣ × لو$_٥$ ١٦ = ...

(أ) ٣٠ (ب) ١٥ (جـ) لو ١٠٠٠٠ (د) لو$_{٢٠}$ ٢٤٠

---

٢٠ المنحنى ر(س) = س^٢ + ٤ هو نفس المنحنى د(س) = س^٢ بإزاحة مقدارها ٤ وحدات فى اتجاه ....

(أ) $\overleftarrow{\text{و س}}$ (ب) $\overrightarrow{\text{و س}}$ (جـ) $\overleftarrow{\text{و ص}}$ (د) $\overrightarrow{\text{و ص}}$

---

٢١ ابحث وجود نهاية د(س) = $\begin{cases} \text{س}^٢ + ١ & \text{لكل س} < ٢ \\ ٢\text{س} + ١ & \text{لكل س} \geq ٢ \end{cases}$ عند س = ٢

---

٢٢ الدالة د حيث د(س) = أ$^{\text{س}}$ تكون تناقصية على مجالها إذا كان ....

(أ) أ = ١ (ب) أ > ١ (جـ) ٠ < أ < ١ (د) أ = −١

---

٢٣ $\lim\limits_{\text{س} \to \frac{\pi}{٢}}$ (٢ س + جا س) = ...

(أ) π (ب) π − ١ (جـ) ١ − π (د) π + ١

---

٢٤ $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \frac{\sqrt{\text{س}^٢}}{\text{س}}$ = ...

(أ) صفر (ب) ٢ (جـ) −١ (د) ١

٢٥ مجموعة الحل فى ح للمعادلة : |س − ٧| = ٢ س − ٢ تساوى ....

(أ) {٣ ، −٥} (ب) {٣} (جـ) {−٥} (د) ∅

---

٢٦ إذا كانت : ص = $\sqrt[٣]{\text{س}}$ لكل س ≤ ٠ ، فإن الدالة العكسية لها هى ص = ...

(أ) $\frac{١}{٣}$ س^٣ (ب) س^٣ (جـ) س^٣ − ١ (د) س$^{-\frac{١}{٣}}$

---

٢٧ إذا كان محيط Δ أ ب جـ = ٣٣ سم وكان جا أ + جا جـ = $\frac{٢}{٣}$ ، جا ب = $\frac{١}{٤}$

فإن : أ جـ = ... سم

(أ) ٦ (ب) ٩ (جـ) ١٢ (د) ١٥

---

٢٨ $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{جا } ٢\text{س} + ٥ \text{ ظا } ٣\text{س}}{\text{س}}$ = ...

(أ) ٢ (ب) ١٥ (جـ) ٢١ (د) ١٧

---

٢٩ مجموعة حل المتباينة : $\sqrt{\text{س}^٢ - ٤\text{س} + ٤}$ > ٠ فى ح هى ....

(أ) ح − {٢} (ب) ح − {−٢} (جـ) ح (د) ∅

---

٣٠ إذا كانت ر(س) دالة وكانت : $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \frac{\text{ر(س)} - ٨}{\text{س} - ٢}$ = ٧

فإن : $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \frac{٢\text{س}^٢ - \text{ر(س)}}{\text{س} - ٢}$ = ...

(أ) ١ (ب) ٧ (جـ) ٨ (د) ١٥

---

٣١ عدد الحلول الممكنة للمثلث أ ب جـ حيث : ق(∠أ) = ١١٠° ، أ = ٧ سم

، ب = ٤ سم هو ....

(أ) ١ (ب) صفر (جـ) عدد لا نهائى. (د) ٢

---

٣٢ مجموعة حل المعادلة : لو (س + ٢) + لو (س − ٢) = ١ − لو ٢ فى ح هى ....

(أ) {لو$_٥$ ١٢٥} (ب) {لو$_٢$ ١٦} (جـ) {لو$_٣$ ٩} (د) {لو$_{١٠٠}$ ١٠٠}

امتحان تفاعلى ٣

النمـــوذج الثالث

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ إذا كانت : د (س) = $٧^{س + ١}$

أوجد قيمة س التى تحقق : د (٢ س − ١) + د (س − ٢) = ٥٠

---

٢ إذا كان : لو ٣ = س ، لو ٥ = ص فإن : لو ١٥ = ...

(أ) س ص (ب) $\frac{س}{ص}$ (جـ) س + ص (د) س − ص

---

٣ $نهـا_{س \to \infty} \frac{٥ + س^{-٢}}{١ + ٣ س^{-٢}}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{٥}{٤}$ (جـ) $\frac{٥}{٣}$ (د) ٥

---

٤ إذا كان : $٩^{س} = ٢$ ، $٢٧^{ص} = ٤$ فإن : $\frac{س − ص}{س + ص}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٧}$ (ب) $\frac{-١}{٧}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{-٤}{٣}$

---

٥ إذا كانت : د (س) = $لو_{أ}$ (٢ س + ٤) ، $د^{-١}$ (٥) = ١٤ فإن : أ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

---

٦ $نهـا_{س \to ١٦} \frac{\sqrt{س} − ١}{س − ١٦}$ = ...

(أ) صفر (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) ١ (د) ليس لها وجود.

---

٧ $نهـا_{س \to ٠} \frac{س (جتا س + جتا ٣ س + جتا ٥ س)}{جا س}$ = ...

(أ) ١ (ب) ٣ (جـ) ٩ (د) ١٥

---

٨ لو ٢٥ + $\frac{لو ٨ \times لو ١٦}{لو ٦٤}$ = ...

(أ) ٢ (ب) ٢ لو ٢ (جـ) ٣ (د) ١

٩ أ ب حـ ء متوازى أضلاع فيه : ق (∠ أ) = ٥٠° ، ق (∠ ء ب حـ) = ٧٠° ، ب ء = ٨ سم أوجد محيط متوازى الأضلاع لأقرب سم.

---

١٠ $نهـا_{س \to ٢} \frac{س − ٢}{س + ١}$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ∞

---

١١ $نهـا_{س \to ٠} \frac{١ − قا س}{جتا س − ١}$ = ...

(أ) ٢ (ب) ١ (جـ) صفر (د) −١

---

١٢ $نهـا_{س \to ٥} \frac{س^{٢} − ٨ س + ١٥}{س^{٢} − ١٠ س + ٢٥}$ = ...

(أ) غير موجودة. (ب) صفر (جـ) ٢ (د) ٣

---

١٣ المساحة المحصورة بين منحنيى الدالتين د : د (س) = | س + ٣ | − ٢ ، ر : ر (س) = صفر هى .... وحدة مربعة.

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

---

١٤ إذا كان : $لو_{٣}$ ص = س فإن الصورة الأسية هى ....

(أ) ص = $س^{٣}$ (ب) س = $ص^{٣}$ (جـ) س = $٣^{ص}$ (د) ص = $٣^{س}$

---

١٥ إذا كانت : د دالة فردية على [− س ، س] فإن : د (− س) + د (س) = ...

(أ) ٢ س (ب) غير معرفة. (جـ) −٢ س (د) صفر

---

١٦ فى Δ أ ب حـ إذا كان : ٢ جا أ = ٣ جا ب = ٤ جا حـ فإن : أَ : بَ : حـَ = ...

(أ) ٢ : ٣ : ٤ (ب) ٤ : ٣ : ٢ (جـ) ٣ : ٤ : ٦ (د) ٦ : ٤ : ٣

---

١٧ $نهـا_{س \to ٢} \frac{س^{٥} − ٣٢}{س^{٢} + ٣ س − ١٠}$ = ...

(أ) ٨٠ (ب) $\frac{٨٠}{٧}$ (جـ) $\frac{١٦}{٧}$ (د) ١٦

١٨ طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب جـ الذى فيه : ق(∠أ) = ٣٠° ، أ = ١٠ سم يساوى ....

(أ) ١٠ سم (ب) ٢٠ سم (جـ) ٥ سم (د) ٤٠ سم

١٩ الدالة د : د(س) = $\begin{cases} س^{٢} & ، س > ٢ \\ -س^{٢} & ، س \leq ٢ \end{cases}$

متناقصة فى الفترة ....

(أ) $]٠ ، ٢[$ (ب) $]-\infty ، ٠[$ (جـ) ح − $[٠ ، ٢]$ (د) $]٠ ، \infty[$

٢٠ مجال الدالة د : د(س) = $لو_{س}$ س هو ....

(أ) س > ٠ (ب) س > ١ (جـ) ٠ < س < ١ (د) ٠ ≤ س ≤ ١

٢١ إذا كانت : د(س) = $\sqrt{س - ٢}$ ، ر(س) = $\sqrt{٥ - س}$

فإن مجال (د ∘ ر) = ...

(أ) $]-\infty ، ٥]$ (ب) $]-\infty ، ١]$ (جـ) $[١ ، \infty[$ (د) $[٥ ، \infty[$

٢٢ ارسم الشكل البيانى للدالة د : د(س) = $\begin{cases} |س| & ، س \leq ٠ \\ س^{٢} & ، س > ٠ \end{cases}$

ومن الرسم حدد مدى الدالة وابحث اطرادها.

٢٣ مجموعة حل المعادلة : |س + ٢| + س = −٢ فى ح هى ....

(أ) ∅ (ب) ح (جـ) $]-\infty ، -٢[$ (د) $]-\infty ، -٢]$

٢٤ قياس أكبر زاوية فى المثلث الذى أطوال أضلاعه ٣ سم ، ٥ سم ، ٧ سم

يساوى ....

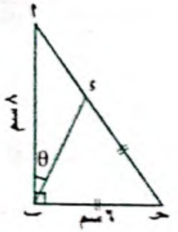
(أ) ١٥٠° (ب) ١٢٠° (جـ) ٦٠° (د) ٣٠°

٢٥ أ ب جـ مثلث حاد الزوايا فيه : أ = ٥ سم ، ب = ٧ سم ، ق(∠أ) = ٤٠°

فإن مساحة سطح Δ أ ب جـ تساوى .... سم^{٢}

(أ) ١٦ (ب) ١٧ (جـ) ١٨ (د) ٧

٢٦ فى الشكل المقابل :



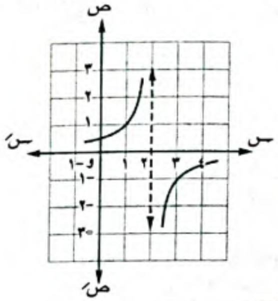
إذا كان : جـ ء = جـ ب = ٦ سم

فإن : ظا θ = ...

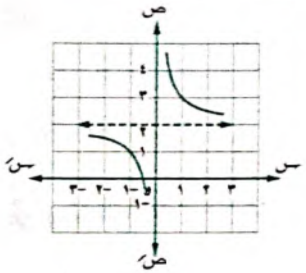
(أ) $\frac{٣}{٤}$ (ب) $\frac{٤}{٣}$

(جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) ٢

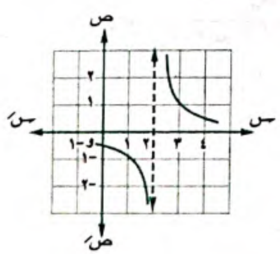
٢٧ إذا كانت : د(س) = $\frac{١}{س - ٢}$ فإن الشكل الذى يمثل الدالة د هو ....



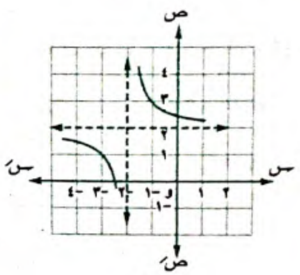
(أ)



(ب)



(جـ)



(د)

١٨ إذا كانت د : د(س) = $\begin{cases} \frac{(س + ٣)^{٥} - ٢٤٣}{س} & ، س \neq صفر \\ ك & ، س = صفر \end{cases}$

متصلة عند س = صفر **أوجد : قيمة ك**

---

١٩ $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{\sqrt{٩س^{٢} + ٤} + ٥س}{٤س + ٢}$ = ...

(أ) ∞ (ب) ٥ (جـ) ٣ (د) ٢

---

٢٠ مجموعة حل المتباينة : |٢س − ٦| + |٢ − س| < ١٢ هي ....

(أ) $]-١ ، ٧[$ (ب) ح − $[-٣ ، ٩]$

(جـ) ح − $[-١ ، ٧]$ (د) $]-٣ ، ٩[$

---

٢١ إذا كان : ٢ لو ص + ٤ لو س − ٣ لو س ص = ٢ (١ − لو ٢) وكان : س = ك ص

فإن : ك = ...

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ١٦ (د) ٢٥

---

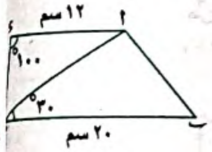
٢٢ في الشكل المقابل :

$\overline{أء} // \overline{بجـ}$

ق(∠أجـب) = ٣٠° ، بجـ = ٢٠ سم

، ق(∠أءجـ) = ١٠٠° ، أء = ١٢ سم

فإن : مساحة Δ أبجـ = ... سم^{٢} تقريبًا.



(أ) ٦٠ (ب) ٧٧ (جـ) ١٠٤ (د) ١٢٠

النمــوذج الرابع

امتحان تفاعلي

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ $\lim\limits_{س \to ٠}$ ٥س قتا ٢س = ...

(أ) $\frac{٥}{٢}$ (ب) ١٠ (جـ) $\frac{٢}{٥}$ (د) صفر

---

٢ في Δ أبجـ : $\frac{ب^{٢} + جـ^{٢} - أ^{٢}}{٢ب جـ}$ = ...

(أ) جتا أ (ب) جتا ب (جـ) جتا جـ (د) جا أ

---

٣ مجموعة الحل في ح للمتباينة : |س − ١| ≤ ٣ يساوي ....

(أ) $[-٢ ، ٤]$ (ب) $]-٢ ، ٤[$ (جـ) ح − $]-٢ ، ٤[$ (د) ح − $[-٢ ، ٤]$

---

٤ $\lim\limits_{س \to -١} \frac{س^{٢} + س}{س^{٢} + ١}$ = ...

(أ) صفر (ب) $-\frac{١}{٢}$ (جـ) −١ (د) ليس لها وجود.

---

٥ طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس Δ س ص ع الذي فيه : سَ = ٢٠ جا س سم

يساوي .... سم.

(أ) ٥ (ب) ١٠ (جـ) ٢٠ (د) ٤٠

---

٦ إذا كان : $٢^{س} = ٣^{ص} = ٦$ فأي مما يأتي صحيح ؟

(أ) ص − س = س ص (ب) س − ص = س ص

(جـ) س ص = $\frac{س}{ص}$ (د) س + ص = س ص

---

٧ مجموعة حل المعادلة : لو ٥س = −١ في ح هي ....

(أ) $\{\frac{١}{١٠}\}$ (ب) $\{\frac{١}{٥٠}\}$ (جـ) $\{١\}$ (د) $\{٥٠\}$

٨ أوجد قياس أصغر زاوية فى Δ أ ب حـ الذى فيه : أ = ٨ سم ، ب = ٧ سم ، ومحيطه ٢١ سم.

٩ إذا كانت كل من د ، ر حيث د (س) = ٢ س + أ ، ر (س) = ب س + ٣ دالة عكسية للأخرى فما قيمة كل من أ ، ب ؟

١٠ $\lim\limits_{هـ \to ٠} \frac{(٢ - ٣ هـ)^{٧} - ١٢٨}{٤ هـ}$ = ...

(أ) -٣٣٦ (ب) ٣٣٦ (جـ) ١٩٢ (د) -١٩٢

١١ إذا كان منحنى الدالة د : د (س) = $لو_{٢}$ (١ - أ س) يمر بالنقطة $\left(\frac{١}{٨} ، \frac{-١}{٢}\right)$

فإن : أ = ...

(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) ٨

١٢ | د (س) | = ...

(أ) $\begin{cases} د(س) ، & س \geq ٠ \\ -د(س) ، & س < ٠ \end{cases}$ (ب) $\begin{cases} د(س) ، & س < ٠ \\ -د(س) ، & س \geq ٠ \end{cases}$

(جـ) $\begin{cases} د(س) ، & د(س) \geq ٠ \\ -د(س) ، & د(س) < ٠ \end{cases}$ (د) $\begin{cases} د(س) ، & د(س) < ٠ \\ -د(س) ، & د(س) \geq ٠ \end{cases}$

١٣ إذا كانت الدالة د : د (س) = $\begin{cases} أ س - ٢ & \text{عندما } س < -١ \\ ٣ س - ٢ & \text{عندما } س > -١ \end{cases}$

لها نهاية عند س = -١ أوجد : قيمة أ

١٤ $\lim\limits_{س \to \infty} لو\, ٥^{\frac{١}{س}}$ = ...

(أ) ٥ (ب) ١ (جـ) $\frac{١}{٥}$ (د) صفر

١٥ جميع العلاقات الآتية تكون فيها ص دالة فى س ما عدا العلاقة ....

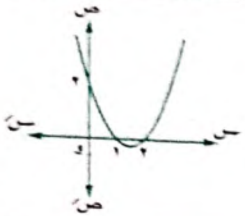
(أ) ص = ٣ س + ١ (ب) ص = $س^{٢}$ - ٤

(جـ) س = $ص^{٢}$ - ٢ (د) ص = جا س

١٦ ارسم الشكل البيانى للدالة د : د (س) = $\begin{cases} -س^{٢} ، & س < ٠ \\ س ، & س \geq ٠ \end{cases}$

ومن الرسم أوجد مدى الدالة ونوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك موضحًا اطرادها.

١٧ إذا كان الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د

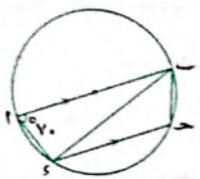


فإن : $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{د(س)}{د(س) + ٢}$ = ...

(أ) صفر (ب) ١

(جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) ٢

١٨ فى الشكل المقابل :



إذا كان : ب حـ = ١٠ سم

فإن محيط Δ ب ء حـ = ... سم.

(أ) ٦٠ (ب) ٦٢

(جـ) ٦٤ (د) ٦٧

١٩ إذا كانت : د (س) = $٢^{س}$ فإن قيمة س التى تحقق المعادلة :

د (س + ١) - د (س - ١) = ٢٤ تساوى ....

(أ) ١٦ (ب) ٤ (جـ) ٨ (د) ٢

٢٠ إذا كانت : $٣^{س - ٢} = ٢^{س - ٢}$ فإن : س = ...

(أ) ٣ (ب) -٢ (جـ) صفر (د) ٢

٢١ مجال الدالة د : د (س) = $\frac{١}{|س| - ٣}$ هو ....

(أ) {٣ ، -٣} (ب) [-٣ ، ٣]

(جـ) ح - [-٣ ، ٣] (د) ح - {-٣ ، ٣}

٢٢ نقطة رأس منحنى الدالة د : د (س) = (٢ – س)^{٢} + ٣ هى ....

(أ) (٢ ، ٣) (ب) (٢ ، –٣) (جـ) (–٢ ، ٣) (د) (–٢ ، –٣)

---

٢٣ أ ب جـ مثلث فيه ق (∠ أ) : ق (∠ ب) : ق (∠ جـ) = ٣ : ٤ : ٣ فإذا كان : أ = ٥ سم

فإن محيط الدائرة المارة برؤوس Δ أ ب جـ يساوى تقريبًا .... سم

(أ) ١٧ (ب) ١٨ (جـ) ١٩ (د) ١٥

---

٢٤ نهـا (س ← ٠) $\frac{٣^{٢س} - ١}{٣^{س+٢} - ٩}$ = ...

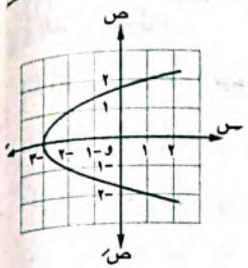
(أ) $\frac{١}{٩}$ (ب) $\frac{٢}{٩}$ (جـ) $\frac{٩}{٢}$ (د) $\frac{١}{٦}$

---

٢٥ المنحنى الموضح بالشكل المقابل

متماثل حول المستقيم الذى

معادلته ....



(أ) س = صفر (ب) ص = صفر

(جـ) ص = –٢ (د) س = ٢

---

٢٦ إذا كانت : ∠ أ تكمل ∠ جـ فإن : جتا أ + جتا جـ = ...

(أ) ١ (ب) صفر (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) –١

---

٢٧ إذا كانت الدالة د : د (س) = { حا ٩ س ظا س ، س ∈]$-\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{\pi}{٢}$[– {٠} ؛ ك^{٢} ، س = ٠ }

متصلة عند س = ٠ فإن : ك = ...

(أ) ٣ (ب) ± ٣ (جـ) ٩ (د) ± $\frac{١}{٣}$

---

٢٨ لو (جتا θ) + لو (قا θ) = ... حيث θ ∈]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[

(أ) ١ (ب) صفر (جـ) ٢ (د) –١

٢٩ إذا كان : د (س) = | س – ٢ | + ٤ فإن مجموعة حل المعادلة د (س + ٢) = ٦

هى ....

(أ) {٠ ، ٤} (ب) {٢ ، –٢} (جـ) {٢ ، ٤} (د) {–٢ ، –٤}

---

٣٠ نهـا (س ← ٠) $\frac{٢ س حا ٨ س + ٢ حا ٤ س}{ظا ٢ س}$ = ...

(أ) ١٣ (ب) ١٠ (جـ) ٩ (د) ٦

---

٣١ إذا كانت الدالة د : د (س) دالة أحادية ، وكان : د (٢ ك + ٣) = د (ك – ١)

فإن : ك = ...

(أ) –١ (ب) –٢ (جـ) –٣ (د) –٤

---

٣٢ أ ب جـ مثلث فيه : ب جـ = ١٤ سم ، ق (∠ ب) = ٦٠° ومساحة المثلث تساوى ٤٢ $\sqrt{٣}$ سم

فإن : أ ب = ... سم

(أ) ١٤ (ب) ١٢ (جـ) ٧ (د) ٦

النمـــوذج الخامس

امتحان تفاعلى ٥

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ نهـــا (س ← ١) (س^(١/٢)^٦ − س^(١/٢)) / (س^(١/٢)^٢ − س^(١/٢)) = ...

(أ) ١٣/٧ (ب) ١ (جـ) ٢ (د) س

---

٢ إذا كان : ٥^(س + ١) = ٧^(س + ١) فإن : ٣^(س + ١) = ...

(أ) صفر (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) ١

---

٣ إذا كان : س < ١ فإن : | ٣ − س | − | س − ٤ | = ...

(أ) −١ (ب) ١ (جـ) ٢ س − ٧ (د) ٧ − ٢ س

---

٤ مجموعة الحل فى ح للمعادلة : | ٢ س − ٤ | = | س + ١ | تساوى ....

(أ) {٠ ، ٥} (ب) {١ ، ٥} (جـ) {٢ ، ٥} (د) {٥}

---

٥ مجال الدالة د : د (س) = √(س − ٢) / (س − ٣) هو ....

(أ) ح (ب) {٣} (جـ) [٢ ، ∞[(د) [٢ ، ∞[− {٣}

---

٦ إذا كانت الدالة د : د (س) = { (س^٢ − ٩)/(س − ٣) ، س ≠ ٣ ؛ ٢ أ ، س = ٣ } متصلة عند س = ٣

فإن : أ = ...

(أ) ٢ (ب) ٣/٢ (جـ) −٣ (د) ٣

---

٧ فى Δ ء هـ و إذا كان : ق (∠ء) = ٣٠° ، هـَ = ١٥ √٣ سم ، ق (∠هـ) = ٦٠°

فإن : ءَ = ... سم.

(أ) ٣٠ (ب) ٤٥ (جـ) ١٥ (د) ٦٠

٨ موضحًا خطوات الحل حيث س عدد حقيقى أوجد مجموعة حل المعادلة :

٣^(٢ س − ١) − ٤ × ٣^س + ٩ = ٠

---

٩ نهـــا (س ← ∞) (٣ + ٥ س^٢ + ٣ س) = ...

(أ) غير موجودة. (ب) ٥ (جـ) ∞ (د) ١١

---

١٠ إذا كانت : د (س) = ٤ س − ٥ ، ر (س) = ٣^س

فإن : (د ∘ ر) (٢) = ...

(أ) ٣ (ب) ٩ (جـ) ٢٧ (د) ٣١

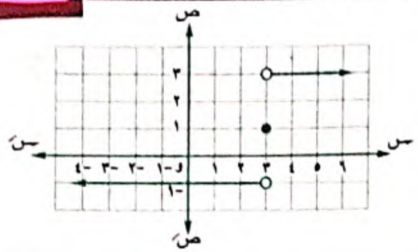
---

١١ إذا كانت : د (أ) = ٢^أ فإن : لو٢ د (أ) = ...

(أ) ٢ (ب) د (أ) (جـ) أ (د) ١/(أ ٢)

---

١٢ من الشكل المقابل :



د (٣^+) + د (٣) = ...

(أ) ٢ (ب) ٠ (جـ) ٤ (د) ٦

---

١٣ نهـــا (س ← ٠) (جا ٢ س / س − جتا ٥ س) = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

---

١٤ من بين الدوال الآتية الدالة الزوجية هى د (س) = ...

(أ) جا س (ب) جا ٣٠° (جـ) س جتا س (د) س^٢ + طا س

---

١٥ فى أى مثلث س ص ع يكون ٢ سَ عَ × .... = سَ^٢ + عَ^٢ − صَ^٢

(أ) جتا س (ب) جتا ع (جـ) جتا ص (د) جا ص

١٦ أ ب جـ ء شكل رباعي فيه : أ ب = ٢٢ سم ، ق(∠ أ ء ب) = ٦٥° ، ب جـ = ٢٥ سم ، ء جـ = ١٨ سم ، ق(∠ ء ب أ) = ٥٠°

أوجد : ق(∠ جـ ب ء)

١٧ إذا كانت : $\lim_{س \to -1} \frac{س^2 + ك س + م}{س^2 - 1} = 3$ فإن : ك + م = ...

(أ) -٤ (ب) -٥ (جـ) -٨ (د) -٩

١٨ مدى الدالة د : د(س) = $\frac{س^2 - 1}{س - 1}$ هو ....

(أ) ح (ب) ح − {٠} (جـ) ح − {١} (د) ح − {٢}

١٩ إذا كان : $\frac{أ + ب}{13} = \frac{ب + جـ}{11} = \frac{جـ + أ}{12}$ فإن : جتا أ = ...

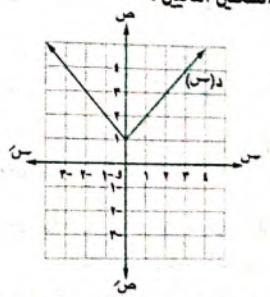
(أ) $\frac{1}{5}$ (ب) $\frac{5}{7}$ (جـ) $\frac{19}{35}$ (د) $\frac{4}{11}$

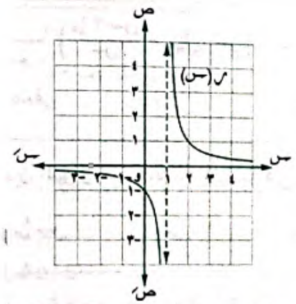
٢٠ عدد الحلول الممكنة للمثلث أ ب جـ

حيث : ق(∠ أ) = ٤٧° ، أ = ٤ سم ، ب = ٦ سم يساوى ....

(أ) ١ (ب) ٠ (جـ) ٢ (د) عدد لا نهائي.

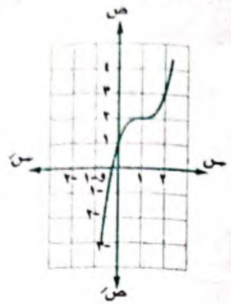
٢١ من الشكلين التاليين :



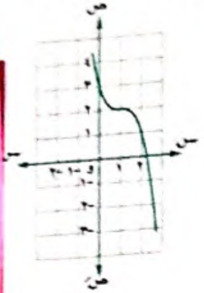


أوجد (د ∘ ر) ومثلها بيانيًا مبينًا المجال وكونها زوجية أم فردية وابحث تماثلها وكونها أحادية أم لا.

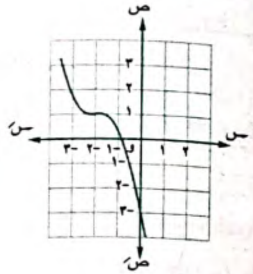
٢٢ إذا كانت : د(س) = ٢ − (س − ١)³ فإن الشكل الذي يمثل الدالة د هو ....



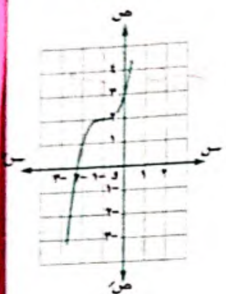
(أ)



(ب)



(جـ)



(د)

٢٣ $\lim_{س \to 1} (2س - 5)$ = ...

(أ) ٢ (ب) -٣ (جـ) ٧ (د) صفر

٢٤ مجموعة حل المعادلة : لو$_س$ (س + ٦) = ٢ في ح هي ....

(أ) {٣ ، -٢} (ب) {٣} (جـ) {٢ ، ١} (د) {٦ ، ١}

٢٥ الدالة العكسية للدالة د : د(س) = ٨ س³ − ١ هي د$^{-1}$(س) = ...

(أ) $\sqrt[3]{س^3 - \frac{1}{8}}$ (ب) $\frac{\sqrt[3]{س + 1}}{2}$

(جـ) $8\sqrt[3]{س} - 1$ (د) $\frac{\sqrt[3]{س - 1}}{2}$

١٦ Δ ل م ن فيه : ق(∠ل) = ٣٠° ، م ن = ٧ سم فإن طول قطر الدائرة المارة برؤوسه يساوى ....

(أ) ٧ سم (ب) ٣,٥ سم (جـ) ١٤ سم (د) $\frac{١٤}{\sqrt{٣}}$ سم

١٧ مجموعة حل المعادلة : $٢^{س^٢} = ١٦$ فى ح هى ....

(أ) {٢} (ب) {-٢} (جـ) {٢ ، -٢} (د) {٤ ، -٤}

١٨ ابحث اتصال الدالة د : د(س) = $\begin{cases} \frac{س + جا س}{٣س - ٢ جا س} & ، س < ٠ \\ ٣س - ١ & ، س \geq ٠ \end{cases}$ عند س = ٠

١٩ الدالة د : د(س) = ٥ − $س^٢$ − ٤س تزايدية عندما س ∈ ....

(أ)]٢ ، ∞[(ب)]-٢ ، ∞[(جـ)]-∞ ، ٢[(د)]-∞ ، -٢[

٢٠ $\lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{جتا ٢س}{٤س - \pi}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{-١}{٢}$ (جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) $\frac{-١}{٤}$

٢١ فى Δ أ ب جـ إذا كان : ٣ جا أ = ٤ جا ب = ٢ جا جـ فإن جيب تمام أصغر زاوية فى Δ أ ب جـ = ...

(أ) $\frac{١١}{٢٤}$ (ب) $\frac{٤٣}{٤٨}$ (جـ) $\frac{٢٩}{٣٦}$ (د) $\frac{١١}{٣٦}$

٢٢ مجموعة حل المتباينة : $\sqrt{س^٢ - ٦س + ٩} + ٢ \geq ٩$ هى ....

(أ) ح −]-٤ ، ١٠[(ب) ح −]-٨ ، ١٠[

(جـ) [-٤ ، ١٠] (د) [-٨ ، ١٠]

النمـــوذج السادس

امتحان تفاعلى ٦

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ إذا كانت : $\lim_{س \to ٤} \frac{س^٢ + ٧س + ب}{س^٢ - ٦س + ٨} = \frac{١٥}{٢}$ فإن : ب = ...

(أ) -٤٤ (ب) ٧ (جـ) -٨ (د) ٨

٢ إذا كان : $لو_{ب} س + لو_{ب} ٣ = لو_{ب} ٢٧ - ١$ فأى مما يأتى يعبر عن س بدلالة ب ؟

(أ) س = ٩ ب (ب) س = $\frac{١}{٩}$ ب (جـ) س = $\frac{٩}{ب}$ (د) س = $\frac{١}{٩ب}$

٣ إذا كان : $لو_{٢} (س + ٢) - لو_{٢} (س - ١) = لو_{٢} ٤$ فإن : س = ...

(أ) -٢ (ب) ٢ (جـ) ١ (د) -١

٤ ابحث نوع كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

① $د_{١}(س)$ = س جا س ② $د_{٢}(س) = \begin{cases} س^٢ & ، س \geq ٠ \\ |س| & ، س < ٠ \end{cases}$

٥ $\lim_{س \to ٠} \frac{س^٢ - ١}{س}$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) غير موجودة. (د) -١

٦ إذا كان : $س^{\frac{٣}{٢}} = ٦٤$ فإن : س = ...

(أ) ٥١٢ (ب) ١٦ (جـ) ٤ (د) ٢

٧ مساحة سطح الدائرة المارة برؤوس Δ أ ب جـ المتساوى الأضلاع الذى طول ضلعه ٩ سم تساوى .... $سم^٢$

(أ) ٩ π (ب) ٩ $\sqrt{٣}$ π (جـ) ٢٧ π (د) ٨١ π

٨ إذا كانت : د (س) = ٣ س − ١ ، ى (س) = س²

فإن : (ى ∘ د) (−٢) = ...

(أ) −٧ (ب) ١١ (جـ) −٤٩ (د) ٤٩

٩ $\lim\limits_{هـ \to ٠}$ $\frac{(س + هـ)^٧ - س^٧}{هـ}$ = ...

(أ) س⁷ (ب) ٧ س⁶ (جـ) صفر (د) ١

١٠ في Δ أ ب حـ يكون : أ² + ب² − حـ² = ...

(أ) ٢ أ ب (ب) أ ب جتا حـ (جـ) جتا حـ (د) ٢ أ ب جتا حـ

١١ منحنى ر (س) = | س + ٣ | هو نفس منحنى د (س) = | س |

بإزاحة مقدارها ٣ وحدات في اتجاه ....

(أ) و س← (ب) و س→ (جـ) و ص (د) و ص←

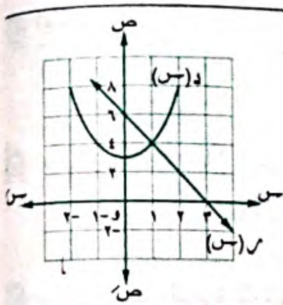
١٢ مجموعة حل المتباينة : | ٣ − ٢ س | ≥ ١ في ح هي ....

(أ) [١ ، ٢] (ب)]١ ، ٢[(جـ) ح −]١ ، ٢[(د) ح − [١ ، ٢]

١٣ إذا كانت د : ح⁺ ← ح حيث د (س) = $\frac{١}{س^٢ + ١}$

أوجد : د⁻¹ (س) وعين مجال د⁻¹ ومداها.

١٤ الشكل المقابل يوضح منحنيي الدالتين د ، ر



فإن : (ر ∘ د) (١) = ...

(أ) −٨ (ب) −٢ (جـ) ٤ (د) ٥

١٥ نقطة تماثل الدالة د : د (س) = $\frac{٢ س - ١}{س}$ هي ....

(أ) (١ ، ٢) (ب) (٢ ، ١) (جـ) (٢ ، ٢) (د) (٠ ، ٢)

١٦ $\lim\limits_{س \to ٠}$ $\frac{جا ٢ س + ظا ٢ س}{٢ س}$ = ...

(أ) $\frac{٨}{٣}$ (ب) $\frac{٤}{٣}$ (جـ) ٢ (د) ٣

١٧ إذا كان لو (٢ س + ص) = $\frac{١}{٢}$ (لو س + لو ص) + لو ٣ حيث س ≠ ص

وكانت ص = ك س فإن ك = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) −٤

١٨ $\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{٢}}$ (٢ س − جا س) = ...

(أ) صفر (ب) ٢ (جـ) π (د) $\frac{\pi}{٢}$

١٩ الدالة الزوجية المتصلة عند النقطة (أ ، ب) تكون متصلة أيضًا عند النقطة ....

(أ) (أ ، ب) (ب) (−أ ، ب) (جـ) (أ ، −ب) (د) (−أ ، −ب)

٢٠ مدى الدالة د : د (س) = { ٠ ، س ≤ ٠ ؛ ١ ، س > ٠ } هو ....

(أ) {١} (ب) {٠} (جـ) ح (د) {٠ ، ١}

٢١ طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث س ص ع الذي فيه :

س = ٣ سم ، ص = ٥ سم ، ع = ٧ سم يساوي .... سم.

(أ) $\frac{٧}{٣}\sqrt{٣}$ (ب) ٢ $\sqrt{٣}$ (جـ) ٤,٤ (د) $\frac{١٤}{٣}\sqrt{٣}$

٢٢ في الشكل المقابل :

إذا كان محيط Δ أ ب حـ = ٤٢ سم

، الدائرة م تمس أضلاع المثلث من الداخل

فإن : ق (∠ أ) = ...

(أ) ٧ ٥٣° (ب) ٢٣ ٦٧° (جـ) ٥٣ ٣٦° (د) ٣٧ ٢٢°

٢٣ إذا كان : $٥^{س-٢} = ٤^{٢-س}$ فإن : س = ...

(أ) $\frac{٥}{٤}$ (ب) ٢ (جـ) $\frac{٤}{٥}$ (د) صفر

---

٢٤ حل المثلث أ ب حـ مقربًا الناتج لأقرب جزء من عشرة حيث :

ق(∠أ) = ٤٠° ، ق(∠ب) = ٣٠° ، ب = ١٠ سم.

---

٢٥ القيمة العددية للمقدار : $\frac{\text{لو } ٦٤}{\text{لو } ٨}$ تساوى ....

(أ) ٢ (ب) ٨ (جـ) ٨٠ (د) ٧٢

---

٢٦ فى Δ ء هـ و الذى فيه ق(∠ء) = ٨٠° ، ق(∠هـ) = ٦٠° إذا كان وَ = ١٢ سم

فإن : ءَ = ... سم

(أ) $\frac{١٢ \text{ جا } ٨٠°}{\text{جا } ٤٠°}$ (ب) $\frac{١٢ \text{ جا } ٨٠°}{\text{جا } ٦٠°}$ (جـ) $\frac{١٢ \text{ جا } ٤٠°}{\text{جا } ٨٠°}$ (د) $\frac{١٢ \text{ جتا } ٨٠°}{\text{جتا } ٤٠°}$

---

٢٧ $\lim_{س \to \infty} \frac{(٢س+١)^{٤٠}(٤س-١)^{٥}}{(٢س+٣)^{٤٥}} =$ ....

(أ) ١٦ (ب) ٣٢ (جـ) ٦٤ (د) ٨

---

٢٨ إذا كانت الدالة د حيث د(س) = $\begin{cases} \frac{س^٢ + ٢س - ٣}{س + ٣} & ، س \neq -٣ \\ س + أ & ، س = -٣ \end{cases}$

متصلة عند س = -٣ أوجد : قيمة أ

---

٢٩ نقطة تقاطع المنحنى د : د(س) = ٤ − $\frac{٢}{س - ١}$ مع محور الصادات هى ....

(أ) (٠ ، ٢) (ب) (١ ، ٤) (جـ) (٠ ، ٦) (د) (٠ ، −٢)

---

٣٠ $\lim_{س \to ٢} \frac{٥س^٢ - ٤٥}{\sqrt{٥س+١} - ٤} =$ ....

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ٤٨

٣١ مجموعة حل المعادلة : $٣^{س+١} + ٣^{٣-س} = ٣٠$ فى ح هى ....

(أ) {١ ، ٩} (ب) {لو$_٢$ ٢٧ ، لو ١}

(جـ) {لو$_٥$ ٢٥ ، لو ١} (د) {لو$_٢$ ٢٥ ، لو$_٢$ ٥}

---

٣٢ أ ب حـ مثلث فيه : ق(∠ب) = ٣ ق(∠حـ) = ٨٤° ، أ حـ = ١٦ سم

فإن محيط Δ أ ب حـ = ... سم تقريبا.

(أ) ٨١,٥ (ب) ٦٢,٢ (جـ) ٤١,٣ (د) ٣٨,٥

امتحان تفاعلى ٧

النمـــوذج السابع

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ إذا كانت : د (س) = $(١٠)^{٢س}$ ، ر (س) = لو ($\sqrt{س}$) فإن : (ر ∘ د) (س) = ...

(أ) $١٠^{٢س}$ (ب) لو $\sqrt{س}$ (جـ) $١٠^{٢س}$ لو $\sqrt{س}$ (د) س

٢ فى Δ أ ب جـ يكون : $\frac{أ}{أ + ب} = \frac{جا أ}{.........}$

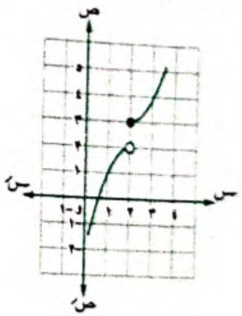
(أ) جا ب (ب) جا جـ (جـ) جا أ + جا ب (د) جا أ + جا جـ

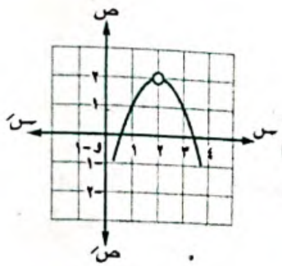
٣ فى Δ أ ب جـ إذا كان : جا أ = ٢ جا جـ ، ب جـ = ٦ سم فإن : أ ب = ... سم

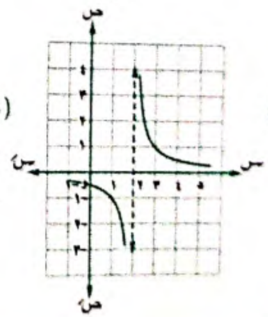
(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٦

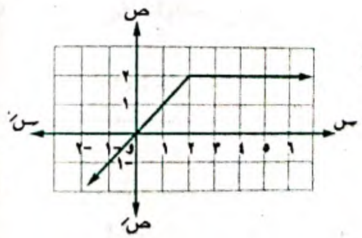
٤ أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة : $س^{\frac{٤}{٣}} - ١٠ س^{\frac{٢}{٣}} + ٩ =$ صفر

٥ الشكل الذى يبين الدالة المتصلة عندما س = ٢ هو الشكل ....

(أ) 

(ب) 

(جـ) 

(د) 

٦ مجال الدالة د : د (س) = $\sqrt{س + ٢} + \sqrt{٥ - س}$ هو ....

(أ)]-٢ ، ∞[(ب)]-٢ ، ٥[(جـ) [-٢ ، ٥] (د)]٢ ، ∞[

٧ فى Δ أ ب جـ يكون : $ب^٢ + جـ^٢ - أ^٢ = ٢$ ب جـ × ....

(أ) جا (٩٠° - ب) (ب) جا (٩٠° - أ)

(جـ) جتا ب (د) جتا (٩٠° - ب)

٨ عدد الحلول الممكنة للمثلث س ص ع الذى فيه :

ق (∠ س) = ٣٠° ، سَ = ٦ سم ، صَ = ٩ سم يساوى ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٠ (د) عدد لا نهائى.

٩ $\lim_{س \to ١} \frac{٤ - \sqrt{س + ١٥}}{١ - س^٢} =$ ....

(أ) $\frac{١}{١٦}$ (ب) ١٦ (جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) ٤

١٠ إذا كان طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس Δ أ ب جـ يساوى ٦ سم

فإن : $\frac{٢ أ}{جا أ} =$ .... سم

(أ) ١٢ (ب) ٦ (جـ) ١٨ (د) ٢٤

١١ مجموعة حل المعادلة : $(لو_٥ ص)^٢ - ٧ لو_٥ ص + ١٢ = ٠$ فى ح هى ....

(أ) {٢٥ ، ١٢٥} (ب) {٢٥ ، ٦٢٥}

(جـ) {$\frac{١}{٢٥}$ ، ٦٢٥} (د) {١٢٥ ، ٦٢٥}

١٢ إذا كانت : د (س) = $\frac{س - ٥}{|س - ٥|}$ فإن : $[د(٥^+)]^٢ + [د(٥^-)]^٢ =$ ....

(أ) ٥٠ (ب) صفر (جـ) ٤ (د) ٢

١٣ $لو_٣ \frac{٣}{٢٥} + ٥ لو_٣ ٥ + لو_٣ ٢٧ - لو_٣ \frac{١٢٥}{١٢} - لو_٣ ٢٤٣ =$ ....

(أ) ٤ (ب) $لو_٣ ٩$ (جـ) لو ٢٥ (د) لو $\frac{١}{١٠٠}$

١٤ إذا كانت : $\lim\limits_{س \to ١} \frac{س^{٢} - ك^{٢}}{س + ٢} = -١$ فإن : ك = ...

(أ) ٢ (ب) −٢ (جـ) ٤ (د) ± ٢

---

١٥ إذا كانت د : د(س) = س^{٢} + ١ فأى العبارات الآتية غير صحيحة ؟

(أ) د دالة أحادية.

(ب) د دالة فردية.

(جـ) د تزايدية على مجالها.

(د) منحنى الدالة د يقطع محور السينات عند س = −١

---

١٦ س ص ع مثلث فيه : سَ = ٥ سم ، صَ = ٧ سم ، ق(∠ ع) = ٦٥°

احسب : عَ ثم أوجد : محيط Δ س ص ع

---

١٧ إذا كان : لو$_{٢}$ س = ٢ فإن : لو$_{س}$ ٢ = ...

(أ) ٢ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) ٨ (د) ٩

---

١٨ إذا كانت : د$^{-١}$ هى الدالة العكسية للدالة د فإن : ....

(أ) مجال د$^{-١}$ = مجال د

(ب) مجال د$^{-١}$ = مدى د

(جـ) مدى د$^{-١}$ = مدى د

(د) مدى د$^{-١}$ = مجال د$^{-١}$

---

١٩ $\lim\limits_{ص \to ٢} \frac{ص^{٥} - ٣٢}{ص - ٢}$ = ...

(أ) ٣١ ص^{٤} (ب) ٣٢ × ٢^{٤} (جـ) ٦٤ (د) ٥ × ٢^{٤}

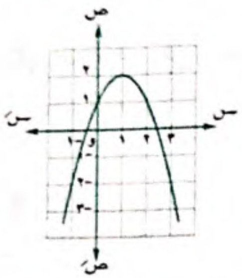
٢٠ ابحث وجود نهاية للدالة د حيث :

$$د(س) = \begin{cases} \frac{جا ٢س}{جا س} & \text{عندما } س < ٠ \\ \frac{٥س + ٦}{س + ٣} & \text{عندما } س > ٠ \end{cases}$$

عندما س تؤول إلى الصفر.

---

٢١ قاعدة الدالة التى تمثل الشكل المقابل هى



د(س) = ...

(أ) (س − ٢)^{٢} + ١

(ب) −(س − ٢)^{٢} + ١

(جـ) −(س − ١)^{٢} + ٢

(د) (−س + ١)^{٢} + ٢

---

٢٢ مجموعة حل المعادلة : | ٢ س − ١ | = ٥ فى ح هى ....

(أ) {٣} (ب) {−٢} (جـ) ∅ (د) {٣ ، −٢}

---

٢٣ إذا كانت : $د(س) = \begin{cases} س - ٤ & ، س \geq ٤ \\ ر(س) & ، س < ٤ \end{cases}$ متماثلة حول المستقيم س = ٤

فإن : الدالة ر تكون ....

(أ) تزايدية. (ب) تناقصية. (جـ) زوجية. (د) ثابتة.

---

٢٤ إذا كان د(س) = س^{٢} − ٣ ، ر(س) = $\sqrt{س - ٢}$ أوجد : (د ∘ ر)(س)

فى أبسط صورة محددًا المجال ثم أوجد : (د ∘ ر)(٣)

---

٢٥ $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{٣س + ٢س^{-١}}{س + ٤س^{-١}}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٤}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) ٢ (د) ٤

---

٢٦ إذا كان : أ ∈]٠ ، ٩] فإن : لو$_{٣}$ أ ∈ ....

(أ)]−∞ ، ٢] (ب)]٢ ، ٨١] (جـ) [٢ ، ∞[(د)]−∞ ، ٠]

٢٧ نهــا$_{س \to \infty}$ $\left(\frac{١}{س - ٢} + ١\right)$ = ...

(أ) ٢ (ب) ١ (جـ) صفر (د) ∞

٢٨ مجموعة الحل فى ح للمعادلة : $\sqrt{س^٢ - ٦س + ٩} + ٢س = ٩$ تساوى ....

(أ) {٤ ، ٦} (ب) {٦} (جـ) {٤} (د) ∅

٢٩ مجموعة الحل فى ح للمتباينة : |س − ٣| ≤ ٢ هى ....

(أ)]١ ، ٥[(ب) [١ ، ٥] (جـ) ح −]١ ، ٥[(د) ح − [١ ، ٥]

٣٠ إذا كانت الدالة د : د (س) = $\begin{cases} \frac{س^٢ - ٤}{س - ٢} & ، س \neq ٢ \\ ك & ، س = ٢ \end{cases}$

متصلة عند س = ٢ فإن : ك = ...

(أ) صفر (ب) ٨ (جـ) ٢ (د) ٤

٣١ إذا كانت : $ب^{س} - ٢ب^{-س} = ١$ حيث ب > ١ فإن : س = ...

(أ) ٢ (ب) لو ٢ (جـ) لو$_٢$ ب (د) لو$_ب$ ٢

٣٢ إذا كان : أ ب جـ مثلث مساحته ٢٤ سم^٢ ، وطول نصف قطر الدائرة الخارجة عنه ٥ سم

فإن : جا أ جا ب جا (أ + ب) = ...

(أ) $\frac{٣}{٢٥}$ (ب) $\frac{٦}{٢٥}$ (جـ) $\frac{٩}{٢٥}$ (د) $\frac{١٢}{٢٥}$

النمــوذج الثامن

امتحان تفاعلى ٨

اجب عن الأسئلة الآتية :

١ لو$_أ$ س ÷ لو$_{أب}$ س = ...

(أ) ١ − لو$_أ$ ب (ب) ١ + لو$_أ$ ب (جـ) ١ − لو$_ب$ أ (د) ١ + لو$_ب$ أ

٢ إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} ٢س^٢ + أس - ٢ & ، س > ٢ \\ ٢س + ب & ، س < ٢ \end{cases}$

وكان : نهــا$_{س \to ٢}$ د (س) = ١٦ فإن : أ + ب = ...

(أ) ٤ (ب) ١٠ (جـ) −١٣ (د) ٧

٣ طول قطر الدائرة الداخلة للمثلث المتساوى الأضلاع الذى طول ضلعه ٤ $\sqrt{٣}$ سم يساوى .... سم.

(أ) ٢ $\sqrt{٣}$ (ب) ٤ $\sqrt{٣}$ (جـ) ٤ (د) ٨

٤ قيمة : لو$_٣$ ٥٤ − لو$_٣$ $\frac{٨}{١٥}$ + لو$_٣$ $\frac{٤}{٥}$ = ...

(أ) لو$_٣$ (ب) ٣ (جـ) ٢٧ (د) ٤

٥ إذا كانت : ص = د (س) منحنى دالة حقيقية فإن صورته بإزاحة قدرها ٢ وحدة جهة اليمين هى ر (س) = ...

(أ) د (س − ٢) (ب) د (س + ٢) (جـ) د (س) + ٢ (د) د (س) − ٢

٦ عدد الحلول الممكنة للمثلث أ ب جـ حيث : ق(∠أ) = ٦٠° ، جـ = ٣ سم ، أ = ٥ سم هو ....

(أ) ١ (ب) ٢

(جـ) لا يوجد مثلث. (د) عدد لا نهائى من المثلثات.

٧ نهــا$_{س \to صفر}$ $\frac{س^٢ + س}{س}$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

٨ إذا كان : د (س) = $٥^{س}$ فأوجد فى ح مجموعة حل المعادلة : د (س) + د (س − ١) = ١٥٠

---

٩ فى Δ أ ب جـ يكون : جتا (أ + ب) = ...

(أ) $\frac{أ^{٢} + ب^{٢} - جـ^{٢}}{٢ أ ب}$ (ب) $\frac{أ^{٢} + جـ^{٢} - ب^{٢}}{٢ أ جـ}$ (جـ) $\frac{ب^{٢} + جـ^{٢} - أ^{٢}}{٢ ب جـ}$ (د) $\frac{جـ^{٢} - أ^{٢} - ب^{٢}}{٢ أ ب}$

---

١٠ إذا كان : ١ < س < ٢ فإن : $\sqrt{س^{٢} - ٢س + ١} + \sqrt{س^{٢} - ٤س + ٤}$ = ...

(أ) ٢س − ٣ (ب) ٢س − ١ (جـ) ١ (د) ٣

---

١١ $\lim_{س \to ٣} \frac{س^{٢} - ٧س + ١٢}{س - ٣}$ = ...

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) −٢ (د) ٣

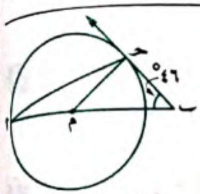
---

١٢ مجال الدالة د : د (س) = $\sqrt{\frac{س - ٥}{س + ٤}}$ = ...

(أ) [٥ ، ∞[(ب) [−٤ ، ٥] (جـ) ح −]−٤ ، ٥] (د) ح − [−٤ ، ٥[

---

١٣ فى الشكل المقابل :



إذا كان : أ جـ = ٢٠ سم

فإن محيط Δ أ جـ م = ... سم.

(أ) ٤١٫٥ (ب) ٤٣٫٥ (جـ) ٤٥ (د) ٤٧٫٥

---

١٤ $٣^{لو_{٣} ٤}$ + لو$_{٥}$ ٢٥ = ...

(أ) ٦ (ب) ٤ (جـ) ٢ (د) ١

---

١٥ مجال الدالة د : د (س) = $\sqrt{٩ - س}$ هو ....

(أ) ح (ب) ح − {٩} (جـ)]−∞ ، ٩] (د) [٩ ، ∞[

---

١٦ $\lim_{س \to ٠} \frac{س^{٢} - ٥س}{\sqrt{س + ٤} - ٢}$ = ...

(أ) ٣٠ (ب) ٦ (جـ) ٥ (د) ٢٥

١٧ أ ب جـ مثلث فيه : جـ = ١٩ سم ، ق (∠أ) = ١١٢° ، ق (∠ب) = ٣٢°

أوجد مساحة Δ أ ب جـ لأقرب سم² وطول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه لأقرب سم.

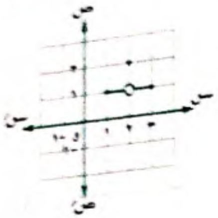
---

١٨ مجال الدالة د : د (س) = لو$_{١ - س}$ س هو ....

(أ) س > ٠ (ب) س < ١ (جـ) ٠ < س < ١ (د) ٠ ≤ س ≤ ١

---

١٩ الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د



فأى من الجمل الآتية صحيح ؟

(أ) د متصلة على الفترة [١ ، ٣]

(ب) د متصلة على الفترة]١ ، ٣[

(جـ) $\lim_{س \to أ}$ د (س) موجودة حيث أ ∈ [١ ، ٣]

(د) $\lim_{س \to أ}$ د (س) موجودة حيث أ ∈]١ ، ٣[

---

٢٠ $\lim_{س \to \infty} \left(\frac{٣س^{٢} + ٢س + ١}{س^{٢} - ٣س + ٢} \right)^{٤}$ = ...

(أ) ٣ (ب) ٩ (جـ) ٢٧ (د) ٨١

---

٢١ إذا كانت د : ح ← ح حيث د (س) = ٤ س − ٢ ، ر : [−٢ ، ٣] ← ح

حيث ر (س) = ٤ − ٣ س ارسم الدالة (د + ر) محدداً مجالها ومداها وابحث اطرادها.

---

٢٢ أى مما يأتى لا يساوى ($\sqrt[٥]{س^{٤}}$) ؟

(أ) $\left(\sqrt[٥]{س}\right)^{٤}$ (ب) $\sqrt[٤]{س^{٥}}$ (جـ) $س^{\frac{٤}{٥}}$ (د) $\left(س^{\frac{١}{٥}}\right)^{٤}$

---

٢٣ إذا كانت الدالة د دالة زوجية فى الفترة [جـ ، ء] فإن : جـ + ء = ...

(أ) ٢ جـ (ب) ٢ ء (جـ) جـ − ء (د) صفر

---

٢٤ أوجد قيمة أ التى تجعل الدالة د متصلة عند أ حيث د (س) = $\begin{cases} ٢ - س^{٢} ، & س \leq أ \\ س ، & س > أ \end{cases}$

٢٥ إذا كانت: د(س) = (س − ٥)(س + ٥) ، ر(س) = س − ٥

فإن: $\frac{د}{ر}$(٥) = ...

(أ) ١٠ (ب) ١ (جـ) $\frac{د}{ر}$(−٥) (د) غير معرفة.

٢٦ نهـا (س ← ٠) $\frac{جا ٢\sqrt{س}}{\sqrt{س}}$ = ...

(أ) ٨ (ب) −٢ (جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) ٢

٢٧ إذا كان: $\left(\frac{١}{٢}\right)^{أ^{٢} - أ - ٢}$ = ١ حيث أ > صفر فإن: أ = ...

(أ) ١ (ب) −٣ (جـ) ٢ (د) ٣

٢٨ Δ أ ب جـ الذى فيه: ق(∠جـ) = ١١٦° ، جـَ = ١٢ سم ، أَ = ١٠ سم

يكون: بَ = ... سم (لأقرب جزء من عشرة).

(أ) ٢,٦ (ب) ٣,٦ (جـ) ٤,٦ (د) ٥,٦

٢٩ نهـا (س ← ٠) $\frac{١ - جتا س + ظا ٥ س}{١ - جتا س - ظا س}$ = ...

(أ) −٥ (ب) ٥ (جـ) صفر (د) غير معرفة.

٣٠ Δ أ ب جـ فيه: جتا ب = $\frac{جـَ}{٢ أَ}$ فإن: Δ أ ب جـ يكون ....

(أ) متساوى الأضلاع. (ب) متساوى الساقين.

(جـ) مختلف الأضلاع. (د) غير ذلك.

٣١ مجموعة حل المتباينة: $\frac{١}{|٢س - ٣|}$ > ٢ فى ح هى ....

(أ) [$\frac{٥}{٤}$ ، $\frac{٧}{٤}$] − {$\frac{٣}{٢}$} (ب)]$\frac{٥}{٤}$ ، $\frac{٧}{٤}$[

(جـ)]$\frac{٥}{٤}$ ، $\frac{٧}{٤}$[− {$\frac{٣}{٢}$} (د) [$\frac{٥}{٤}$ ، $\frac{٧}{٤}$]

٣٢ الدالة الأحادية من بين الدوال المعرفة بالقواعد التالية هى ....

(أ) $د_{١}$(س) = س + ٥ (ب) $د_{٢}$(س) = $س^{٢}$

(جـ) $د_{٣}$(س) = |س − ٢| (د) $د_{٤}$(س) = −٣

النموذج التاسع

امتحان تفاعلى ٩

أجب عن الأسئلة الآتية:

١ مجموعة حل المعادلة: $لو_{(س + ٢)}$ ١٢٥ = ٣ فى ح هى ....

(أ) {٥} (ب) {٣} (جـ) ∅ (د) {٢}

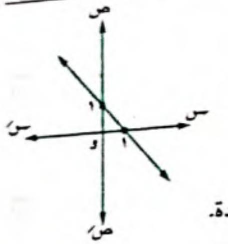
٢ Δ ل م ن الذى فيه: ق(∠ل) = ٣٠° ، مَ = ٩ سم يكون له حلان عندما

لَ = ... سم.

(أ) ٦ (ب) ١٠ (جـ) ١١ (د) ٢

٣ إذا كان الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د

فإن: نهـا (س ← ٢) | د(س) | = ...



(أ) −١ (ب) صفر

(جـ) ١ (د) غير موجودة.

٤ إذا كانت: د(س) = ٣ + $\sqrt{س - ١}$ أوجد الدالة العكسية.

٥ إذا كانت د: ح ← ح حيث د(س + ١) − د(س) = س − ١

فإن: د(١٠) − د(٩) = ...

(أ) ١ (ب) ٩ (جـ) ٨ (د) ١٨

٦ نهـا (س ← ٠) $\frac{٢ س}{جا ٣ س}$ = ...

(أ) $\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) ٦ (د) ليس لها وجود.

٧ صورة المنحنى : ص = |س| − ٥ بالانتقال ٣ وحدات فى اتجاه و س⃖ ، ٥ وحدات فى اتجاه و ص⃖ هى ....

(أ) ص = |س − ٣| + ٥ (ب) ص = |س − ٣|

(جـ) ص = |س − ٣| − ١٠ (د) ص = |س + ٣|

٨ إذا كانت الدالة د : د(س) = { س² + أ س − ٢ ، س > ٢ ؛ ٤ ، س = ٢ ؛ ٥ أ − ب س ، س < ٢ } متصلة عند س = ٢

أوجد قيمة كل من : أ ، ب

٩ نهـا (س ← ∞) $\frac{\sqrt{س + ٥} - \sqrt{٥}}{\sqrt{س} - \sqrt{٥}}$ = ...

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) ∞ (د) −∞

١٠ إذا كانت : ص = $\sqrt[٥]{س}$ فإن الدالة العكسية لها ص = ...

(أ) $\frac{١}{٥}$ س⁵ (ب) س⁵ (جـ) س⁵ − ١ (د) ٥ س⁵

١١ فى Δ أ ب جـ يكون : جـ (أ جتا ب + ب جتا أ) = ...

(أ) أ² (ب) ب² (جـ) جـ² (د) ٢ جـ²

١٢ أ ب جـ د متوازى أضلاع فيه : أ ب = ٩ سم ، ب جـ = ١٣ سم ، أ جـ = ٢٠ سم

فإن : طول ب د = ... سم.

(أ) ٥ (ب) ١٠ (جـ) ٢,٥ (د) ٤

١٣ إذا كان : د(س) = س − ١ ، ر(س) = $\sqrt{س}$ فإن مجال (ر ∘ د) هو ....

(أ) ح (ب)]−∞ ، ١] (جـ) [١ ، ∞[(د) ح − {١}

١٤ نهـا (س ← ٤) $\frac{س^{٣}\sqrt{س} - ١٢٨}{س - ٤}$ = ...

(أ) ١١٢ (ب) ٩٦ (جـ) ٨٤ (د) ٧٢

١٥ إذا كانت : د(س) = $\frac{\sqrt{س^{٢} - ٢س + ١}}{س - ١}$ فإن مدى الدالة د هو ....

(أ) {١} (ب) ح (جـ) [−١ ، ١] (د) {−١ ، ١}

١٦ ارسم منحنى الدالة د : د(س) = $\sqrt{س^{٢} - ٤س + ٤}$ وعين مداها وابحث اطرادها.

١٧ مجموعة الحل فى ح للمعادلة :

لو٢ س − $\frac{٣}{لو_{٢} س}$ = ٢ تساوى ....

(أ) {−١ ، ٣} (ب) {٨ ، $\frac{١}{٢}$} (جـ) {٨ ، ٢} (د) {$\frac{١}{٨}$ ، ٢}

١٨ نهـا (هـ ← ٠) $\frac{(س + هـ)^{٩} - س^{٩}}{هـ}$ = ...

(أ) س⁹ (ب) ٩ س⁸ (جـ) صفر (د) غير موجودة.

١٩ إذا كان : أ > ب > جـ > ١ فإن : لوجـ ب لوب أ لوأ جـ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) أ ب جـ

٢٠ إذا كان أ ب جـ مثلث فيه : أ = ٤ سم ، ب = ٤$\sqrt{٣}$ سم ، جـ = ٨ سم

فإن جيب قياس أصغر زاوية فيه يساوى ....

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (جـ) ١ (د) صفر

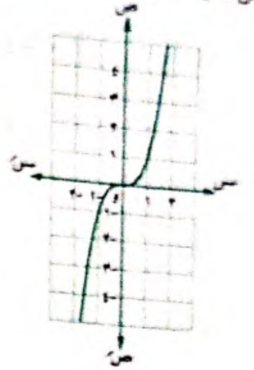
٢١ حل المثلث أ ب جـ الحاد الزوايا الذى فيه : أ = ٢١ سم ، ب = ٢٥ سم

وطول قطر الدائرة المارة برؤوسه ٢٨ سم

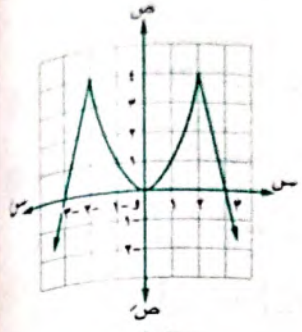
٢٢ إذا كان : س = ٥ + ٢$\sqrt{٦}$ فإن : لو (س + $\frac{١}{س}$) = ...

(أ) ١ (ب) ٥ − ٢$\sqrt{٦}$ (جـ) ١٠ (د) ٥ + ٢$\sqrt{٦}$

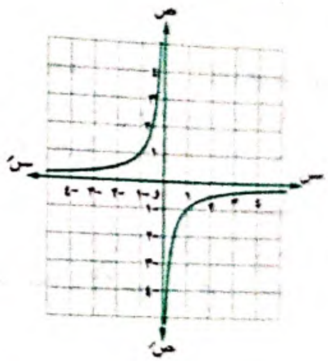
٢٣ أى من الدوال الممثلة بيانيًا كالتالى تكون ليست زوجية وليست فردية ؟



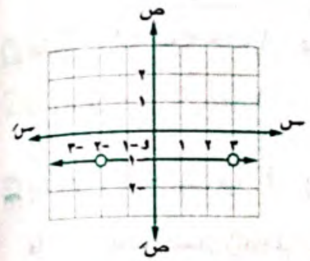
(أ)



(ب)



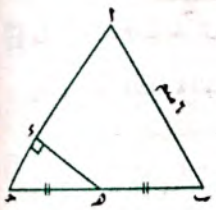
(جـ)



(د)

---

٢٤ فى الشكل المقابل :



إذا كان : ظا (د ء هـ حـ) = $\frac{٣}{٤}$

فإن طول نصف قطر الدائرة المارة

برؤوس Δ أ ب حـ = ... سم.

(أ) ٩　　(ب) ٥,٧　　(جـ) $٤\frac{٣}{٤}$　　(د) ٣,٧٥

٢٥ إذا كانت : د (س) = س^٢ + | س | حيث س عدد حقيقى

فإن مجموعة حل المعادلة د (س) = ٢ فى ح تساوى ....

(أ) {−٢}　　(ب) {−٢ ، −١ ، ١}

(جـ) {١ ، −١}　　(د) {١}

---

٢٦ نهـا (س ←) $\sqrt{٤ - س^٢}$ = ...

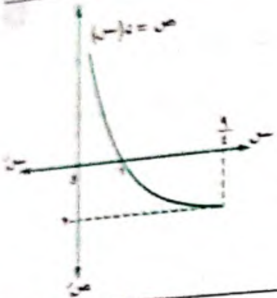
(أ) −١　　(ب) صفر　　(جـ) ٢　　(د) غير موجودة.

---

٢٧ إذا كان الشكل المقابل يمثل منحنى

الدالة د : د (س) = لو~أ~ س

فإن : لو~أ~ $\frac{١٦}{٨١}$ = ...



(أ) −٢　　(ب) ١

(جـ) ٢　　(د) ٤

---

٢٨ نهـا (س ← ٠) $\frac{١ - جتا س + جا س}{١ - جتا س - جا س}$ = ...

(أ) ١　　(ب) −١　　(جـ) ٠　　(د) ∞

---

٢٩ إذا كان محيط المثلث أ ب حـ = ٣٢ سم ، جا أ + جا حـ = $\frac{٣}{٢}$ ، جا ب = $\frac{١}{٤}$

فإن : أ حـ = ... سم

(أ) ٦　　(ب) ٩　　(جـ) ١٢　　(د) ١٥

---

٣٠ مدى الدالة د : د (س) = $\frac{س + ١}{س + ٢}$ يساوى ....

(أ) ح　　(ب) ح − {−٢}　　(جـ) ح − {١}　　(د) ح~+~

---

٣١ إذا كانت : د (س) = أ س + ب ، د^−١^ (٩) = ٣ ، د^−١^ (٥) = ٢

فإن : أ + ب = ...

(أ) −١　　(ب) ١　　(جـ) ٧　　(د) −٧

---

٣٢ نهـا (س ← −١) $\frac{٢ | س + ١ |}{س + ١}$ = ...

(أ) ٢　　(ب) −٢　　(جـ) ٠　　(د) غير موجودة.

النمـــوذج العاشر

امتحان تفاعلى ١٠

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ لو ظا ١° + لو ظا ٢° + لو ظا ٣° + ... + لو ظا ٨٨° + لو ظا ٨٩° = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ١٠ (د) ٨٩

٢ فى الشكل المقابل :

ا ب حـ مثلث مرسوم داخل دائرة

طول نصف قطرها ٤ سم

، ق(∠ب ا حـ) = θ°

فإن : نهـا $\theta \to 0$ (ب حـ / θ°) = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

٣ إذا كانت النسبة بين قياسات زوايا المثلث هى ٨ : ٣ : ١ فإن النسبة بين طولى أكبر ضلعين فى المثلث هى ....

(أ) $\sqrt{٣}$: ٢ (ب) $\sqrt{٦}$: ٢ (جـ) ٨ : ٣ (د) ٨ : ٥

٤ نهـا س ← -٣ $\frac{\sqrt{س + ٧} - ٢}{س + ٣}$ = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) $\frac{١}{٢}$

٥ إذا كان : $٣^{ا} = ٤^{ب}$ فإن : $٩^{\frac{ا}{ب}} + ١٦^{\frac{ب}{ا}}$ = ...

(أ) ٧ (ب) ١٢ (جـ) ٢٠ (د) ٢٥

٦ إذا كانت : نهـا س ← ∞ $\frac{٣ك|س|}{٤س + ٣}$ = ٦ فإن : ك = ...

(أ) ٦ (ب) $\frac{٣}{٤}$ (جـ) ٨ (د) ٣

٧ إذا كانت د : د (س) = $س^٢$ فإن صورة منحنى د بالانعكاس فى محور السينات والانتقال ٣ وحدات فى اتجاه و س ووحدتين فى اتجاه و ص هى

(أ) − $(س − ٣)^٢$ − ٢ (ب) − $(س + ٣)^٢$ + ٢

(جـ) − $(س + ٣)^٢$ − ٢ (د) − [$(س + ٣)^٢$ + ٢]

٨ إذا كانت الدالة د : د (س) = { $س^٢$ + ا س − ٢ ، س > ٢ ؛ ٤ ، س = ٢ ؛ ٥ ا + ب س ، س < ٢ } متصلة عند س = ٢

أوجد قيمتى : ا ، ب

٩ ا ب حـ مثلث محيطه ٧٠ سم ، أ = ٢٦ سم ، ق(∠ا) = ٦٠° أوجد مساحة سطحه.

١٠ إذا كان : د (س) = س + ١ ، ر (س) = $\frac{س^٢ - ١}{س - ١}$

فإن : نهـا س ← ١ (ر ∘ د) س = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) −٢ (د) ٣

١١ إذا كان : $لو_٢$ ٣ × $لو_٣$ ٤ × $لو_٤$ ٥ × ... × $لو_ن$ (ن + ١) = ١٠ فإن : ن = ...

(أ) ٩ (ب) ١٠ (جـ) ١١ (د) ١٠٢٣

١٢ مجال الدالة د : د (س) = $\sqrt{\sqrt{س^٢} - ١}$ هو ....

(أ)]−١ ، ١[(ب) [−١ ، ١] (جـ) ح −]−١ ، ١[(د) ح − {−١ ، ١}

١٣ ا ب حـ مثلث فيه : ق(∠ا) = ١١٢° ، ق(∠ب) = ٣٢° ، حـ = ١٩ سم

فإن طول قطر الدائرة المارة برؤوسه ≃ .... سم

(أ) ١٦ (ب) ١٧ (جـ) ٣٢ (د) ٣٣

١٤ إذا كان : $٢^{س}$ = ٢٠ ، ن < س < ن + ١ ، ن عددًا صحيحًا فإن : ن = ...

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ١٠

١٥ في Δ س ص ع يكون ص^٢ + ع^٢ − س^٢ = ٢ ص ع × ......

(أ) جتا س (ب) جا ع (جـ) جتا ع (د) جا س

١٦ إذا كانت: د(س) = { ٣س − ١ ، س ≠ ٢ ؛ ٦ ، س = ٢ } فإن: نها (س ← ٢) د(س) = ...

(أ) −٥ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ليس لها وجود.

١٧ إذا كان: د(س) = لو٢ (س + أ) وكان: د^{-١}(٢) = −٣ فإن: أ = ...

(أ) −٧ (ب) ٧ (جـ) ٣ (د) ١

١٨ تكون الدالة الأسية التي أساسها أ تزايدية إذا كانت ......

(أ) أ > ٠ (ب) أ > ١ (جـ) ٠ < أ < ١ (د) أ = ١

١٩ نها (س ← ∞) (٤ − ٣س − س^٣) = ...

(أ) ∞ (ب) غير موجودة. (جـ) −١ (د) −∞

٢٠ إذا كانت د دالة فردية ، أ ∈ مجال د فإن: د(أ) + د(−أ) = ...

(أ) ٢ د(أ) (ب) ٢ د(−أ) (جـ) صفر (د) د(أ)

٢١ أوجد جبريًا في ح مجموعة حل المعادلة: |س − ٣| = |٩ − ٢س|

٢٢ إذا كانت: د دالة فردية فإن: (٢ د(٣) + ٧ د(−٣)) / (١٠ د(−٣)) = ...

(أ) ٣ (ب) −٣ (جـ) ١/٢ (د) −١/٢

٢٣ إذا كانت: د(س) = √(س + ٣) ، ر(س) = √(٦ − س) فإن: (د ∘ ر)(٥) = ...

(أ) غير معرفة. (ب) صفر (جـ) ٥ (د) ٢

٢٤ مدى الدالة د: د(س) = { ٢س + ٣ ، س > ٣ ؛ ٩ ، س < ٣ } هو ......

(أ) {٣} (ب) ح (جـ)]٩ ، ∞[(د) [٩ ، ∞[

٢٥ في Δ أ ب جـ إذا كان: ق(∠ب) = ٦٠° ، ق(∠جـ) = ٣٠° ، جـ = ٤ سم فإن: ب = ... سم.

(أ) ٤ (ب) ٨ (جـ) ٢√٣ (د) ٤√٣

٢٦ نها (س ←) (١ − ظا س) / (جا س − جتا س) = ...

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) صفر (د) ليس لها وجود.

٢٧ إذا كانت مساحة Δ أ ب جـ هي هـ ، نق طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه فإن: (٤ نق × هـ) / (أ ب جـ) = ...

(أ) أ / (٢ جا أ) (ب) جا أ (جـ) ١ (د) نق

٢٨ إذا كانت: د(س) = ٧^{س+١} فأوجد قيمة س التي تحقق: د(٢س − ١) + د(س − ٢) = ٥٠

٢٩ إذا كان: نها (س ← أ^+) د(س) = ل ، نها (س ← أ^−) د(س) = م وكانت الدالة متصلة عند س = أ فإن: ل^٢ + م^٢ − ٢ ل م = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) صفر (د) ٦

٣٠ إذا كان: أ = جا ب ، ب = جا جـ ، جـ = جا أ فإن محيط الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب جـ يساوي ......

(أ) ١ (ب) ٢π (جـ) ١/٢ π (د) π

٣١ مجموعة الحل في ح للمتباينة: √(٩س^٢ − ١٢س + ٤) + ٢|٤ − ٦س| ≥ ٢٠ هي ......

(أ) ح −]−٢/٣ ، ٢[(ب)]−٢/٣ ، ٢[

(جـ) ح − [−٢/٣ ، ٢] (د) [−٢/٣ ، ٢]

٣٢ إذا كانت: د(س) = س^٣ + ٣س^٢ + ٣س + ١ فإن: د^{-١}(س) = ...

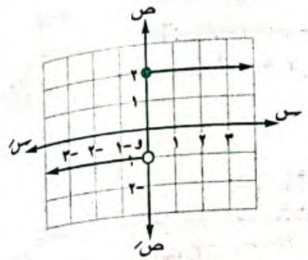
(أ) (س + ١)^٣ (ب) ∛س − ١ (جـ) ∛س + ١ (د) س^٣ − ١

ثانيًا نماذج امتحانات بنظام أسئلة الاختيار من متعدد

النموذج الأول

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ مدى الدالة الممثلة بالشكل المقابل هو ....



(أ) {-١ ، ٢}
(ب) {٢}
(جـ) {-٣ ، ٣}
(د) {-١}

٢ إذا كان : $لو_{٢} س = لو_{٤} ٩$ فإن : س = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٩ (د) ١٢

٣ $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{١ - جتا^{٢} س}}{س}$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) -١ (د) غير ذلك.

٤ المثلث أ ب جـ الذي فيه : أ ب = ٣ سم ، ب جـ = ٥ سم ، أ جـ = ٧ سم فإن : ق(∠ب) = ...°

(أ) ٣٠ (ب) ٦٠ (جـ) ١٢٠ (د) ١٥٠

٥ $لو_{س ص} \left(\frac{١}{س}\right) + لو_{س ص} \left(\frac{١}{ص}\right)$ = ...

(أ) ١ (ب) -١ (جـ) س ص (د) -س ص

٦ $\lim_{س \to ١٦} \frac{\sqrt[٤]{س^{٧}} - ١٢٨}{س - ١٦}$ = ...

(أ) ١٢ (ب) ١٤ (جـ) ١٦ (د) ٢٠

٧ إذا كانت : $د(س) = \begin{cases} \frac{٢ س + جا س}{ظا ٢ س + ٤ س} & ، س < ٠ \\ ٥ س + \frac{١}{٢} & ، س > ٠ \end{cases}$

فإن : $\lim_{س \to ٠} د(س)$ = ...

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) غير موجودة.

٨ في المثلث س ص ع إذا كان : س = ٢٠ سم ، ع = ١٦ سم ، جتا ص = ٠,٤ فإن : ص = ... سم

(أ) ٢٠ (ب) ١٦ (جـ) ٢٥ (د) ١٥

٩ منحنى الدالة ر : ر(س) = |س + ٣| هو نفسه منحنى د(س) = |س| بإزاحة مقدارها ٣ وحدات في اتجاه ....

(أ) $\overleftarrow{و س}$ (ب) $\overrightarrow{و س}$ (جـ) $\overleftarrow{و ص}$ (د) $\overrightarrow{و ص}$

١٠ إذا كانت : $د(س) = ٣^{س}$ فإن : $د^{-١}(س)$ = ...

(أ) $لو_{س} ٣$ (ب) $لو_{٣} س$ (جـ) $س^{-٣}$ (د) $٣^{س}$

١١ الدالة د : $د(س) = \sqrt{س + ٣}$ مجالها هو ....

(أ)]-٣ ، ∞[(ب)]-∞ ، ٣] (جـ) [٣ ، ∞[(د) [-٣ ، ∞[

١٢ $\lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{ظا س}{س}$ = ...

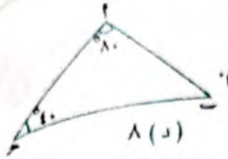
(أ) ١ (ب) $\frac{\pi}{٢}$ (جـ) $\frac{\pi}{٤}$ (د) $\frac{٤}{\pi}$

١٣ $\lim_{ن \to \infty} \frac{\sqrt[ن]{٣}}{٩}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) ∞ (جـ) $\frac{١}{٩}$ (د) صفر

١٤ في الشكل المقابل إذا كان محيط Δ أ ب جـ = ٢٠ سم

فإن طول قطر الدائرة المارة برؤوسه يساوى = ... سم.



(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

---

١٥ مجموعة حل المعادلة : لو$_{س}$ ٣ = -٢ في ح هي ....

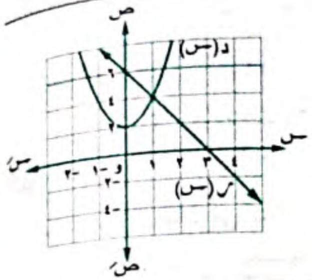
(أ) $\{\frac{١}{٩}\}$ (ب) {٩} (جـ) $\{\sqrt{٣}\}$ (د) $\{\frac{١}{\sqrt{٣}}\}$

---

١٦ الشكل المقابل يوضح منحنى

الدالتين د ، ر

فإن : (ر ∘ د) (١) = ...



(أ) ٥ (ب) -٢

(جـ) -٤ (د) ٦

---

١٧ $\lim_{س \to ٠} \frac{١ - جتا س}{٥ س}$ = ...

(أ) صفر (ب) ٥ (جـ) $\frac{١}{٥}$ (د) غير ذلك.

---

١٨ في المثلث س ص ع يكون : ص^٢ + ع^٢ - س^٢ = ٢ ص ع × ....

(أ) جتا س (ب) جا ع (جـ) جتا ع (د) جا س

---

١٩ الدالة د : د (س) = $\frac{س ظا س}{|س|}$ من حيث نوعها تكون ....

(أ) فردية. (ب) زوجية.

(جـ) ليست فردية وليست زوجية. (د) غير ذلك.

---

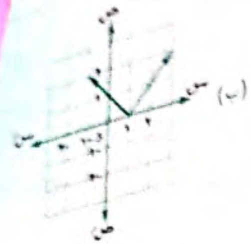
٢٠ إذا كان : |س| < أ ، أ ∈ ح$^+$ فإن : س ∈ ....

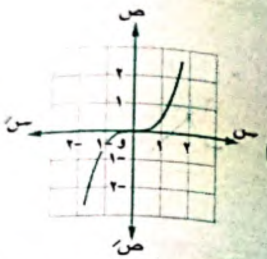
(أ) ح - [-أ ، أ] (ب) [-أ ، أ]

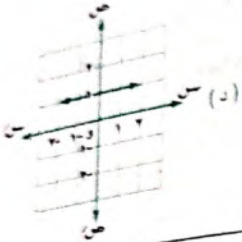
(جـ) ح -]-أ ، أ[(د)]-أ ، أ[

٢١ أي من الدوال الممثلة بيانيا بالأشكال الآتية تكون زوجية ؟

(أ)


(ب)


(جـ)


(د)

---

٢٢ مجموعة حل المعادلة : $٣^{س+١} + ٣^{٢-س}$ = ١٢ في ح هي ....

(أ) {٠} (ب) {٣} (جـ) {١} (د) {٠ ، ١}

---

٢٣ الدالة د : د (س) = $\begin{cases} ٣ & ، س > ٠ \\ -٣ & ، س < ٠ \end{cases}$ متماثلة بالنسبة للنقطة ....

(أ) (٠ ، ٠) (ب) (٠ ، ٣) (جـ) (٠ ، -٣) (د) (٣ ، -٣)

---

٢٤ إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} أ - س^٢ & ، س \geq -٢ \\ س & ، س < -٢ \end{cases}$ متصلة عند س = -٢

فإن : أ = ...

(أ) -٢ (ب) -٤ (جـ) ٢ (د) ٤

---

٢٥ في المثلث أ ب جـ يكون : $\frac{٥ جـَ}{جا جـ}$ = ... نق

(أ) ٥ (ب) ١٠ (جـ) ١٥ (د) ٢٠

٢٦ محور تماثل الدالة د : د (س) = س^{٢} – ١ هو المستقيم ....

(أ) س = ١ (ب) س = ٠ (ج) ص = ١ (د) ص = ٠

٢٧ فى المثلث أ ب ﺣ يكون : حتا (أ + ب) = ...

(أ) حتا أ + حتا ب (ب) حا أ + حا ب

(ج) حتا ﺣ (د) – حتا ﺣ

٢٨ $\lim\limits_{س \to \infty}$ $\frac{أ س^{٢} - ٥ س}{٢ س + ٣ س^{٢}}$ = ٢ فإن : أ = ...

(أ) ٣ (ب) ٦ (ج) ٩ (د) ١٢

النموذج الثانى

اجب عن الاسئلة الآتية :

١ إذا كان : ٥^{س} = ٢ فإن : ٢٥$^{–س}$ = ...

(أ) ١٠ (ب) ٦ (ج) ٥ (د) ٤

٢ إذا كان منحنى : ص = لو$_{٤}$ (١ – أ س) يمر بالنقطة ($\frac{١}{٤}$ ، – $\frac{١}{٢}$)

فإن : أ = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (ج) ٤ (د) ٨

٣ $\lim\limits_{س \to \infty}$ $\frac{س^{٣} + ٥}{س (٢ س^{٢} + ٣)}$ = ...

(أ) $\frac{٥}{٨}$ (ب) ١ (ج) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{٥}{٣}$

٤ فى Δ أ ب ﺣ إذا كان : ٤ حا أ = ٣ حا ب = ٦ حا ﺣ

فإن : ق (∠ ﺣ) ≃ .... (لأقرب درجة)

(أ) ٨٩° (ب) ٢٩° (ج) ٥٧° (د) ٨٢°

٥ أبسط صورة للمقدار : لو$_{ب}$ أ^{٢} × لو$_{ﺣ}$ ب^{٣} × لو$_{أ}$ ﺣ = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (ج) ٦ (د) ١

٦ إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} \frac{س^{٢} - ١}{س - ١} & ، س \neq ١ \\ ٢ أ & ، س = ١ \end{cases}$ متصلة عند س = ١

فإن : أ = ...

(أ) ٠ (ب) –٢ (ج) ٢ (د) ١

٧ فى Δ أ ب ﺣ يكون : حتا (أ + ب) = ...

(أ) $\frac{أ^{٢} + ب^{٢} - ﺣ^{٢}}{٢ أ ب}$ (ب) $\frac{ﺣ^{٢} - أ^{٢} - ب^{٢}}{٢ أ ب}$

(ج) $\frac{ب^{٢} + ﺣ^{٢} - أ^{٢}}{٢ ب ﺣ}$ (د) $\frac{أ^{٢} + ﺣ^{٢} - ب^{٢}}{٢ أ ﺣ}$

(٨) مجموعة حل المعادلة : لو٤ س = ١ − لو٤ (س − ٣) هى ....

(أ) {٤} (ب) {−١} (جـ) {٤ ، −١} (د) {١}

(٩) مدى الدالة د : د (س) = | س − ٢ | هو ....

(أ)]٠ ، ∞[(ب) [٢ ، ∞[(جـ) [٠ ، ∞[(د)]٢ ، ∞[

(١٠) نهـا (س ← ٢) (س٥ − ٣٢) / (س٢ + ٣ س − ١٠) = ...

(أ) ٨٠ (ب) ٨٠/٧ (جـ) ٧/٨٠ (د) ١/٨٠

(١١) Δ أ ب حـ فيه : أ = ٩ سم ، ب = ١٥ سم
، ق (∠ حـ) = ١٠٦° فإن محيطه ≃ .... سم

(أ) ٤٤ (ب) ٢٤ (جـ) ٣٤ (د) ٢٨

(١٢) مجموعة حل المتباينة : | ٢ س − ٢ | ≤ ٧ هى ....

(أ) [−٥/٢ ، ٣] (ب) ح − [−٥/٢ ، ٣]
(جـ) ح −]−٥/٢ ، ٣[(د) ∅

(١٣) إذا كانت د دالة فردية على [− س ، س] فإن : د (− س) + د (س) = ...

(أ) ٢ س (ب) غير معرفة. (جـ) −٢ س (د) صفر

(١٤) نهـا (س ← ٠) (جا ٢ س + ٥ جا ٣ س) / س = ...

(أ) ٧ (ب) ٥ (جـ) ١٧ (د) ١٠

(١٥) مجموعة حل المعادلة : | س | + س = ٠ هى ....

(أ) {٠} (ب)]−∞ ، ٠] (جـ)]−∞ ، ٠[(د) ∅

(١٦) نقطة تماثل الداله د : د (س) = ١/س + ٢ هى ....

(أ) (٢ ، ٠) (ب) (١ ، ٢) (جـ) (٠ ، ٢) (د) (٠ ، ٠)

(١٧) نهـا (س ← ١) (٤ − √(س + ١٥)) / (١ − س٢) = ...

(أ) ٤ (ب) ١/٨ (جـ) ١/١٦ (د) −٤

(١٨) مجموع جذرى المعادلة : ٢٥^س − ١٢ × ٥^س + ٢٧ = ٠ يساوى ....

(أ) لو٥ ١٢ (ب) ١٢ (جـ) لو٥ ٢٧ (د) ٢٧

(١٩) أ ب حـ مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ٥ √٣ سم فإن طول قطر الدائرة المارة برؤوسه يساوى .... سم

(أ) ٥ √٣ (ب) ١٠ √٣ (جـ) ١٠ (د) ٥

(٢٠) مجال الدالة د : د (س) = √(س + ٣) هو ....

(أ)]−٣ ، ∞[(ب) [−٣ ، ∞[(جـ) {−٣} (د) {٠}

(٢١) متوازى أضلاع أ ب حـ ء فيه : ق (∠ أ) = ٥٠°
، ق (∠ ء ب حـ) = ٧٠° ، ب ء = ٨ سم فإن محيطه = ... سم

(أ) ٣٨ (ب) ١٩ (جـ) ٨,٥ (د) ٨٦

(٢٢) إذا كان : د (س) = ٤ س − ٥ ، ر (س) = ٣^س
فإن : (د ∘ ر) (٢) = ...

(أ) ٣ (ب) ٩ (جـ) ٢٧ (د) ٣١

(٢٣) نهـا (س ← ٢) (س٢ − ٧ س + ٦) / (٣ س٢ − ٨ س + ٤) = ...

(أ) ٥/٤ (ب) ٣/٢ (جـ) ٤/٥ (د) ١/٣

(٢٤) فى أى مثلث Δ س ص ع يكون : سَ٢ + صَ٢ − ٢ سَ صَ جتا ع = ...

(أ) عَ (ب) عَ٢ (جـ) صَ٢ (د) سَ٢

٢٥ إذا كان : $س^{\frac{3}{2}} = 8$ فإن : س = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٨ (د) ٩

٢٦ مجموعة حل المتباينة : $\sqrt{4س^2 - 12س + 9} \geq 9$ هى ....

(أ) [-٦ ، ١٢] (ب) [-٣ ، ٦] (جـ) ح - [-٣ ، ٦] (د) ح -]-٣ ، ٦[

٢٧ $\lim_{س \to \infty} \frac{1}{س}\sqrt{3 + 4س^2} =$ ....

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) -٢ (د) -٣

٢٨ $\lim_{س \to -2} \frac{(س + 3)^5 - 1}{س^2 - 4} =$ ....

(أ) $\frac{5}{4}$ (ب) $-\frac{5}{4}$ (جـ) $\frac{1}{4}$ (د) $-\frac{1}{4}$

النموذج الثالث

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ $\lim_{ص \to 2} \frac{ص^5 - 32}{ص - 2} =$ ....

(أ) ٣١ $ص^4$ (ب) ٣٢ × 2^4 (جـ) ٦٤ (د) ٥ × 2^4

٢ فى Δ أ ب حـ إذا كان نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث = ٤ سم

فإن : $\frac{أ + ب + حـ}{حا أ + حا ب + حا حـ} =$ ....

(أ) ٤ (ب) ٢ (جـ) ٨ (د) ١٦

٣ إذا كان : د (س) = $2^{س}$ فإن : $لو_2$ د (س) = ...

(أ) ١ (ب) س (جـ) د (س) (د) ٢

٤ إذا كان : $لو_ب$ س + $لو_ب$ ٣ = $لو_ب$ ٢٧ - ١ فإن قيمة س بدلالة ب = ...

(أ) س = ٩ ب (ب) س = $\frac{1}{9}$ ب (جـ) $\frac{9}{ب}$ (د) $\frac{1}{9ب}$

٥ $\lim_{س \to 0} \frac{3س + 2س^{-1}}{س + 4س^{-1}} =$ ....

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) $\frac{1}{2}$ (د) $\frac{1}{4}$

٦ إذا كان : د (س) = $س^3 + 7$ فإن : $د^{-1}(-1) =$ ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) -٢ (د) ٨

٧ كل الدوال المعرفة بالقواعد الآتية ليست أحادية ما عدا ....

(أ) د (س) = $س^2$ (ب) د (س) = ٥

(جـ) د (س) = س + ٢ (د) د (س) = |س|

٨ $\lim_{س \to \infty} (1 + 2س^2 - س^3) =$ ....

(أ) ∞ (ب) -∞ (جـ) صفر (د) -١

٩ Δ س ص ع فيه : سَ = ٥ سم ، صَ = ٣ سم ، ق(∠ع) = $\frac{٢}{٣}$ π فإن : عَ = ...

(أ) ٧ (ب) ٨ (جـ) ٩ (د) ٤

١٠ مجال الدالة د : د(س) = $\frac{١}{|س| + ٢}$ هو ....

(أ) ح (ب) {٢ ، -٢} (جـ) ح - {٢ ، -٢} (د) ح - {٢}

١١ نقطة رأس المنحنى : د(س) = (س + ٣)^{٢} - ٢ هى ....

(أ) (-٣ ، ٢) (ب) (٣ ، -٢) (جـ) (٣ ، ٢) (د) (-٣ ، -٢)

١٢ لو جا(θ) + لو قا(θ) = ... حيث θ ∈]٠ ، $\frac{π}{٢}$[

(أ) ١ (ب) صفر (جـ) ٢ (د) -١

١٣ مجموعة حل المتباينة : |٢ - ٣س| ≤ ٧ فى ح هى ....

(أ)]-$\frac{٥}{٣}$ ، ٣[(ب) [-$\frac{٥}{٣}$ ، ٣]

(جـ) ح -]-$\frac{٥}{٣}$ ، ٣[(د) ح - [-$\frac{٥}{٣}$ ، ٣]

١٤ إذا كان منحنى الدالة د : د(س) = لو$_{٤}$ (١ - أ س) يمر بالنقطة ($\frac{١}{٨}$ ، -$\frac{١}{٢}$)

فإن : أ = ...

(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) ٨

١٥ إذا كانت : د(س) = ٣^{س} فإن قيمة س التى تحقق المعادلة :

د(س + ١) - د(س - ١) = ٢٤ هى ....

(أ) ٢ (ب) صفر (جـ) ٣ (د) ٨

١٦ محور تماثل الدالة د : د(س) = س^{٢} هو المستقيم ....

(أ) ص = صفر (ب) ص = س (جـ) ص = -س (د) س = صفر

١٧ فى جميع العلاقات التالية تكون ص دالة ماعدا ....

(أ) ص = جتا س (ب) ص = ٢

(جـ) ص = س^{٢} - ١ (د) ص^{٢} = س^{٢} + ١

١٨ إذا كان Δ أ ب حـ قائم الزاوية ومتساوى الساقين ، نق طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه فإن مساحة Δ أ ب حـ = ...

(أ) نق (ب) ٢ نق (جـ) نق^{٢} (د) π نق^{٢}

١٩ نهـا$_{س \to \infty}$ (٥ + س$^{-١}$ - ٢ س$^{-٢}$) = ...

(أ) ١ (ب) ٥ (جـ) -٢ (د) ٤

٢٠ كل الدوال الآتية زوجية ماعدا ....

(أ) د(س) = جا س (ب) د(س) = جتا س

(جـ) د(س) = س^{٢} - ١ (د) د(س) = |س|

٢١ فى Δ أ ب حـ إذا كان : حَ^{٢} = أَ^{٢} + بَ^{٢} + أَ بَ فإن : ق(∠حـ) = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (د) ١٢٠°

٢٢ إذا كانت : د(س - ١) = ٢$^{س+١}$ فإن : د(س) = ...

(أ) ٢^{س} (ب) ٢$^{س-١}$ (جـ) ٢$^{س+٢}$ (د) ٢$^{س-٢}$

٢٣ نهـا$_{س \to \infty}$ $\left(\frac{٣س^{٢} + ٢س + ١}{س^{٢} - ٣س + ٢}\right)^{٤}$ = ...

(أ) ٣ (ب) ٩ (جـ) ٢٧ (د) ٨١

٢٤ نهـا$_{س \to ٢}$ $\frac{جا(س - ٢)}{س^{٢} - ٤}$ = ...

(أ) ١ (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) صفر (د) ٢

٢٥ الدوال الآتية متصلة على ح ماعدا ....

(أ) د(س) = جا س (ب) د(س) = $س^٢ - ٢$

(ج) د(س) = ظا س (د) د(س) = $\frac{٥س + ٣}{س^٢ + ٤}$

٢٦ فى Δ أ ب ح إذا كان : جتا ب = $\frac{حَ}{٢أ}$ فإن : Δ أ ب ح فيه : ....

(أ) حَ = أ (ب) حَ = بَ (ج) أ = ٢ب (د) أ = ب

٢٧ إذا كانت : د(س) = $\begin{cases} ٣س^٢ + أس - ٢ & \text{عند } س > ٢ \\ ٢س + ب & \text{عند } س < ٢ \end{cases}$

وكانت : $\lim_{س \to ٢}$ د(س) = ١٦ فإن : أ + ب = ...

(أ) ٤ (ب) −١ (ج) ١٣ (د) ٧

٢٨ فى Δ أ ب ح يكون : حَ (أ جتا ب + ب جتا أ) = ...

(أ) $٢ حَ^٢$ (ب) $حَ^٢$ (ج) $أ^٢$ (د) $ب^٢$

النموذج الرابع

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ نقطة رأس منحنى الدالة د : د(س) = $(٢ - س)^٢ + ٣$ هى ....

(أ) (٢ ، ٣) (ب) (٢ ، −٣) (ج) (−٢ ، ٣) (د) (−٢ ، −٣)

٢ مجال الدالة د : د(س) = $\frac{\sqrt{س - ٢}}{س - ٢}$ هو ....

(أ) ح (ب) {٢} (ج) [٢ ، ∞[(د) [٢ ، ∞[− {٢}

٣ إذا كانت : $\lim_{س \to ∞} \frac{أس + ٦}{٢س + ٧} = ٤$ حيث أ ∈ ح فإن : أ = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (ج) ٦ (د) ٨

٤ المنحنى ى : ص(س) = $س^٢ + ٤$ هو نفس المنحنى د(س) = $س^٢$ بإزاحة مقدارها ٤ وحدات فى اتجاه ....

(أ) $\overleftarrow{وس}$ (ب) $\overleftarrow{وص}$ (ج) $\overrightarrow{وس}$ (د) $\overrightarrow{وص}$

٥ قياس أكبر زاوية فى المثلث الذى أطوال أضلاعه ٣ سم ، ٥ سم ، ٧ سم يساوى ....

(أ) ١٥٠° (ب) ١٢٠° (ج) ٦٠° (د) ٣٠°

٦ $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٥ - ٣٢}{س^٣ - ٨}$ = ...

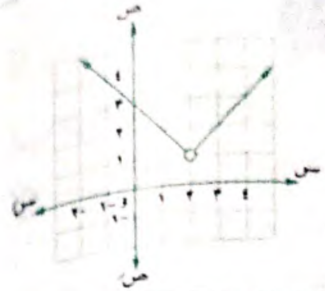
(أ) ٤ (ب) $\frac{٥}{٣}$ (ج) صفر (د) $٦\frac{٢}{٣}$

٧ إذا كانت د دالة حيث : د(س) = ٧ س فإن : $د^{-١}$(س) = ...

(أ) ٧ س (ب) $\frac{س}{٧}$ (ج) $\frac{٧}{س}$ (د) ٧ − س

٨ فى الشكل المقابل :

نهــا (س ← ٢) د (س) = ...



(أ) ١ (ب) -١

(جـ) غير موجودة. (د) ٢

---

٩ إذا كانت د دالة فردية ، أ ∈ مجال الدالة فإن : د (أ) + د (- أ) = ...

(أ) ٢ د (أ) (ب) ٢ د (- أ) (جـ) صفر (د) د (أ)

---

١٠ نهــا (س ← ٣) $\frac{س^٢ - ٧ س + ١٢}{س - ٣}$ = ...

(أ) ١ (ب) -١ (جـ) ٧ (د) -٢

---

١١ عدد الحلول الممكنة للمثلث أ ب جـ حيث : ق (∠ أ) = ٦٠° ، بَ = ٣ سم ، أَ = ٥ سم هو ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) لا يوجد مثلث. (د) عدد لا نهائى.

---

١٢ نهــا (س ← ٠) $\frac{\sqrt[٣]{س + ١} - ١}{س}$ = ...

(أ) صفر (ب) $\sqrt[٣]{٢}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) ليس لها وجود.

---

١٣ منحنى الدالة الزوجية يكون متماثلًا حول المستقيم ....

(أ) ص = س (ب) $\overleftrightarrow{ص ص}$ (جـ) $\overleftrightarrow{س س}$ (د) ص = - س

---

١٤ فى Δ ء هـ و إذا كان : ق (∠ ء) = ٣٠° ، هـَ = ١٥ $\sqrt{٣}$ ، ق (∠ هـ) = ٦٠° فإن : ءَ = ... سم

(أ) ٣٠ سم (ب) ٤٥ سم (جـ) ١٥ سم (د) ٦٠ سم

---

١٥ نهــا (س ← ٠) $\frac{(س + ٢)^٥ - ٣٢}{س}$ = ...

(أ) ٢٥ (ب) ٦٤ (جـ) ٨٠ (د) ١٠٠

١٦ إذا كان : د (س) = ٤^(س - ١) فإن : د (س + ١) = ...

(أ) ٤^س (ب) ٤^(س - ١) (جـ) ٤^(س - ٢) (د) ٦^س

---

١٧ أ ب جـ مثلث فيه : بَ = ٢ سم ، جـَ = ٢,٥ سم ، جا أ = $\frac{٢}{٥}$

فإن : Δ أ ب جـ يكون ....

(أ) قائم الزاوية. (ب) متساوى الساقين.

(جـ) متساوى الأضلاع. (د) مختلف الأضلاع.

---

١٨ نهــا (س ← $\frac{π}{٢}$) (٢ س - جا س) = ...

(أ) صفر (ب) ٢ (جـ) π (د) $\frac{π}{٢}$

---

١٩ إذا كانت : لو_س (س + ٦) = ٢ فإن : س ∈ ....

(أ) {٣ ، -٢} (ب) {٣} (جـ) {٣ ، ١} (د) {٦ ، ١}

---

٢٠ فى المثلث س ص ع يكون : $\frac{٢ سَ}{جا س}$ = ... نق

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) ٨

---

٢١ إذا كانت : د (س) = { $\frac{جا^٢ ٢ س}{س^٢}$ ، س < ٠ ؛ ٢ أ + ٣ جتا س ، س > ٠ }

وكانت : نهــا (س ← ٠) د (س) موجودة فإن : أ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) صفر (جـ) ٢ (د) $-\frac{١}{٢}$

---

٢٢ القيمة العددية للمقدار : $\frac{لو ٦٤}{لو ٨}$ تساوى ....

(أ) ٢ (ب) ٨ (جـ) ٨٠ (د) ٧٢

---

٢٣ تكون الدالة الأسية التى أساسها أ تزايدية إذا كانت ....

(أ) أ > ٠ (ب) أ > ١ (جـ) ٠ < أ < ١ (د) أ = ١

٢٤ Δ ل م ن فيه : ق (∠ ل) = ٣٠° ، م ن = ٧ سم فإن طول قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث تساوى ....

(أ) ١٤ (ب) ٧ (جـ) ٣,٥ (د) $\frac{١٤}{\sqrt{٣}}$

---

٢٥ إذا كان : لو س + لو ٥ = ٢ فإن : س = ...

(أ) ٣ (ب) ٨ (جـ) ١٧ (د) ٢٠

---

٢٦ الدالة الأحادية من بين الدوال المعرفة بالقواعد الآتية هى ....

(أ) $د_١$ (س) = جتا س (ب) $د_٢$ (س) = $س^٢$

(جـ) $د_٣$ (س) = $س^٣$ (د) $د_٤$ (س) = $س^٤$ + $س^٢$

---

٢٧ جملة مبلغ ٥٠٠٠ جنيه موضوع فى بنك يعطى فائدة مركبة سنوية قدرها ٥ ٪ لمدة ٧ سنوات = ... جنيه.

(أ) ٦٧٥٠ (ب) ٥٣٥٠ (جـ) ٧٠٣٥,٥ (د) ٨٥٠٠

---

٢٨ إذا كانت : $\lim_{س \to أ^+}$ د (س) = ل ، $\lim_{س \to أ^-}$ د (س) = م

وكانت الدالة متصلة عند س = أ فإن : $ل^٢ + م^٢ - ٢$ ل م = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) −١ (د) ٢

النموذج الخامس

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ الشكل المقابل يمثل دالة فى س مداها ....

(أ) ح − [٠ ، ٢]

(ب) ح − {٠}

(جـ) ح −]٠ ، ٢]

(د) ح −]٠ ، ٢[

---

٢ إذا كانت : د (س) = ٧ فإن مدى الدالة د هو ....

(أ) ح (ب) $ح^+$ (جـ) {٧} (د) ح − {٧}

---

٣ إذا كان مجال الدالة د : د (س) = $\frac{س}{|س| + أ}$ هو ح − {−٢ ، ٢}

فإن : أ = ...

(أ) ٢ (ب) −٢ (جـ) ±٢ (د) صفر

---

٤ إذا تقاطع منحنى الدالة د مع منحنى الدالة $د^{-١}$ فى النقطة (ك ، ٢ ك − ٣)

فإن : ك = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

---

٥ $\lim_{س \to \infty} \frac{س^٢ + ٥}{٦}$ = ...

(أ) صفر (ب) $\frac{٥}{٦}$ (جـ) ١ (د) ∞

---

٦ $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٢ - س - ٦}{س^٢ + س - ١٢}$ = ...

(أ) $\frac{٥}{٧}$ (ب) $\frac{١}{٧}$ (جـ) −١ (د) −٥

---

٧ إذا كانت د : د (س) = $\frac{س^٨ - أ^٨}{س^٥ - أ^٥}$ عند س ≠ أ ، د (أ) = ٢٠٠ متصلة عند س = أ

فإن : أ = ...

(أ) ٥ (ب) $\frac{٨}{٥}$ (جـ) ١٢٥ (د) $\frac{١}{٥}$

٨ إذا كان نق طول نصف قطر الدائرة الخارجة عن المثلث س ص ع

فإن : $\frac{ص}{٢ \text{ جا } ص}$ = ...

(أ) نق　　(ب) ٢ نق　　(جـ) $\frac{١}{٢}$ نق　　(د) ٤ نق

---

٩ المثلث أ ب حـ فيه : ٦ أ = ٤ ب = ٣ حـ فإن قياس أصغر زوايا المثلث = ...

لأقرب دقيقة.

(أ) ٢٨َ ٥٧°　　(ب) ١٢َ ٤١°　　(جـ) ٥٧َ ٢٨°　　(د) ٥٢َ ٣٦°

---

١٠ إذا كانت : د (س) = $\sqrt[٣]{س}$ ، ر (س) = $س^٢$ فإن : (د ∘ ر) (س) = ...

(أ) س　　(ب) $س^٢$　　(جـ) $\sqrt[٣]{س^٢}$　　(د) |س|

---

١١ مدى الدالة د : د (س) = $\begin{cases} ٠ & : س \leq ٠ \\ ١ & : س > ٠ \end{cases}$ هو ....

(أ) {١}　　(ب) {٠}　　(جـ) ح　　(د) {٠ ، ١}

---

١٢ إذا كانت : د : $ح^+$ ⟵ ح حيث د (س) = س − ٥ ، ر : [−١ ، ٥] ⟵ ح

حيث ر (س) = س − ٢ فإن مجال $\left(\frac{د}{ر}\right)$ (س) هو ....

(أ)]٠ ، ٥]　　(ب)]٠ ، ٥] − {٢}

(جـ) [١ ، ∞[　　(د) ح

---

١٣ في الدالة الأسيه د : د (س) = $أ^س$ ، أ > ١ تكون د (س) > ١

عندما س ∈ ....

(أ) ح　　(ب) $ح^+$　　(جـ) $ح^-$　　(د) ص

---

١٤ إذا كانت الدالة د : د (س) = $\begin{cases} \frac{\text{ظتا } س}{\pi - ٢ س} & : ٠ < س < \frac{\pi}{٢} \\ \text{جا} (\pi - س) & : س > \frac{\pi}{٢} \end{cases}$

فإن : $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}}$ د (س) = ...

(أ) ٢　　(ب) $\frac{\pi}{٢}$　　(جـ) π　　(د) غير موجودة.

١٥ $\lim_{س \to \infty} \frac{٥ + س^{-٢}}{٣ س^{-٢} + ١}$ = ...

(أ) $\frac{٥}{٤}$　　(ب) $\frac{٥}{٣}$　　(جـ) ٥　　(د) $\frac{١}{٣}$

---

١٦ س ص ع مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه ١٠ $\sqrt{٣}$ سم فإن طول قطر الدائرة الخارجة لهذا المثلث يساوي .... سم

(أ) ٥　　(ب) ١٠　　(جـ) ١٥　　(د) ٢٠

---

١٧ أ ب حـ مثلث فيه : $\frac{\text{جا } أ}{٣} = \frac{٢ \text{ جا } ب}{٥} = \frac{\text{جا } حـ}{٤}$ فإن : أ : ب : حـ = ...

(أ) ٦ : ٥ : ٨　　(ب) ٨ : ٥ : ٦　　(جـ) ٧ : ٢ : ٤　　(د) ٣ : ٥ : ٤

---

١٨ $\lim_{س \to ٠} \frac{\text{جا } ٢ س \text{ ظا } ٣ س}{٤ س^٢}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$　　(ب) $\frac{٣}{٤}$　　(جـ) $\frac{٣}{٢}$　　(د) ٦

---

١٩ إذا كان : $\sqrt{٢} \times \sqrt[٣]{٣} = \sqrt[٦]{س}$ فإن : س = ...

(أ) ٢٧　　(ب) ٤٨　　(جـ) ٧٢　　(د) ١٠٨

---

٢٠ إذا كان : لو (س + ١١) = ٢ فإن : س = ...

(أ) −٩　　(ب) ٢٢　　(جـ) ٨٩　　(د) ٩١

---

٢١ $\lim_{س \to ١} \frac{١ - \sqrt[ن]{س}}{١ - \sqrt[م]{س}}$ = ...

(أ) ١　　(ب) $\frac{ن}{م}$　　(جـ) −١　　(د) $\frac{م}{ن}$

---

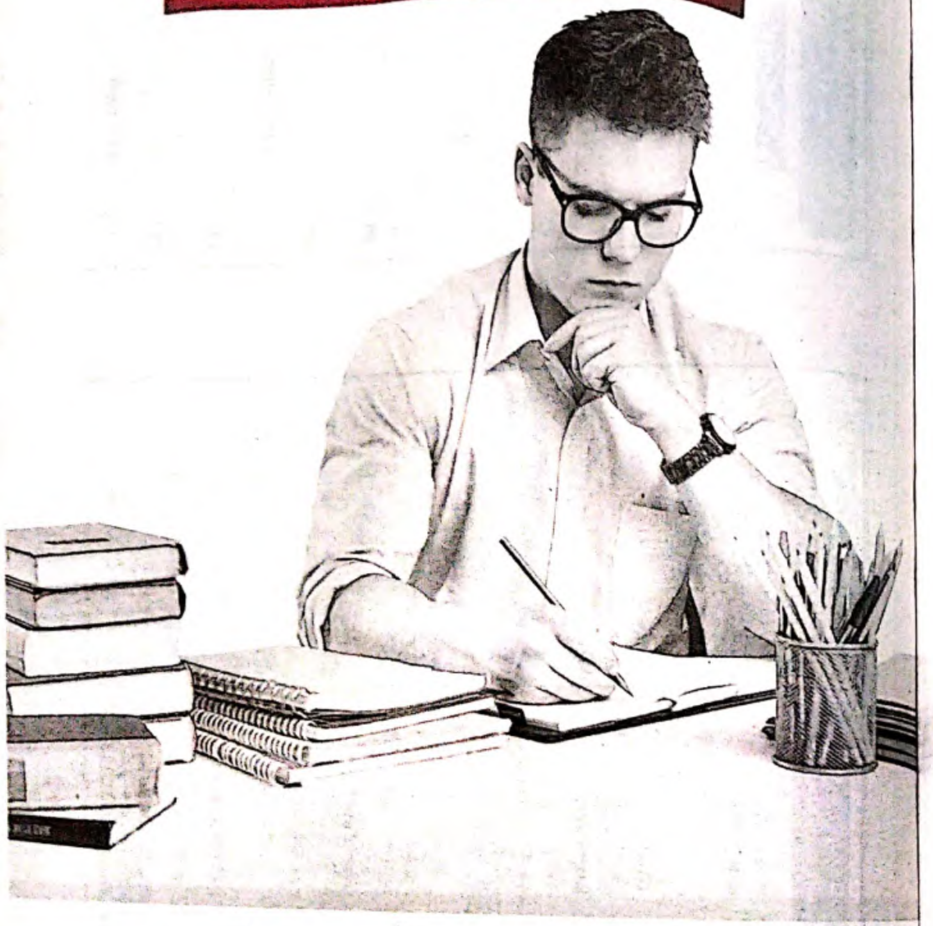
٢٢ إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} ٣ س - ١ & س \neq ٢ \\ ٦ & س = ٢ \end{cases}$

فإن : $\lim_{س \to ٢}$ د (س) = ...

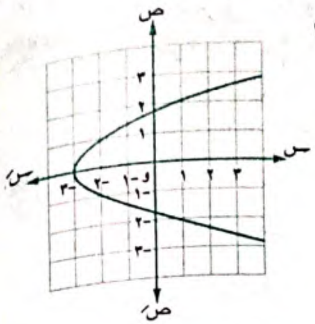
(أ) −٥　　(ب) ٥　　(جـ) ٦　　(د) ليس لها وجود.

الإجـابــات

موقع التفوق altFwoK.com



٢٣ المنحنى الموضح بالشكل المقابل متماثل حول المستقيم الذى معادلته ....



(أ) س = صفر

(ب) ص = صفر

(جـ) ص = −٢

(د) س = ٢

---

٢٤ إذا كانت : س ∈ [−١ ، ٤] فإن : |٢ س − ٣| ≥ ....

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) −٥

---

٢٥ إذا كان : لو$_٣$ (٤ + لو$_٢$ س) = ٢ فإن : س = ...

(أ) ١٦ (ب) ٣٢ (جـ) ٦٤ (د) ١٢٨

---

٢٦ $\lim_{\text{س} \to ١} \frac{\text{س}^{\text{أ}} - \text{س}^{\text{ح}}}{\text{س}^{\text{أ}} - \text{س}^{\text{ء}}}$ = ...

(أ) $\frac{\text{أ}+\text{ح}}{\text{أ}+\text{ء}}$ (ب) أ س$^{\text{ح}-\text{ء}}$ (جـ) $\frac{\text{أ}-\text{ح}}{\text{أ}-\text{ء}}$ (د) $\frac{\text{ح}}{\text{ء}}$

---

٢٧ إذا كانت د : د (س) = $\frac{\text{س}^٢ - ٢٥}{\text{س} - ٥}$ حيث س ≠ ٥ فإن قيمة د (٥) التى تجعل الدالة متصلة عند هذا الموضع = ...

(أ) ١٠ (ب) صفر (جـ) ٢٥ (د) غير معرفة.

---

٢٨ المثلث أ ب حـ فيه : أَ = ٥ سم ، بَ = ٧ سم ، ق (∠ حـ) = ٦٥°

فإن : حـَ = ... سم

(أ) ٦,٧ (ب) ٧,٦ (جـ) ٥,٧ (د) ٧,٥

إرشادات الاختبارات التراكمية القصيرة فى الجبر

الاختبار الأول

١ ① (جـ) ② (د) ③ (جـ) ④ (أ)

٢
① تزايدية فى]٠ ، ٢[وثابتة فى]٢ ، ∞[
② تزايدية فى]-١ ، ٠[وتناقصية فى]٠ ، ٤[
③ تناقصية فى]- ∞ ، ١[وتزايدية فى]١ ، ∞[

الاختبار الثانى

١ ① (جـ) ② (جـ) ③ (جـ) ④ (ب) ⑤ (د) ⑥ (جـ)

٢
① (د ∘ ر) (س) = $\frac{١}{س + ٢}$
، مجال (د ∘ ر) = ح - {-٣}
② (ر ∘ د) (س) = $\frac{١}{س}$ + ٢
، مجال (ر ∘ د) = ح - {٠}

الاختبار الثالث

١ ① (ب) ② (جـ) ③ (د) ④ (ب) ⑤ (جـ) ⑥ (أ)

٢ (د١ + د٢) (س) = س٥ + جا س ونوعها فردية

الاختبار الرابع

١ مثل بنفسك ، المدى = [٠ ، ∞[والنوع : ليست زوجية وليست فردية الاطراد : تناقصية فى]- ∞ ، ٠[وتزايدية فى]٠ ، ∞[

٢ المجال = ح - {٢} وأثبت بنفسك

٣ مثل بنفسك ، المجال = ح - {-١}
، المدى = ح - {-٢}
الاطراد : تزايدية فى ح - {-١}

٤ مثل بنفسك ، المدى =]١ ، ٣] ∪ {-١}

الاختبار الخامس

١ ① (جـ) ② (أ) ③ (جـ) ④ (أ) ⑤ (جـ) ⑥ (ب)

٢ مثل بنفسك ، المدى = [٠ ، ∞[والنوع : زوجية
الاطراد : تناقصية فى]- ∞ ، -٢[،]٠ ، ٢[
وتزايدية فى]-٢ ، ٠[،]٢ ، ∞[

الاختبار السادس

١ ① (ب) ② (جـ) ③ (جـ) ④ (جـ) ⑤ (د) ⑥ (د)

٢
① م.ح = {٤}
② م.ح = [$\frac{٥}{٤}$ ، $\frac{٧}{٤}$] - {$\frac{٣}{٢}$}

الاختبار السابع

١ ① (ب) ② (أ) ③ (ب) ④ (د) ⑤ (أ) ⑥ (أ)

٢
① م.ح = {١ ، -١ ، ٢٧ ، -٢٧}
② م.ح = {٦}

الاختبار الثامن

١ ① (د) ② (جـ) ③ (جـ) ④ (ب) ⑤ (د) ⑥ (ب)

٢ د (ن) = ٦٠ (١ + ٠,٢٥)ن ، ٢٢٩ نحلة تقريبًا

الاختبار التاسع

١ ① (أ) ② (أ) ③ (ب) ④ (د) ⑤ (ب) ⑥ (جـ)

٢
① المجال = ح - {-١} ، المدى = ح - {٢}
② د$^{-١}$ (س) = $\frac{-س + ٣}{س - ٢}$ ، مجال د$^{-١}$ = ح - {٢}
، مدى د$^{-١}$ = ح - {-١}

الاختبار العاشر

١ ① (جـ) ② (جـ) ③ (جـ) ④ (جـ) ⑤ (ب) ⑥ (أ)

٢
① مجموعة الحل = {٨}
② مجموعة الحل = {-١ ، ٥}

الاختبار الحادى عشر

١ ① (جـ) ② (أ) ③ (جـ) ④ (ب) ⑤ (أ) ⑥ (د)

٢ أثبت بنفسك.

إرشادات الاختبارات التراكمية القصيرة فى التفاضل

الاختبار الأول

١ ① ١ ② ٤ ③ غير معرفة ④ ٣

٢ ① (د) ② (د) ③ (جـ)

الاختبار الثانى

١ ① (أ) ② (د) ③ (جـ) ④ (جـ)

٢ ① $\frac{١}{٤}$ ② $\frac{٧}{٢}$ ③ ٣٣ ④ ١

الاختبار الثالث

١ ① (أ) ② (د) ③ (ب) ④ (أ) ⑤ (أ) ⑥ (د)

٢ ① ٦٤ ② ٥

الاختبار الرابع

١ ① (د) ② (ب) ③ (ب) ④ (د)

٢ ① ٢ ② $\frac{١}{٤}$ ③ ∞ ④ ٧

الاختبار الخامس

١ ① (جـ) ② (جـ) ③ (جـ) ④ (جـ) ⑤ (جـ) ⑥ (ب)

٢ ① ٢ ② $\frac{١}{٤}$

الاختبار السادس

١ ① (جـ) ② (ب) ③ (أ) ④ (د) ⑤ (أ) ⑥ (جـ)

٢ نهـــا د (س) = -١ (س ← ٢)

الاختبار السابع

١ ① (د) ② (أ) ③ (جـ) ④ (جـ) ⑤ (جـ) ⑥ (أ)

٢ الدالة د متصلة عند س = ١

إرشادات الاختبارات التراكمية القصيرة فى حساب المثلثات

الاختبار الأول

١ ① (د) ② (جـ) ③ (جـ) ④ (ب)

٢ بَ = ١٨,٠٤ سم ، نق = ١٦,٥٦ سم

الاختبار الثانى

١ ① (جـ) ② (جـ) ③ (جـ) ④ (جـ) ⑤ (د) ⑥ (د)

٢ مساحة الدائرة المارة برؤوس △ أ حـ ء = ٢٥ π سم٢

الاختبار الثالث

١ ① (جـ) ② (أ) ③ (جـ) ④ (أ) ⑤ (جـ) ⑥ (ب)

٢ يوجد حلان ، حـَ = ٢٧,٢ سم أو ٨,٧ سم

إرشادات نماذج اختبارات الكتاب المدرسى فى الجبر

الاختبار الأول

١ ① (د) ② (جـ) ③ (أ) ④ (أ)

٢
(أ) ① مجال د =]- ∞ ، ١[
② مجال ر = ح - {١ ، -١}
(ب) ارسم بنفسك ، المدى =]٠ ، ∞[

٣
(أ) ارسم بنفسك
• المجال = [-٢ ، ٣]
• الدالة تزايدية على الفترة]-٢ ، ٣[
(ب) ص = س - ١ ومثل بنفسك.

٤
(أ) ① م.ح = {٤} ② م.ح = {$\frac{١}{٧}$}
(ب) ارسم بنفسك.

٥
(أ) مجموعة الحل = ح -]$\frac{٥}{٢}$ ، ٣[
(ب) مجموعة الحل = {٢٧ ، -٢٧ ، ١ ، -١}

الاختبار الثانى

١ ① (د) ② (ب) ③ (د) ④ (ب)

٢ (أ) أثبت بنفسك. (ب) ٦

٣
(أ) مثّل بنفسك.
(ب) ① ارسم بنفسك ، المدى = [٠ ، ∞[
، الدالة تناقصية فى الفترة]- ∞ ، ٢[
وتزايدية فى الفترة]٢ ، ∞[
② ارسم بنفسك ، المدى = [٠ ، ٣]
، الدالة تناقصية فى الفترة]٠ ، ٠,٢٧[
،]٢ ، ٣,٧٣[
، تزايدية فى الفترة]٠,٢٧ ، ٢[
،]٣,٧٣ ، ٤[

٤
(أ) ① فردية ② ليست زوجية وليست فردية.
③ زوجية
(ب) ① مجموعة الحل = [- ∞ ، ٠]
② مجموعة الحل = ∅

٥
(أ) ارسم بنفسك ، المجال = ح - {-١}
، المدى = ح - {-٢} ، تزايدية على ح - {-١}
(ب) ٢

إرشادات نماذج اختبارات الكتاب المدرسى فى التفاضل وحساب المثلثات

الاختبار الأول

1
① (جـ) ② (ب) ③ (د) ④ (جـ)

2
(1) ① $\frac{8}{7}$ ② ١٧
(ب) ق (∠ أ) ≃ ٣٥ َ ٤٨ ° ، ق (∠ ب) ≃ ١٤ َ ٦٣ °
، ق (∠ حـ) ≃ ١١ َ ٦٨ ° ، حـَ ≃ ٢٦ سم

3
(1) ① صفر ② ١ ③ غير موجودة
(ب) محيط متوازى الأضلاع ≃ ٣٨ سم

4
(1) ق (∠ ب) ≃ ٩ َ ٦٤ ° ، أ ١٥ َ ١١٥ °
(ب) أ = $-\frac{1}{2}$

5
(1) ٢ (ب) $\frac{1}{16}$

الاختبار الثانى

1
① (د) ② (د) ③ (أ) ④ (جـ)

2
(1) أ = -١
(ب) ق (∠ حـ) = ٩٠ ° ، مساحة △ أ ب حـ = ٢٤ سم²

3
(1) $\frac{3}{2}$
(ب) حـَ ≃ ١٩٫٥٠٤ سم ، ق (∠ أ) ≃ ٢٠ َ ٢٦ °
، ق (∠ ب) = ٤٠ َ ٤٧ °

4
(1) $-\frac{5}{4}$
(ب) أثبت بنفسك ، مساحة الشكل أ ب حـ ء = ١٢٤ سم²

5
(1) ① $\frac{1}{4}$ ② ٢
(ب) ٦١٫٩ سم²

إرشادات نماذج الامتحانات النهائية

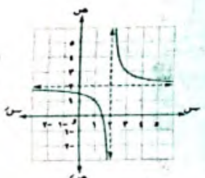
النموذج الأول

1 (ب) **2** (جـ) **3** (ب) **4** (ب)

5
∵ حـَ² = أ² + بَ² - ٢ أ بَ جتا حـ
= ٤٩ + ٨١ - ٢ × ٧ × ٩ جتا ٣٢ َ ٩٦ °
∴ حـَ = ١٢ سم
، مساحة △ أ ب حـ = $\frac{1}{2}$ أ بَ جا حـ
= $\frac{1}{2}$ × ٧ × ٩ جا ٣٢ َ ٩٦ °
= ٣١ سم²

6 (ب) **7** (أ)

8
ر (س) = $\frac{1}{س - 2}$ + ٢



مدى الدالة ر هو ح - {٢}
، ر تناقصية فى كل من]- ∞ ، ٢[،]٢ ، ∞[

9 (جـ) **10** (أ) **11** (ب)
12 (جـ) **13** (أ) **14** (جـ)

15
بوضع ٢ - س ≤ ٠ ∴ س ≥ ٢
∴ مجال د هو]- ∞ ، ٢] ، مدى د هو [٢ ، ∞[
، ∵ ص = ٢ + $\sqrt{2 - س}$ وبتبديل المتغيرين
∴ س = ٢ + $\sqrt{2 - ص}$
∴ $\sqrt{2 - ص}$ = س - ٢
∴ ٢ - ص = س² - ٤ س + ٤
∴ ص = - س² + ٤ س - ٢
∴ د⁻¹ (س) = - س² + ٤ س - ٢
، مجال د⁻¹ = مدى د = [٢ ، ∞[
، مدى د⁻¹ = مجال د =]- ∞ ، ٢]

16 (جـ) **17** (ب) **18** (أ)
19 (د) **20** (د)

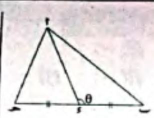
21
د (٢⁺) = نهـا (س ← ٢⁺) (٥ س - ٤) = ٦
، د (٢⁻) = نهـا (س ← ٢⁻) (س² - س + ٤) = ٦
∴ د (٢⁺) = د (٢⁻) = ٦
∴ نهـا (س ← ٢) د (س) = ٦
، ∵ د (٢) = ك
∴ ك = ٦ حتى تصبح د متصلة عند س = ٢

22 (أ) **23** (د) **24** (ب)
25 (أ) **26** (جـ) **27** (جـ)
28 (ب) **29** (جـ) **30** (أ)
31 (أ) **32** (ب)

النموذج الثانى

1 (جـ) **2** (أ)

3



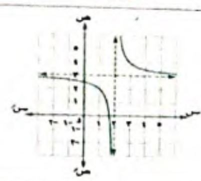
(أ ب)² = (أ ء)² + (ب ء)²
- ٢ × أ ء × ب ء جتا θ (١)
، (أ حـ)² = (أ ء)² + (حـ ء)²
- ٢ × أ ء × حـ ء جتا (١٨٠° - θ)
، ∵ ب ء = حـ ء ، جتا (١٨٠° - θ) = - جتا θ
∴ (أ حـ)² = (أ ء)² + (ب ء)² + ٢ × أ ء × ب ء جتا θ (٢)
بجمع (١) ، (٢) :
∴ (أ ب)² + (أ حـ)² = ٢ (أ ء)² + ٢ (ب ء)²
∴ (٥)² + (٨)² = ٢ (أ ء)² + ٢ (٦)²
أ ء = $\frac{\sqrt{34}}{2}$ ≃ ٢٫٩ سم

4 (د) **5** (ب) **6** (جـ)

7
$\frac{1}{س} = \frac{1}{5 + 2\sqrt{6}} \times \frac{5 - 2\sqrt{6}}{5 - 2\sqrt{6}} = \frac{5 - 2\sqrt{6}}{25 - 24}$
= ٥ - ٢ $\sqrt{6}$
∴ س + $\frac{1}{س}$ = ٥ + ٢ $\sqrt{6}$ + ٥ - ٢ $\sqrt{6}$ = ١٠
∴ لو (س + $\frac{1}{س}$) = لو ١٠ = ١

8 (جـ) **9** (جـ) **10** (جـ)
11 (جـ) **12** (ب) **13** (د)
14 (د) **15** (أ)

16



مجال ر = ح - {٢} ، المدى = ح - {٢}
، ر تناقصية فى كل من]- ∞ ، ٢[،]٢ ، ∞[
، ر ليست زوجية وليست فردية ، ر أحادية

17 (د) **18** (جـ) **19** (جـ) **20** (جـ)

21
د (٣⁺) = نهـا (س ← ٣⁺) (٣ س + ١) = ١٠
، د (٣⁻) = نهـا (س ← ٣⁻) (س² + ١) = ١٠
، ∵ د (٣⁺) = د (٣⁻) = ١٠
∴ نهـا (س ← ٣) د (س) موجودة وتساوى ١٠

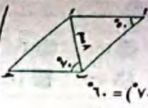
22 (جـ) **23** (د) **24** (د) **25** (ب)
26 (ب) **27** (ب) **28** (د) **29** (أ)
30 (أ) **31** (أ) **32** (أ)

النموذج الثالث

1
∵ د (٢ س - ١) + د (س - ٢) = ٥٠
∴ ٧^(٢ س - ١ + ١) + ٧^(س - ٢ + ١) = ٥٠
∴ ٧^(٢ س) + ٧^(س - ١) = ٥٠
∴ ٧ × ٧^(٢ س) + ٧^س - ٣٥٠ = ٠
∴ (٧^س - ٧) × (٧ × ٧^س + ٥٠) = ٠
∴ ٧^س = ٧ ∴ س = ١
أ، ٧^(س + ١) = - ٥٠ (مرفوض)

2 (جـ) **3** (د) **4** (ب) **5** (ب)
6 (د) **7** (ب) **8** (أ)

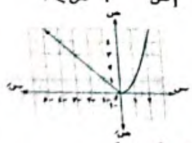
9



ق (∠ أ ء ب) = ٧٠°
، ق (∠ أ ب ء) = ١٨٠° - (٥٠° + ٧٠°) = ٦٠°
∴ $\frac{8}{جا 50°} = \frac{أ ب}{جا 70°} = \frac{أ ء}{جا 60°}$
∴ أ ب = ٩٫٨ سم ، أ ء = ٩ سم
محيط متوازى الأضلاع = ٣٨ سم

10 (أ) **11** (ب) **12** (أ) **13** (جـ)
14 (د) **15** (د) **16** (د) **17** (ب)
18 (أ) **19** (أ) **20** (جـ) **21** (ب)

22
د (س) = { - س ، س ≤ ٠ ؛ س² ، س > ٠ }



• مدى الدالة = [٠ ، ∞[
• الدالة تناقصية فى]- ∞ ، ٠[، تزايدية فى]٠ ، ∞[

23 (د) **24** (ب) **25** (ب)
26 (جـ) **27** (جـ)

28
∵ د متصلة عند س = صفر
∴ د (٠) = نهـا (س ← ٠) د (س)
∴ ك = نهـا (س ← ٠) $\frac{(س + 2)^5 - 2^5}{س}$
∴ ك = ٥ × ٢⁴ = ٨٠

29 (د) **30** (جـ) **31** (د) **32** (ب)

النموذج الرابع

1 (أ) **2** (أ) **3** (جـ) **4** (ب)
5 (ب) **6** (د) **7** (ب)

8
حـَ = ٢١ - (٨ + ٧) = ٦ سم
∴ حـَ هو طول أصغر ضلع
∴ ق (∠ حـ) هو قياس أصغر زاوية
∴ جتا حـ = $\frac{64 + 49 - 36}{2 \times 8 \times 7}$
∴ ق (∠ حـ) ≃ ٣٤ َ ٤٦ °

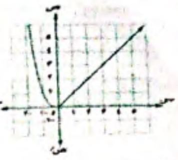
9
نوجد الدالة العكسية للدالة د
بوضع ص = ٢ س + أ وبتبديل المتغيرين
∴ س = ٢ ص + أ ∴ ٢ ص = س - أ
∴ ص = $\frac{1}{2}$ س - $\frac{1}{2}$ أ
∴ د⁻¹ (س) = $\frac{1}{2}$ س - $\frac{1}{2}$ أ
، ∵ ر هى الدالة العكسية للدالة د
∴ ر (س) = د⁻¹ (س)
∴ ب س + ٢ = $\frac{1}{2}$ س - $\frac{1}{2}$ أ
وبمقارنة المعاملات ∴ ب = $\frac{1}{2}$ ، أ = -٤

10 (أ) **11** (جـ) **12** (جـ)

13
∵ د (-١⁻) = د (-١⁺)
∴ - أ - ٢ = - ٢ - ٢
∴ أ = ٢

14 (د) **15** (جـ)

النموذج الخامس



- المدى = $[\cdot , \infty[$
- الدالة ليست زوجية وليست فردية
- الدالة تزايدية في $]\cdot , \infty[$ وتناقصية في $]-\infty , \cdot[$

$\because 3^{2س-1} - 4 \times 3^{س} + 9 = \cdot$ وبالضرب × ٣

$\therefore 3^{2س} - 12 \times 3^{س} + 27 = \cdot$

$\therefore (3^{س} - 3)(3^{س} - 9) = \cdot$

$\therefore 3^{س} = 3 \qquad \therefore س = 1$

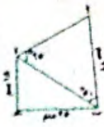
أو $3^{س} = 9 = 3^2 \qquad \therefore س = 2$

$\therefore$ مجموعة الحل $= \{1 , 2\}$

من $\triangle$ أ ب ء:

$ق(\angle ٤) = 180^\circ - (50^\circ - 65^\circ)$ ، $= 65^\circ$

$\therefore$ ء ب = أ ب = ٣٢ سم



، من $\triangle$ ب ء حـ:

$\therefore ق(\angle ب ء حـ) = 9^\circ 48' 44''$

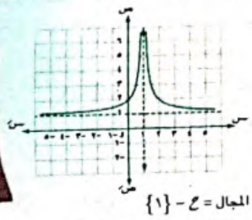
- $د(س) = |س| + 1$ ، $ر(س) = \frac{1}{س - 1}$

$\therefore (د \circ ر)(س) = د[ر(س)] = د\left(\frac{1}{س-1}\right) = \left|\frac{1}{س-1}\right| + 1$

، م$_ر$ = مجال ر = ح − {١} ، م$_د$ = ح

$\therefore$ مجال (د ∘ ر) = ح − {١}

- التمثيل البياني للدالة (د ∘ ر):



- المجال = ح − {١}
- الدالة ليست زوجية وليست فردية
- المنحنى متماثل بالنسبة للمستقيم س = ١
- الدالة ليست أحادية.

النموذج السادس

① $د_1(-س) = (-س)^3$ جا$(-س)$ = $-س^3$ جا س = ...

$\therefore د_1$ دالة فردية

② $د_2(-س) = \begin{cases} (-س)^2 & , -س \leq \cdot \\ |-س| & , -س > \cdot \end{cases}$

$\therefore د_2$ ليست زوجية وليست فردية.

$\because د(\cdot) = \lim ...$ ، $\therefore د(\cdot) \neq ...$

$\therefore$ د غير متصلة عند س = ٠

نضع ص $= \frac{1}{س^2 + 1}$ حيث س $\in$ ح ، ص $\in$]٠ ، ١] وبتبديل المتغيرين

$\therefore$ مدى د$^{-1}$ = ح

$\therefore ق(\angle حـ) = 180^\circ - (40^\circ + 30^\circ) = 110^\circ$

$\therefore$ أ حـ = ١٢٫٩ سم ، حـ = ١٨٫٨ سم

$\because$ د متصلة عند س = −٣

النموذج السابع

$\therefore س^{\frac{4}{3}} - 10 س^{\frac{2}{3}} + 9 = \cdot$

$\therefore (س^{\frac{2}{3}} - 9)(س^{\frac{2}{3}} - 1) = \cdot \qquad \therefore س^{\frac{2}{3}} = 9$

$\therefore س = \pm 27$ أو $س^{\frac{2}{3}} = 1 \qquad \therefore س = \pm 1$

$\therefore$ مجموعة الحل $= \{-1 , 1 , -27 , 27\}$

$ع^2 = 25 + 49 - 2 \times 5 \times 7$ جتا 65°

$\therefore ع \approx 6{,}7$ سم

$\therefore$ محيط $\triangle$ س ص ع = ١٨٫٧ سم

$د(\cdot) = \lim \frac{5 س + 1}{س + 2} = 2$

، $د(\cdot) = \lim \frac{ظا 2 س}{جا س}$

وبالقسمة بسطًا ومقامًا على س

$= \lim \dfrac{\frac{ظا 2س}{س}}{\frac{جا س}{س}} = 2$

$\therefore د(\cdot) = د(\cdot) = 2$

$\therefore \lim د(س) = 2$

م$_ر$ = مجال ر = [٢ ، ∞[

د (د ∘ ر)(س) = د[ر(س)] = د$(\sqrt{س - 2})$

$= (\sqrt{س-2})^2 - 3$

$= س - 2 - 3 = س - 5$

$\therefore$ م$_د$ = قيم س التي تجعل $\sqrt{س-2}$ في مجال د وهي ح

$\therefore$ مجال (د ∘ ر) = [٢ ، ∞[

$\therefore (د \circ ر)(3) = 3 - 5 = -2$

النموذج الثامن

$5^{س} + 5^{س-1} = 150$

$\therefore 5^{س-1}(5 + 1) = 150$

$\therefore 5^{س-1} = 25 = 5^2 \qquad \therefore س = 3$

$ق(\angle حـ) = 180^\circ - (111^\circ + 32^\circ) = 37^\circ$

$\therefore$ نق = ١٧ سم ، ب حـ = ١٨ سم

$\therefore$ مساحة $\triangle$ أ ب حـ $= \frac{1}{2}$ ب حـ جا ب

$= \frac{1}{2} \times 18 \times 19 \times$ جا 112°

$= 159$ سم^2

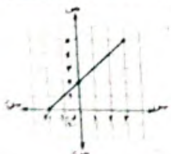
$(د + ر)(س) = د(س) + ر(س)$

$= س - 2 + 4 - 3 س$

$= 2 + س$

- مجال (د + ر) = [−٢ ، ٢] ∩ ح = [−٢ ، ٣]

س	−٢	٠	٣
(د + ر)(س)	٠	٢	٥



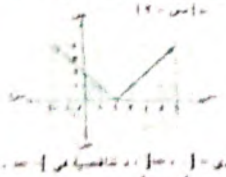
- المدى = [٠ ، ٥]
- الدالة تزايدية على مجالها.

$\because$ د متصلة عند س = ٢

النموذج التاسع

بوضع ص $= 3 + 2\sqrt{س - 1}$ حيث س ≥ ١ ، ص ≥ ٣ وبتبديل المتغيرين

$\therefore س = 3 + 2\sqrt{ص - 1}$ حيث ص ≥ ١ ، س ≥ ٣



$\therefore$ المدى = [٠ ، ∞[، د تناقصية في]−∞ ، ١] ، وتزايدية في [١ ، ∞[

١٧ (ب) **١٨** (ب) **١٩** (ب) **٢٠** (أ)

٢١

∵ ٢١/حا أ = ٢٥/حا ب = حـ/حا حـ = ٢٨

∴ حا أ = $\frac{٣}{٤}$

، ∵ المثلث حاد الزوايا

∴ ق(∠ أ) = ٤٨° ٣٥ ٢٥ ، حا ب = $\frac{٢٥}{٢٨}$

، ∵ المثلث حاد الزوايا

∴ ق(∠ ب) = ٦٣° ١٤ ٤

∴ ق(∠ حـ) = ٦٨° ١٠ ٤١

∴ حـ = ٢٨ حا ٦٨° ١٠ ٣١ = ٢٦ سم

٢٢ (أ) **٢٣** (د) **٢٤** (د) **٢٥** (حـ)

٢٦ (حـ) **٢٧** (د) **٢٨** (ب) **٢٩** (ب)

٣٠ (حـ) **٣١** (ب) **٣٢** (د)

النموذج العاشر

١ (أ) **٢** (د) **٣** (ب) **٤** (حـ)

٥ (د) **٦** (حـ) **٧** (ب)

٨

∵ د متصلة عند س = ٢

∴ د(٢⁺) = د(٢⁻) = د(٢) = ٤

∴ نهـا_(س ← ٢) (س² + أ س − ٢) = ٤

∴ ٤ + ٢ أ − ٢ = ٤ ∴ أ = ١

، نهـا_(س ← ٢) (٥ أ + ب س) = ٤

∴ ٥(١) + ب(٢) = ٤ ∴ ب = −$\frac{١}{٢}$

٩

∵ ٣٦ + ب + حـ = ٧٠

∴ ب + حـ = ٤٤

∴ ب = ٤٤ − حـ

، ∵ أ² = ب² + حـ² − ٢ ب حـ حتا أ

∴ (٣٦)² = (٤٤ − حـ)² + حـ²

− ٢ (٤٤ − حـ) حـ حتا ٦٠°

∴ ١٢٩٦ = ١٩٣٦ − ٨٨ حـ + حـ² + حـ² − ٤٤ حـ + حـ²

∴ ٣ حـ² − ١٣٢ حـ + ١٢٦٠ = ٠

∴ حـ² − ٤٤ حـ + ٤٢٠ = ٠

∴ (حـ − ٣٠)(حـ − ١٤) = ٠

∴ حـ = ٣٠ سم ومنها ب = ١٤ سم

أو حـ = ١٤ سم ومنها ب = ٣٠ سم

∴ ب حـ = ١٤ × ٣٠ = ٤٢٠

∴ مساحة Δ أ ب حـ = $\frac{١}{٢}$ ب حـ حا أ

= $\frac{١}{٢}$ × ٤٢٠ × حا ٦٠°

= ١٠٥ √٣ سم²

١٠ (د) **١١** (د) **١٢** (حـ) **١٣** (د)

١٤ (أ) **١٥** (أ) **١٦** (ب) **١٧** (ب)

١٨ (ب) **١٩** (د) **٢٠** (حـ)

٢١

∵ |س − ٣| = |٩ − ٢ س|

∴ س − ٣ = ٩ − ٢ س

∴ ٣ س = ١٢

∴ س = ٤ أو س − ٣ = −٩ + ٢ س

∴ س = ٦

∴ مجموعة الحل = {٤ ، ٦}

٢٢ (حـ) **٢٣** (د) **٢٤** (د)

٢٥ (د) **٢٦** (ب) **٢٧** (حـ)

٢٨

∵ د(س) = ٧^(س+١)

∴ د(٢ س − ١) + د(س − ٢) = ٥٠

∴ ٧^(٢س−١+١) + ٧^(س−٢+١) = ٥٠

∴ ٧^(٢س) + ٧^(س−١) = ٥٠

∴ ٧ × (٧^س)² + ٧^س − ٣٥٠ = ٠

∴ (٧^س − ٧)(٧ × ٧^س + ٥٠) = ٠

∴ ٧^س = ٧

∴ س = ١ أو ٧ × ٧^س = −٥٠ (مرفوض)

٢٩ (حـ) **٣٠** (د) **٣١** (أ) **٣٢** (ب)

إجابات نماذج امتحانات بنظام أسئلة الاختيار من متعدد

النموذج الأول

١ (أ)

٢ (أ)

الحل :

∵ لو₂ س = لو₄ ٩ ∴ لو س / لو ٢ = لو ٩ / لو ٤

∴ لو س = (٢ لو ٣ × لو ٢) / (٢ لو ٢)

∴ لو س = لو ٣ ∴ س = ٣

٣ (د)

الحل :

د(س) = √(١ − حتا² س)/س = √(حا² س)/س = |حا س|/س

∴ د(٠⁺) = نهـا حا س/س = ١

∴ د(٠⁻) = نهـا −حا س/س = −١

∴ د(٠⁺) ≠ د(٠⁻)

∴ نهـا د(س) غير موجودة.

٤ (حـ)

الحل :

حتا ب = (أ² + حـ² − ب²)/(٢ أ حـ) = (٢٥ + ٩ − ٤٩)/(٢ (٥)(٣)) = −$\frac{١}{٢}$

∴ ق(∠ ب) = ١٢٠°

٥ (ب)

الحل :

لو_(س ص) ($\frac{١}{س}$) + لو_(س ص) ($\frac{١}{ص}$) = لو_(س ص) ($\frac{١}{س ص}$)

= لو_(س ص) (س ص)⁻¹ = − لو_(س ص) س ص = −١

٦ (ب)

الحل :

نهـا_(س ← ١٦) (∛(س⁷) − ١٢٨)/(س − ١٦) = نهـا_(س ← ١٦) (س^(٧/٤) − ١٦^(٧/٤))/(س − ١٦)

= $\frac{٧}{٤}$ × ١٦^(٣/٤) = ١٤

٧ (حـ)

الحل :

د(٠⁺) = نهـا (٢ س + حا س)/(طا ٢ س + ٤ س)

= نهـا (٢ + حا س/س)/(طا ٢ س/س + ٤) = (٢ + ١)/(٢ + ٤) = $\frac{١}{٢}$

، د(٠⁻) = نهـا (٥ س + $\frac{١}{٢}$) = ٥(٠) + $\frac{١}{٢}$ = $\frac{١}{٢}$

∴ د(٠⁺) = د(٠⁻) = $\frac{١}{٢}$

∴ نهـا د(س) = $\frac{١}{٢}$

٨ (أ)

الحل :

ص² = س² + ع² − ٢ س ع حتا ص

= (٢٠)² + (١٦)² − ٢ × ٢٠ × ١٦ × ٠٫٤

∴ ص² = ٤٠٠

∴ ص = ٢٠ سم

٩ (ب)

١٠ (ب)

الحل :

ص = ٢^س بتبديل المتغيرات

∴ س = ٢^ص ∴ ص = لو₂ س

∴ د⁻¹(س) = لو₂ س

١١ (د)

الحل :

بوضع س + ٣ ≥ ٠ ∴ س ≥ −٣

∴ مجال الدالة = [−٣ ، ∞[

١٢ (د)

الحل :

نهـا_(س ← π/٤) طا س / س = طا(π/٤)/(π/٤) = ١/(π/٤) = $\frac{٤}{\pi}$

١٣ (حـ)

الحل :

نهـا ∛(٢)/٩ ... = $\frac{١}{٩}$ نهـا ٢^(١/٢) ... = $\frac{١}{٩}$ × ١ = $\frac{١}{٩}$

١٤ (د)

الحل :

محيط Δ أ ب حـ / (حا أ + حا ب + حا حـ) = ٢ نق

∴ ٢٠ / (حا ٨٠° + حا ٦٠° + حا ٤٠°) = ٢ نق

∴ ٢ نق = ٨ سم

∴ طول قطر الدائرة = ٨ سم

١٥ (د)

الحل :

∵ لو_س ٢ = ٢ ∴ س² = ٢

∴ س² = $\frac{١}{٢}$

∴ س = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ والحل السالب مرفوض

١٦ (ب)

الحل :

(ب ∘ د)(١) = ب(د(١)) = ب(٤) = ٢٠

١٧ (أ)

الحل :

نهـا (١ − حتا س)/(٤ س) = $\frac{١}{٤}$ نهـا (١ − حتا س)/س

= $\frac{١}{٤}$ × ٠ = ٠

١٨ (أ)

١٩ (ب)

الحل :

د(−س) = (−س)(طا(−س))/|−س| = (−س)(−طا س)/|س|

= س طا س/|س| = د(س)

٢٠ (د)

الحل :

∵ |س| > ٢ ∴ −٢ > س > ٢

∴ س ∈]−٢ ، ٢[

٢١ (د)

٢٢ (حـ)

الحل :

٢^(س+١) + ٢^س = ١٢

∴ ٢^س (٢ + ١) = ١٢

∴ ٢^س = ٤ ∴ س = ٢

∴ م.ح = {٢}

٢٣ (أ)

٢٤ (حـ)

الحل :

∵ د متصلة عند س = −٢

∴ د(−٢) = د(−٢⁺) = د(−٢⁻)

∴ ٤ − أ = −٢ ∴ أ = ٦

٢٥ (ب)

الحل :

$\frac{حـ}{جا حـ} = ٢$ نق

∴ $\frac{٥ حـ}{جا حـ} = ٥ \times ٢$ نق $= ١٠$ نق

٢٦ (ب)

٢٧ (د)

الحل :

∵ أ ب حـ مثلث ∴ أ + ب + حـ = ١٨٠°

∴ أ + ب = ١٨٠° − حـ

∴ جتا (أ + ب) = جتا (١٨٠° − حـ) = − جتا حـ

٢٨ (جـ)

الحل :

$نهــا_{س \to \infty} \frac{أ س^٢ - ٥ س}{٢ س^٢ + ٣ س} = نهــا_{س \to \infty} \frac{أ - \frac{٥}{س}}{٢ + \frac{٣}{س}}$

$= \frac{أ - ٠}{٢ + ٠} = \frac{أ}{٢}$

∴ $\frac{أ}{٢} = ٣$ ∴ أ = ٦

النموذج الثانى

١ (د)

الحل :

$(٢٥)^{س} = (٥^{س})^٢ = (٢)^٢ = ٤$

٢ (أ)

الحل :

∵ النقطة $(\frac{١}{٤} ، -\frac{١}{٢})$ تنتمى للمنحنى

ص = لو$_٤$ (١ − أ س)

∴ $-\frac{١}{٢} =$ لو$_٤$ $(١ - \frac{١}{٤} أ)$

∴ $١ - \frac{١}{٤} أ = ٤^{-\frac{١}{٢}}$ ∴ $١ - \frac{١}{٤} أ = \frac{١}{٢}$

∴ $\frac{١}{٤} أ = \frac{١}{٢}$ ∴ أ = ٢

٣ (جـ)

الحل :

$نهــا_{س \to \infty} \frac{س^٢ + ٥}{٢ س^٢ + ٣ س} = نهــا_{س \to \infty} \frac{١ + \frac{٥}{س^٢}}{٢ + \frac{٣}{س}}$

$= \frac{١ + ٠}{٢ + ٠} = \frac{١}{٢}$

٤ (ب)

الحل :

∵ ٤ جا أ = ٣ جا ب = ٦ جا حـ بالقسمة على ١٢

∴ $\frac{جا أ}{٣} = \frac{جا ب}{٤} = \frac{جا حـ}{٢}$

∴ أ : ب : حـ = ٣ : ٤ : ٢

∴ أ = ٣ ك ، ب = ٤ ك ، حـ = ٢ ك

∴ $جتا حـ = \frac{أ^٢ + ب^٢ - حـ^٢}{٢ أ ب}$

$= \frac{٩ ك^٢ + ١٦ ك^٢ - ٤ ك^٢}{٢ (٣ ك)(٤ ك)} = \frac{٧}{٨}$

∴ ق (∠ حـ) = ٢٩°

٥ (جـ)

الحل :

$لو_ب أ^٢ \times لو_حـ ب^٣ \times لو_أ حـ = \frac{٢ لو أ}{لو ب} \times \frac{٣ لو ب}{لو حـ} \times \frac{لو حـ}{لو أ} = ٦$

٦ (د)

الحل :

∵ د متصلة عند س = ١

∴ $د (١) = نهــا_{س \to ١} د (س)$

∴ $٢ أ = نهــا_{س \to ١} \frac{س^٢ - ١}{س - ١}$

$= نهــا_{س \to ١} \frac{(س - ١)(س + ١)}{(س - ١)} = ٢$

∴ أ = ١

٧ (ب)

الحل :

∵ أ ب حـ مثلث ∴ أ + ب + حـ = ١٨٠°

∴ أ + ب = ١٨٠° − حـ

∴ جتا (أ + ب) = جتا (١٨٠° − حـ) = − جتا حـ

$= - \frac{أ^٢ + ب^٢ - حـ^٢}{٢ أ ب} = \frac{حـ^٢ - أ^٢ - ب^٢}{٢ أ ب}$

٨ (أ)

الحل :

لو$_٤$ س + لو$_٤$ (س − ٣) = ١

∴ لو$_٤$ س (س − ٣) = لو$_٤$ ٤

∴ $س^٢ - ٣ س - ٤ = ٠$

∴ (س − ٤)(س + ١) = ٠

∴ س = ٤ أ، س = −١ (مرفوض)

∴ م.ح = {٤}

٩ (جـ)

١٠ (ب)

الحل :

$نهــا_{س \to ٢} \frac{س^٥ - ٣٢}{(س - ٢)(س + ٥)} = نهــا_{س \to ٢} \frac{س^٥ - ٢^٥}{س - ٢}$

$\times نهــا_{س \to ٢} \frac{١}{س + ٥} = ٥ \times ٢^٤ \times \frac{١}{٢ + ٥} = \frac{٨٠}{٧}$

١١ (أ)

الحل :

$حـ^٢ = أ^٢ + ب^٢ - ٢ أ ب جتا حـ$

$= ٨١ + ٢٢٥ - ٢ \times ٩ \times ١٥ \times$ جتا ١٠٦°

∴ حـ ≈ ٢٠ سم

∴ محيط Δ أ ب حـ = ٩ + ١٥ + ٢٠ = ٤٤ سم

١٢ (جـ)

الحل :

∵ |٢ س − ٢| ≥ ٧ ∴ ٢ س − ٢ ≥ ٧

∴ ٢ س ≥ ٩ ∴ س ≥ ٢

، ٢ س − ٢ ≤ −٧ ∴ ٢ س ≤ −٥

∴ س ≤ $\frac{٩}{٢}$ ∴ م.ح = ح −]$\frac{٩}{٢}$ ، ٣[

١٣ (د)

الحل :

∵ د دالة فردية ∴ د (−س) = − د (س)

∴ د (−س) + د (س) = − د (س) + د (س) = صفر

١٤ (حـ)

الحل :

$نهــا_{س \to ٠} \frac{جا ٢ س + ٥ جا ٣ س}{س}$

$= نهــا_{س \to ٠} \frac{جا ٢ س}{س} + ٥ نهــا_{س \to ٠} \frac{جا ٣ س}{س}$

$= ٢ + ٥ \times ٣ = ١٧$

١٥ (ب)

الحل :

$|س| + س = \begin{cases} س + س & ، س \geq ٠ \\ -س + س & ، س < ٠ \end{cases}$

$= \begin{cases} ٢ س & ، س \geq ٠ \\ ٠ & ، س < ٠ \end{cases}$

∴ |س| + س = ٠ لكل س < ٠

أى لكل س ∈]−∞ ، ٠[

، عندما ٢ س = ٠ ∴ س = ٠

∴ مجموعة الحل =]−∞ ، ٠[∪ {٠} =]−∞ ، ٠]

١٦ (جـ)

١٧ (جـ)

الحل :

$نهــا_{س \to ١} \frac{٤ - \sqrt{س + ١٥}}{١ - س} \times \frac{٤ + \sqrt{س + ١٥}}{٤ + \sqrt{س + ١٥}}$

$= نهــا_{س \to ١} \frac{١٦ - (س + ١٥)}{(١ - س)(١ + س)(٤ + \sqrt{س + ١٥})}$

$= نهــا_{س \to ١} \frac{(١ - س)}{(١ - س)(١ + س)(٤ + \sqrt{س + ١٥})}$

$= \frac{١}{٨ \times ٢} = \frac{١}{١٦}$

١٨ (جـ)

الحل :

$٢٥^{س} - ١٢ \times ٥^{س} + ٢٧ = ٠$

∴ $(٥^{س} - ٣)(٥^{س} - ٩) = ٠$

∴ $٥^{س} = ٣$ ∴ س = لو$_٥$ ٣

، $٥^{س} = ٩$ ∴ س = لو$_٥$ ٩

∴ مجموع الجذرين = لو$_٥$ ٣ + لو$_٥$ ٩ = لو$_٥$ ٢٧

١٩ (جـ)

الحل :

$\frac{٥ \sqrt{٣}}{جا ٦٠°} = ٢$ نق ∴ ٢ نق = ١٠ سم

∴ طول قطر الدائرة المارة برؤوسه = ١٠ سم

٢٠ (ب)

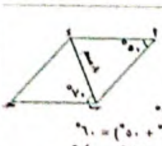
الحل :

بوضع س + ٣ ≥ ٠ ∴ س ≥ −٣

∴ مجال د = [−٣ ، ∞[

٢١ (أ)

الحل :



ق (∠ حـ) = ق (∠ أ)

= ٥٠°

، ق (∠ د ب حـ) = ١٨٠°

− (٧٠° + ٥٠°) = ٦٠°

Δ د ب حـ فيه : $\frac{٨}{جا ٥٠°} = \frac{ب حـ}{جا ٦٠°} = \frac{د حـ}{جا ٧٠°}$

∴ $ب حـ = \frac{٨ \times جا ٦٠°}{جا ٥٠°} ≈ ٩$ سم

، $د حـ = \frac{٨ \times جا ٧٠°}{جا ٥٠°} ≈ ١٠$ سم

∴ محيط ▱ أ ب حـ د = ٢ × (٩ + ١٠) = ٣٨ سم

٢٢ (د)

الحل :

(د ∘ ر) (٢) = د (ر (٢)) = د (٣^٢) = د (٩)

= ٤ (٩) − ٥ = ٣١

٢٣ (أ)

الحل :

$نهــا_{س \to ٢} \frac{س^٣ - ٧ س + ٦}{٢ س^٢ - ٨ س + ٤}$

$= نهــا_{س \to ٢} \frac{(س - ٢)(س^٢ + ٢ س - ٣)}{(س - ٢)(٢ س - ٢)}$

$= \frac{٤ + ٤ - ٣}{٦ - ٢} = \frac{٥}{٤}$

٢٤ (ب)

٢٥ (ب)

الحل :

∵ $س^{\frac{٣}{٢}} = ٨$ ∴ $س = ٨^{\frac{٢}{٣}} = ٤$

٢٦ (ب)

الحل :

∵ $\sqrt{٤ س^٢ - ١٢ س + ٩} \leq ٩$

∴ $\sqrt{(٢ س - ٣)^٢} \leq ٩$ ∴ |٢ س − ٣| ≤ ٩

∴ −٩ ≤ ٢ س − ٣ ≤ ٩ ∴ −٦ ≤ ٢ س ≤ ١٢

∴ −٣ ≤ س ≤ ٦ ∴ م.ح = [−٣ ، ٦]

٢٧ (أ)

الحل :

$نهــا_{س \to \infty} \frac{١}{س} \sqrt{٢ + ٤ س^٢} = نهــا_{س \to \infty} \sqrt{\frac{٢}{س^٢} + ٤}$

$= \sqrt{٤} = ٢$

٢٨ (ب)

الحل :

$نهــا_{س \to -١} \frac{(س + ٢)^٥ - ١}{س^٢ - ١} = نهــا_{س \to -١} \frac{(س + ٢)^٥ - ١^٥}{س + ١}$

$\times نهــا_{س \to -١} \frac{١}{س - ١} = نهــا_{(س + ٢) \to ١} \frac{(س + ٢)^٥ - ١^٥}{(س + ٢) - ١}$

$\times نهــا_{س \to -١} \frac{١}{س - ١} = ٥ \times ١^٤ \times \frac{١}{-١ - ١} = -\frac{٥}{٢}$

النموذج الثالث

١ (د)

الحل :

$نهــا_{س \to ٢} \frac{س^٥ - ٢^٥}{س - ٢} = ٥ \times ٢^٤$

٢ (جـ)

الحل :

$\frac{أ + ب + حـ}{جا أ + جا ب + جا حـ} = ٢$ نق $= ٢ \times ٤ = ٨$ سم

٣ (ب)

الحل :

لو$_٢$ د (س) = لو$_٢$ ٢^{س} = س لو$_٢$ ٢ = س

٤ (جـ)

الحل :

لو$_ب$ س = لو$_ب$ ٢٧ − لو$_ب$ ب − لو$_ب$ ٢

∴ لو$_ب$ س = لو$_ب$ $\frac{٢٧}{٢ ب}$ ∴ س = $\frac{٢٧}{٢ ب}$

٥ (جـ)

الحل :

$نهــا_{س \to \infty} \frac{٢ س^٢ + ٢ س}{س^٢ + ٤ س} \times \frac{...}{...}$

$= نهــا_{س \to \infty} \frac{٢ + ...}{١ + ...} = \frac{٢}{١} = ...$

٦ (جـ)

الحل :

ص = س^٣ + ٧ بتبديل المتغيرات

∴ س = ص^٣ + ٧

∴ ص = $\sqrt[٣]{س - ٧}$ ∴ د$^{-١}$ (س) = $\sqrt[٣]{س - ٧}$

∴ د$^{-١}$ (−١) = $\sqrt[٣]{-١ - ٧}$ = −٢

٧ (جـ)

٨ (ب)

الحل :

$نهــا_{س \to \infty} (١ + ٢ س^٢ - س^٣)$

$= نهــا_{س \to \infty} س^٣ (\frac{١}{س^٣} + \frac{٢}{س} - ١)$

$= \infty (٠ + ٠ - ١) = -\infty$

٩ (أ)

الحل :

ع = $\sqrt{٢٥ + ٩ - ٢ (٥)(٣) جتا ١٢٠°}$ = ٧ سم

١٠ (أ)

١١ (د)

١٢ (ب)

الحل :

لو (جا ...) + لو (قا ...) = لو (جا ... × قا ...) = لو ١

= صفر

١٣ (جـ)

الحل :

|٢ س − ٢| ≥ ٧ ∴ ٢ س − ٢ ≥ ٧

∴ ٢ س ≥ ٩ ∴ س ≥ ...

، ٢ س − ٢ ≤ −٧ ∴ ٢ س ≤ −٥

∴ س ≤ ... ∴ م.ح = ح −]... ، ...[

١٤ (جـ)

الحل :

$\frac{١}{٢}$ = لو$_٤$ (١ − $\frac{١}{٤}$ أ) ∴ ... $\frac{١}{٤}$ أ = ...

∴ ١ − $\frac{١}{٤}$ أ = ... ∴ $\frac{١}{٤}$ أ = ...

∴ أ = ...

١٥ (أ)

الحل :

$٢^{س+١} - ٢^{س-١} = ٢٤$

∴ $٢^{س}(٢ - \frac{١}{٢}) = ٢٤$ ∴ $٢^{س} × \frac{٣}{٢} = ٢٤$

∴ $٢^{س} = ٢٤ × \frac{٣}{٨} = ٩$ ∴ س = ٢

١٦ (د)

١٧ (د)

١٨ (ج)

١٩ (ب)

الحل :

= نهـــا (٥ + $\frac{١}{س}$ - $\frac{٢}{س^٢}$) = ٥

٢٠ (أ)

٢١ (د)

الحل :

∵ $حـ^٢ = أ^٢ + ب^٢ - ٢ أ ب$ جتا حـ

∴ $أ^٢ + ب^٢ - ٢ أ ب$ جتا حـ $= أ^٢ + ب^٢ + أ ب$

∴ - ٢ أ ب جتا حـ = أ ب

∴ جتا حـ = $-\frac{١}{٢}$ ∴ ق(∠حـ) = ١٢٠°

٢٢ (ج)

الحل :

∵ د (س - ١) = $٢^{(س-١)+٢}$

∴ د (س) = $٢^{س+٢}$

٢٣ (ب)

الحل :

نهـــا $\left(\frac{٣ + \frac{٢}{س} + \frac{١}{س^٢}}{١ - \frac{٣}{س} + \frac{٢}{س^٢}}\right)^٤ = (\frac{٣}{١})^٤ = ٨١$

٢٤ (ب)

الحل :

نهـــا $\frac{جا(س - ٢)}{(س - ٢)}$ × نهـــا $\frac{١}{س + ٢}$

= ١ × $\frac{١}{٢ + ٢}$ = $\frac{١}{٤}$

٢٥ (ج)

٢٦ (د)

الحل :

∵ جتا ب = $\frac{حـ}{٢أ}$ ∴ $\frac{أ^٢ + حـ^٢ - ب^٢}{٢ أ حـ} = \frac{حـ}{٢أ}$

∴ $أ^٢ + حـ^٢ - ب^٢ = حـ^٢$

∴ $أ^٢ = ب^٢$ ∴ أ = ب

٢٧ (د)

الحل :

د (٢⁺) = نهـــا (٣ س² + أ س - ٢) = ١٦

∴ ٣ (٢²) + أ (٢) - ٢ = ١٦

∴ أ = ٣

، د (٢⁻) = نهـــا (٢ س + ب) = ١٦

∴ ٢ (٢) + ب = ١٦ ∴ ب = ١٠

∴ أ + ب = -٣ + ١٠ = ٧

٢٨ (ب)

الحل :

ب حـ أ جتا ب + حـ ب جتا أ

= حـ أ × $\frac{أ^٢ + حـ^٢ - ب^٢}{٢ أ حـ}$ + حـ ب × $\frac{ب^٢ + حـ^٢ - أ^٢}{٢ ب حـ}$

= $\frac{١}{٢}$ (أ² + حـ² - ب² + ب² + حـ² - أ²)

= $\frac{١}{٢}$ × ٢ حـ² = حـ²

النموذج الرابع

١ (أ)

٢ (د)

الحل :

بوضع س - ٢ ≥ ٠ ∴ س ≥ ٢

، س - ٣ ≠ ٠ ∴ س ≠ ٣

∴ مجال د = [٢ ، ∞[- {٣}

٣ (د)

الحل :

بقسمة البسط والمقام على س

∴ نهـــا $\frac{أ + \frac{٦}{س}}{٢ + \frac{٧}{س}} = ٤$

∴ $\frac{أ}{٢} = ٤$ ∴ أ = ٨

٤ (ب)

٥ (ب)

الحل :

جتا θ = $\frac{٣^٢ + ٥^٢ - ٧^٢}{٢ (٣) (٥)} = -\frac{١}{٢}$

∴ θ = ١٢٠° ∴ قياس أكبر زاوية = ١٢٠°

٦ (د)

الحل :

نهـــا $\frac{س^٥ - ٢^٥}{س^٣ - ٢^٣} = \frac{٥}{٣} × ٢^٢ = \frac{٢٠}{٣} = ٦\frac{٢}{٣}$

٧ (ب)

الحل :

ص = ٧ س بتبديل المتغيرات

∴ س = ٧ ص ∴ ص = $\frac{١}{٧}$ س

∴ $د^{-١}$(س) = $\frac{١}{٧}$ س

٨ (أ)

٩ (جـ)

الحل :

د (١) + د (-١) = د (١) - د (١) = صفر

١٠ (ب)

الحل :

نهـــا $\frac{(\sqrt{س} - ٢)(س - ١)}{(\sqrt{س} - ٢)}$ = ٢ - ٤ = -١

١١ (أ)

الحل :

∵ ∠ أ حادة ، أ > ب

∴ عدد الحلول = ١

١٢ (جـ)

الحل :

نهـــا $\frac{\sqrt{س + ١} - ١}{س} × \frac{\sqrt{س + ١} + ١}{\sqrt{س + ١} + ١}$

= نهـــا $\frac{س + ١ - ١}{س (\sqrt{س + ١} + ١)}$

= نهـــا $\frac{١}{\sqrt{س + ١} + ١} = \frac{١}{٢}$

١٣ (ب)

١٤ (جـ)

الحل :

$\frac{ع}{جا ٣٠°} = \frac{١٥\sqrt{٣}}{جا ٦٠°}$

∴ ع = $\frac{١٥\sqrt{٣} × جا ٣٠°}{جا ٦٠°}$ = ١٥ سم

١٥ (جـ)

الحل

نهـــا $\frac{(س + ٢)^٥ - ٢^٥}{س}$ = ٥ × ٢⁴ = ٨٠

١٦ (أ)

الحل :

د (س + ١) = $٤^{س+١-١} = ٤^{س}$

١٧ (ب)

الحل :

أ = $\sqrt{(٢)^٢ + (٢,٥)^٢ - ٢ (٢) (٢,٥) × \frac{٣}{٥}}$ = ٢,٥ سم

∴ أ = حـ

∴ Δ أ ب حـ متساوي الساقين.

١٨ (جـ)

الحل :

نهـــا (٢ س - جتا س) = ٢ ($\frac{π}{٢}$) - جتا ٩٠° = π

١٩ (ب)

الحل :

(س + ٦) = س² ∴ س² - س - ٦ = ٠

∴ (س - ٣) (س + ٢) = ٠

∴ س = ٣ ، س = -٢ (مرفوضة)

∴ م.ح = {٣}

٢٠ (جـ)

الحل :

$\frac{جـ}{جا س}$ = ٢ نق (بضرب الطرفين × ٢)

∴ $\frac{٢ جـ}{جا س}$ = ٤ نق

٢١ (أ)

الحل :

نهـــا $\frac{جا ٢ أ س}{س}$ = نهـــا (٢ أ + ٢ جا س)

∴ ٤ = ٢ أ + ٢ ∴ ٢ أ = ١ ∴ أ = $\frac{١}{٢}$

٢٢ (أ)

الحل :

$\frac{لو ٦٤}{لو ٨} = \frac{لو ٨^٢}{لو ٨} = \frac{٢ لو ٨}{لو ٨} = ٢$

٢٣ (ب)

٢٤ (أ)

الحل :

٢ نق = $\frac{٧}{جا ٣٠°}$ = ١٤ سم

٢٥ (د)

الحل :

لو ٥ س = ٢ ∴ ٥ س = ١٠² = ١٠٠

∴ س = ٢٠

٢٦ (جـ)

٢٧ (جـ)

الحل :

جـ = ٥٠٠٠ (١ + ٠,٠٥)² = ٥٥١٢,٥ جنيه

٢٨ (أ)

الحل :

∵ د متصلة عند س = ١

∴ نهـــا د (س) = نهـــا د (س) ∴ ل = م

∴ ل² + م² - ٢ ل م = ل² + ل² - ٢ ل² = صفر

النموذج الخامس

١ (جـ)

٢ (جـ)

٣ (ب)

٤ (ب)

الحل :

∵ نقطة تقاطع منحنى الدالة د مع منحنى الدالة $د^{-١}$ تقع على المستقيم ص = س

∴ ٢ ك - ٣ = ك ∴ ك = ٣

٥ (د)

الحل :

نهـــا $\frac{س^٢ + ٥}{٦} = \frac{∞ + ٥}{٦} = ∞$

٦ (أ)

الحل :

نهـــا $\frac{(س - ٢)(س + ٢)}{(س + ١)(س - ٢)} = \frac{٢ + ٢}{٢ + ١} = \frac{٤}{٣}$

٧ (أ)

الحل :

∵ د متصلة عند س = ١

∴ د (١) = نهـــا د (س)

∴ ٢٠٠ = نهـــا $\frac{س^٥ - أ^٥}{س - أ}$

∴ ٢٠٠ = $\frac{٥}{٤}$ × أ⁴ ∴ أ⁴ = ١٦٠ ∴ أ = [illegible]

٨ (أ)

الحل :

∵ $\frac{جـ}{جا س}$ = ٢ نق ∴ $\frac{جـ}{٢ جا س}$ = نق

٩ (جـ)

الحل :

بالقسمة على ١٢

∴ $\frac{١٦}{١٢} = \frac{أ + ب}{١٢} = \frac{٢ حـ}{١٢}$ ∴ $\frac{أ}{٢} = \frac{ب}{٣} = \frac{حـ}{٤}$

وبفرض أن أ = ٢ ك ، ب = ٣ ك ، حـ = ٤ ك

∵ أ طول أصغر الأضلاع

∴ ق (∠ أ) هي قياس أصغر الزوايا

∴ جتا أ = $\frac{ب^٢ + حـ^٢ - أ^٢}{٢ ب حـ}$

= $\frac{٩ ك^٢ + ١٦ ك^٢ - ٤ ك^٢}{٢ (٣ ك) (٤ ك)} = \frac{٧}{٨}$

∴ ق (∠ أ) = ٢٨° ٥٧َ

١٠ (أ)

الحل

(د ∘ ر) (س) = د (ر (س)) = د ($\sqrt[٣]{س}$)

= $(\sqrt[٣]{س})^٣$ = س

١١ (د)

١٢ (ب)

الحل

بوضع س - ٣ = ٠ ∴ س = ٣

∴ مجموعة أصفار الدالة ر = {٣}

مجال ر = (ح ∩ [١ ، ٥]) - {٣}

= [١ ، ٥] - {٣}

١٣ (ب)

١٤ (د)

الحل

د ($\frac{π}{٢}$⁺) = نهـــا جا (π - س) = جا ($\frac{π}{٢}$) = ١

، د ($\frac{π}{٢}$⁻) = نهـــا $\frac{جتا س}{π - ٢ س}$

= نهـــا $\frac{جا (\frac{π}{٢} - س)}{٢ (\frac{π}{٢} - س)} = \frac{١}{٢}$

∴ د ($\frac{π}{٢}$⁺) ≠ د ($\frac{π}{٢}$⁻)

∴ نهـــا د (س) غير موجودة

١٥ (جـ)

الحل

نهـــا $\frac{٥ + \frac{٤}{س}}{١ + \frac{٢}{س}}$ = ٥

١٦ (د)

الحل :

$$٢\,نق = \frac{١٠\sqrt{٣}}{جا\,٦٠^\circ} = ٢٠ \text{ سم}$$

---

١٧ (أ)

الحل :

$$\frac{جا\,أ}{٣} = \frac{جا\,ب}{\frac{٥}{٢}} = \frac{جا\,ح}{٤}$$

$$\therefore أ : ب : ح = ٣ : \frac{٥}{٢} : ٤ = ٦ : ٥ : ٨$$

---

١٨ (جـ)

الحل :

$$\lim_{س \to ٠} \frac{جا\,٢س}{٤س} \times \lim_{س \to ٠} \frac{ظا\,٣س}{س} = \frac{٢}{٤} \times ٣ = \frac{٣}{٢}$$

---

١٩ (جـ)

الحل :

$$س^{\frac{١}{٦}} = ٢^{\frac{١}{٢}} \times ٣^{\frac{١}{٣}} \qquad \therefore س = \left(٢^{\frac{١}{٢}} \times ٣^{\frac{١}{٣}}\right)^{٦}$$

$$\therefore س = ٢^{٣} \times ٣^{٢} = ٨ \times ٩ = ٧٢$$

---

٢٠ (جـ)

الحل :

$\because$ لو (س + ١١) = ٢

$\therefore$ س + ١١ = $١٠^{٢}$ = ١٠٠

$\therefore$ س = ١٠٠ − ١١ = ٨٩

---

٢١ (د)

الحل :

$$\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt[ن]{س} - ١}{\sqrt[م]{س} - ١} = \lim_{س \to ١} \frac{س^{\frac{١}{ن}} - ١^{\frac{١}{ن}}}{س^{\frac{١}{م}} - ١^{\frac{١}{م}}}$$

$$= \left(\frac{١}{ن} \div \frac{١}{م}\right) \times ١^{\left(\frac{١}{ن} - \frac{١}{م}\right)} = \frac{م}{ن}$$

---

٢٢ (ب)

الحل :

$$\lim_{س \to ٢} د(س) = \lim_{س \to ٢} (٣س - ١) = ٣(٢) - ١ = ٥$$

---

٢٣ (ب)

---

٢٤ (جـ)

الحل :

$\because$ س $\in$ [−١ ، ٤] $\qquad \therefore$ −١ ≤ س ≤ ٤

$\therefore$ −٢ ≤ ٢س ≤ ٨ $\qquad \therefore$ −٥ ≤ ٢س − ٣ ≤ ٥

$\therefore$ |٢س − ٣| ≤ ٥

---

٢٥ (ب)

الحل :

$٤ + لو_{٢}\,س = ٣^{٢} = ٩$

$\therefore لو_{٢}\,س = ٥ \qquad \therefore س = ٢^{٥} = ٣٢$

---

٢٦ (جـ)

الحل :

$$\lim_{س \to ١} \frac{س^{ح}\left(س^{أ-ح} - ١\right)}{س^{ء}\left(س^{أ-ء} - ١\right)}$$

$$= \lim_{س \to ١} س^{(ح-ء)} \times \lim_{س \to ١} \frac{س^{أ-ح} - ١^{أ-ح}}{س^{أ-ء} - ١^{أ-ء}}$$

$$= ١ \times \frac{أ-ح}{أ-ء} = ١ \times \frac{أ-ح}{أ-ء} = \frac{أ-ح}{أ-ء}$$

---

٢٧ (أ)

الحل :

$$\lim_{س \to ٥} د(س) = \lim_{س \to ٥} \frac{(س-٥)(س+٥)}{(س-٥)}$$

$$= ٥ + ٥ = ١٠$$

$\therefore$ د متصلة عند س = ٥ إذا كان د (٥) = ١٠

---

٢٨ (أ)

الحل :

$$ح = \sqrt{٥^{٢} + ٧^{٢} - ٢\,(٥)\,(٧)\,جتا\,٦٥^\circ} \approx ٦,٧ \text{ سم}$$

الجزء الخاص

بالإجابات

الرياضيات

البحتة

2022

المعاصر

إعداد نخبة من خبراء التعليم

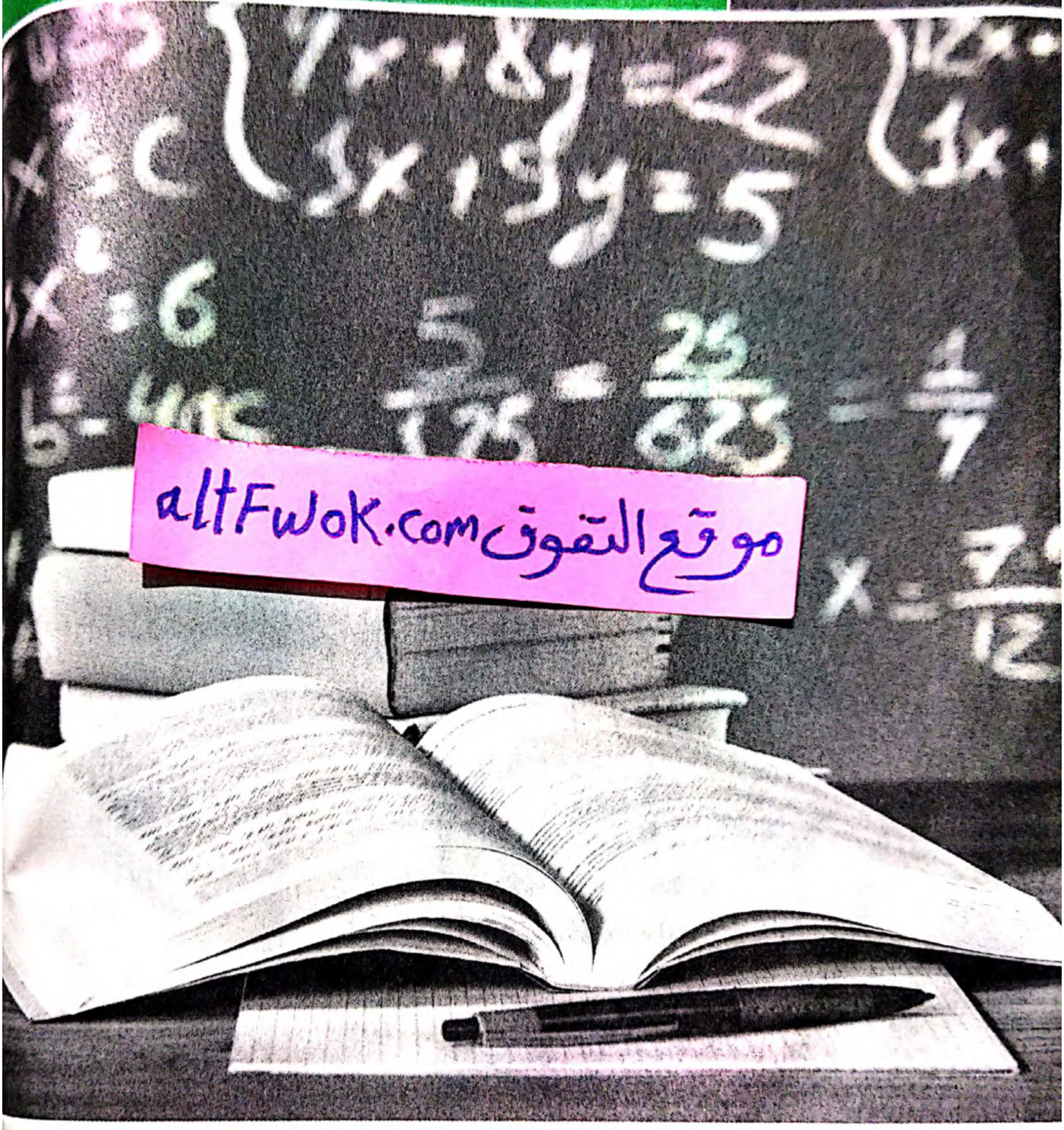
الصف الثانى الثانوى

القسم العلمى

الفصل الدراسى الأول

إجابات تمارين

الجبر



إجابات الوحدة الأولى

إجابات تمارين المتطلبات القبلية

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

① (د) ② (ب) ③ (د) ④ (جـ)
⑤ (جـ) ⑥ (أ) ⑦ (جـ)

ثانيا الأسئلة المقالية

1

∵ د (س) = أ² س² + ١٠ أ س + ٢٥
، ر (س) = ٩ س² + ٣٠ س + حـ − ٤
، د (س) = ر (س)
∴ ١٠ أ = ٣٠   ∴ أ = ٣
، حـ − ٤ = ٢٥   ∴ حـ = ٢٩

2

① ∵ أ + ب = ٥   (١) ،   أ + حـ = ٣   (٢)
، ب = −٢ وبالتعويض عن قيمة ب فى (١)
∴ أ − ٢ = ٥
∴ أ = ٧ وبالتعويض عن قيمة أ فى (٢)
∴ ٧ + حـ = ٣   ∴ حـ = −٤

② ∵ أ + ب = ١   (١) ،   أ + حـ = ٠   (٢)
، ب = −٢   ∴ أ − ٢ = ١   ∴ أ = ٣
، ٣ + حـ = ٠   ∴ حـ = −٣

③ ∵ أ + ٢ ب = ٧   (١)
، − حـ = ٥   ∴ حـ = −٥ ،   أ − ب = ٤   (٢)
من (١) ، (٢) :
∴ ب = ١ ، أ = ٥

إجابات تمارين 1

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

① (جـ) ② (د) ③ (د) ④ (جـ)
⑤ (أ) ⑥ (د) ⑦ (د) ⑧ (ب)
⑨ (أ) ⑩ (د) ⑪ (جـ) ⑫ (ب)
⑬ (جـ) ⑭ (د) ⑮ (جـ) ⑯ (ب)
⑰ (ب) ⑱ (أ) ⑲ (ب) ⑳ (د)
㉑ (أ) ㉒ (د) ㉓ (أ) ㉔ (د)
㉕ (ب) ㉖ (ب) ㉗ (جـ) ㉘ (جـ)
㉙ (د) ㉚ (ب) ㉛ (جـ) ㉜ (د)
㉝ (جـ) ㉞ (د) ㉟ (ب) ㊱ (جـ)
㊲ (د) ㊳ (د) ㊴ (أ) ㊵ (ب)
㊶ (جـ) ㊷ (جـ) ㊸ (جـ)
㊹ أولًا : (ب)   ثانيًا : (جـ)
㊺ (ب) ㊻ (د) ㊼ (د) ㊽ (جـ)

ثانيا الأسئلة المقالية

1

① دالة ② ليست دالة ③ دالة
④ ليست دالة ⑤ دالة ⑥ ليست دالة
⑦ دالة ⑧ ليست دالة ⑨ دالة
⑩ دالة

2

① دالة ② ليست دالة ③ ليست دالة
④ دالة ⑤ ليست دالة ⑥ دالة

3

① ح − {−٣ ، ٣}   ② ح − {١ ، ٢}
③ ح − {٠}   ④ ح − {٣}
⑤ ح − {١ ، $\frac{-٢}{٣}$}   ⑥ ح − {−١}

4

① ح − {$\frac{٥}{٢}$}   ②]٣ ، ∞[
③]−∞ ، ١]   ④ ح −]−٤ ، ٤[
⑤ [−٢ ، ٢]   ⑥]−٣ ، ٣[
⑦ ح   ⑧ ح − {٢}
⑨ [٠ ، ∞[− {١}

5

① ح   ②]−∞ ، ٤]
③ [٠ ، ٦]

6

① المجال = ح ، المدى = {٢}
، الدالة ثابتة على مجالها ح
② المجال = ح ، المدى = {−٢ ، ٢}
، الدالة ثابتة فى]− ∞ ، ٠[،]٠ ، ∞[
③ المجال = ح − {٠} ، المدى = ح − [−٢ ، ٢]
، الدالة تناقصية فى]− ∞ ، ٠[،]٠ ، ∞[
④ المجال = ح − {١} ، المدى =]−٢ ، ∞[
، الدالة تناقصية فى]− ∞ ، ١[
، تزايدية فى]١ ، ∞[
⑤ المجال = ح − {٢} ، والمدى = ح − {٢}
، الدالة تزايدية فى]− ∞ ، ٢[،]٢ ، ∞[
⑥ المجال = [٠ ، ∞[، المدى = [٠ ، ٤]
، الدالة تزايدية فى]٠ ، ٢[، ثابتة فى]٢ ، ∞[
⑦ المجال = ح − {−١ ، ٢} ، المدى = {٣}
، الدالة ثابتة على مجالها.
⑧ المجال = ح −]٠ ، ١]
، المدى =]٢ ، ∞[∪ {٢} ، الدالة ثابتة فى]− ∞ ، ٠] وتزايدية فى]١ ، ∞[
⑨ المجال = ح ، المدى =]− ∞ ، ٤]
، الدالة تزايدية فى]− ∞ ، −٢[،]٠ ، ٢[
وتناقصية فى]−٢ ، ٠[،]٢ ، ∞[
⑩ المجال = ح ، المدى = ح −]١ ، ٢]
، الدالة تناقصية فى]− ∞ ، ٠[،]١ ، ∞[
وتزايدية فى]٠ ، ١[
⑪ المجال = ح − {٠} ، المدى = ح − [−٢ ، ٢]
، الدالة تزايدية فى]− ∞ ، ٠[،]٠ ، ∞[
⑫ المجال = [−٢ ، ∞[، المدى = [٠ ، ∞[
، الدالة تزايدية فى]−٢ ، ٠[
وتناقصية فى]٠ ، ٢[،]٢ ، ∞[

ثالثا مسائل تقيس مهارات التفكير

① (د) ② (د) ③ (د)
④ (جـ) ⑤ (أ) ⑥ (د)

إرشادات الحل :

① ∵ س تدل على عدد أضلاع مضلع
∴ س عدد صحيح أكبر من ٢
∴ المجال = ص⁺ − {١ ، ٢}

② بوضع ∛س − ٢ = ٠
∴ ∛س = ٢   ∴ س = ٨
∴ المجال = ح − {٨}

③ ∵ ٢ س ≥ ٠   ∴ س ≥ ٠
∴ س ∈ [٠ ، ∞[
بوضع √٢س − س = ٠   ∴ √٢س = س
∴ ٢ س = س²   ∴ س² − ٢ س = ٠
∴ س (س − ٢) = ٠
∴ س = ٠   أو   س = ٢
∴ المجال =]٠ ، ∞[− {٢}

④ ∵ س − ١ ≥ ٠ ∴ س ≥ ١

∴ س ∈ [١ ، ∞[

وبوضع √(س − ١) = ٣ ∴ س − ١ = ٩

∴ س = ١٠

∴ المجال = [١ ، ∞[− {١٠}

⑤ ∵ س − ١ ≥ ٠ ∴ س ≥ ١

∴ س ∈ [١ ، ∞[

وبوضع √(س − ١) + ٣ = ٠ (تعارض)

∴ المجال = [١ ، ∞[

⑥ ∵ د (س) = √(−(س^٢ − ٦ س + ٩))

= √(−(س − ٣)^٢)

∴ −(س − ٣)^٢ ≥ ٠ ∴ (س − ٣)^٢ ≤ ٠

وهذا لا يتحقق إلا فى حالة التساوى فقط

أى عندما س = ٣ ∴ المجال = {٣}

إجابات تمارين 2

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

① (أ)	② (أ)	③ (ب)	④ (ب)
⑤ (جـ)	⑥ (جـ)	⑦ (أ)	⑧ (د)
⑨ (جـ)	⑩ (جـ)	⑪ (د)	⑫ (د)
⑬ (جـ)	⑭ (جـ)	⑮ (د)	⑯ (ب)
⑰ (ب)	⑱ (د)	⑲ (ب)	⑳ (جـ)
㉑ (أ)	㉒ (جـ)	㉓ (د)	㉔ (جـ)
㉕ (ب)	㉖ (ب)	㉗ (جـ)	㉘ (ب)
㉙ (د)	㉚ (د)	㉛ (أ)	㉜ (ب)
㉝ (أ)	㉞ (ب)	㉟ (أ)	㊱ (جـ)
㊲ (أ)	㊳ (جـ)	㊴ (ب)	㊵ (د)
㊶ (جـ)	㊷ (ب)	㊸ (د)	㊹ (ب)
㊺ (ب)			

ثانيا الأسئلة المقالية

١

① (د + ر) (س) = س^٢ − ١٦

، المجال = [−٤ ، ٨] ∩ [−٧ ، ٤] = [−٤ ، ٤]

② (د − ر) (س) = س^٢ − ٢ س − ٨

، المجال = [−٤ ، ٤]

③ (د . ر) (س) = (س − ٤) (س^٢ − س − ١٢)

، المجال = [−٤ ، ٤]

④ (د/ر) (س) = (س^٢ − س − ١٢)/(س − ٤)

= (س − ٤) (س + ٣)/(س − ٤) = س + ٣

، المجال = [−٤ ، ٤[

⑤ (ر/د) (س) = (س − ٤)/((س − ٤) (س + ٣)) = ١/(س + ٣)

، المجال = [−٤ ، ٤[− {−٣}

٢

د (س) = س^٢ − ٤ ومجال د = ح

، ر (س) = √(س − ١) ومجال ر = [١ ، ∞[

∴ المجال المشترك = [١ ، ∞[

① (د + ر) (س) = س^٢ − ٤ + √(س − ١)

، المجال = [١ ، ∞[

، (د.ر) (س) = (س^٢ − ٤) (√(س − ١))

، المجال = [١ ، ∞[

، (د/ر) (س) = (س^٢ − ٤)/√(س − ١) ، المجال =]١ ، ∞[

، (ر/د) (س) = √(س − ١)/(س^٢ − ٤)

، المجال = [١ ، ∞[− {٢}

② (د + ر) (٥) = ٥^٢ − ٤ + √(٥ − ١) = ٢٣

، (د . ر) (٢) = (٢^٢ − ٤) (√(٢ − ١)) = صفر

، (د/ر) (٣) = (٣^٢ − ٤)/√(٣ − ١) = ٥√٢/٢

، (ر/د) (−٢) غير معرفة

لأن −٢ ∉ المجال

٣

أولاً :

① (د + ر) (س) = س^٢ − ٤ س + √(س + ٢)

، المجال = ح ∩ [−٢ ، ∞[= [−٢ ، ∞[

② (ر − ع) (س) = √(س + ٢) − √(٤ − س)

، المجال = [−٢ ، ∞[∩]−∞ ، ٤] = [−٢ ، ٤]

③ (د . ع) (س) = (س^٢ − ٤ س) (√(٤ − س))

، المجال = ح ∩]−∞ ، ٤] =]−∞ ، ٤]

④ (ع/د) (س) = √(٤ − س)/(س^٢ − ٤ س) = √(٤ − س)/(س (س − ٤))

، المجال =]−∞ ، ٤[− {٠}

ثانيًا :

① (ر − ع) (١) = √(١ + ٢) − √(٤ − ١) = صفر

② (د . ع) (٥) غير معرفة لأن ٥ ∉ المجال

③ (ع/د) (٣) = √(٤ − ٣)/(٣^٢ − ٤ × ٣) = −١/٣

٤

① ح − {٠ ، −٢}

② ح − {−١ ، ١}

③]−∞ ، ١]

④]١/٢ ، ∞[

⑤ [٢ ، ∞[

⑥ [٤ ، ∞[− {٦}

⑦ [٣ ، ∞[

⑧]٥ ، ∞[

٥

① (د . ر) (س) = { س^٢ − ٢ س ، س ≥ ٢ ؛ −س^٢ + ٢ س ، س < ٢ }

، والمجال = ح

② (د/ر) (س) = { ١ − ٢/س ، س ≥ ٢ ؛ −١ + ٢/س ، س < ٢ ، س ≠ ٠ }

، والمجال = ح − {٠}

③ (ر/د) (س) = { س/(س − ٢) ، س > ٢ ؛ س/(−س + ٢) ، س < ٢ }

، والمجال = ح − {٢}

٦

① ح −]٣ ، ٥]

② [٢ ، ∞[− {٣}

③ [−٢ ، ∞[− {٧ ، −١}

④ ح − {١ ، ٢ ، ٧/٤}

٧

① (د ∘ ر) (٢) = د (ر (٢)) = د (٢^٢ − ٥)

= د (−١) = ٣ × (−١) + ١ = −٢

② (ر ∘ د) (−٣) = ر (د (−٣)) = ر (٣ (−٣) + ١)

= ر (−٨) = (−٨)^٢ − ٥ = ٥٩

③ (ر ∘ ع) (١) = ر (ع (١)) = ر (١^٣)

= ر (١) = ١^٢ − ٥ = −٤

④ (ع ∘ د) (−٢) = ع (د (−٢)) = ع (٣ (−٢) + ١)

= ع (−٥) = (−٥)^٣ = −١٢٥

٨

① (د ∘ ر) (س) = د (ر (س))

= د (س + ٣) = ١/(س + ٣)

∵ م١ = مجال ر = ح

، قيم س التى تجعل ر (س) فى مجال د

هى م٢ = ح − {−٣}

∴ مجال (د ∘ ر) = م١ ∩ م٢ = ح − {−٣}

② (ر ∘ د) (س) = ر (د (س)) = ر $(\frac{1}{س})$

= $\frac{1}{س}$ + ٢

، ∵ م$_{١}$ = مجال د = ح − {٠}

، قيم س التى تجعل د (س) فى مجال ر

هى م$_{٢}$ = ح − {٠}

∴ مجال (ر ∘ د) = م$_{١}$ ∩ م$_{٢}$ = ح − {٠}

٩

① (د ∘ ر) (س) = د (ر (س)) = د (س^{٢}) = $\frac{١}{س^{٢} - ١}$

، ∵ م$_{١}$ = مجال ر = ح

، قيم س التى تجعل ر (س) فى مجال د هى

م$_{٢}$ = ح − {−١ ، ١}

∴ مجال (د ∘ ر) = م$_{١}$ ∩ م$_{٢}$ = ح − {−١ ، ١}

② (ر ∘ د) (س) = ر (د (س))

= ر $(\frac{١}{س - ١})$ = $(\frac{١}{س - ١})^{٢}$

= $\frac{١}{س^{٢} - ٢س + ١}$

، ∵ م$_{١}$ = مجال د = ح − {١}

، قيم س التى تجعل د (س) فى مجال ر هى

م$_{٢}$ = ح − {١}

∴ مجال (ر ∘ د) = م$_{١}$ ∩ م$_{٢}$ = ح − {١}

١٠

① ∵ (د ∘ ر) (س) = د (ر (س))

= د (٣ س) = (٣ س)^{٢} + ٦

= ٩ س^{٢} + ٦

∴ (د ∘ ر) (٣) = ٩ × ٣^{٢} + ٦ = ٨٧

② ∵ ٩ س^{٢} + ٦ = ٤٢ ∴ ٩ س^{٢} = ٣٦

∴ س^{٢} = ٤ ∴ س = ± ٢

١١

∵ (د ∘ ر) (س)

= د (ر (س)) = د ($\sqrt{س - ٢}$)

= $(\sqrt{س - ٢})^{٢}$ − ٣ = س − ٢ − ٣ = س − ٥

، ∵ م$_{١}$ = مجال ر = [٢ ، ∞[

، قيم س التى تجعل ر (س) فى مجال د هى م$_{٢}$ = ح

∴ مجال (د ∘ ر) = م$_{١}$ ∩ م$_{٢}$ = [٢ ، ∞[

، (د ∘ ر) (٣) = ٣ − ٥ = −٢

١٢

∵ (د ∘ ر) (س) = د (ر (س))

= د $(\frac{٢}{س - ٣})$ = $\sqrt{\frac{٢}{س - ٣} + ١}$

= $\sqrt{\frac{س - ١}{س - ٣}}$

، ∵ م$_{١}$ = مجال ر = ح − {٣}

، بوضع $\frac{س - ١}{س - ٣}$ ≥ ٠

∴ قيم س التى تجعل ر (س) فى مجال د هى م$_{٢}$

= ح −]١ ، ٣]

∴ مجال (د ∘ ر) = م$_{١}$ ∩ م$_{٢}$ = ح −]١ ، ٣]

١٣

① ∵ (د ∘ ر) (س) = د (ر (س))

= د ($\sqrt{٤ - س}$)

= $\sqrt{\sqrt{٤ - س} - ٢}$

، ∵ م$_{١}$ = مجال ر =]−∞ ، ٤]

، بوضع $\sqrt{٤ - س}$ − ٢ ≥ ٠

أى $\sqrt{٤ - س}$ ≥ ٢

أى ٤ − س ≥ ٤ أى س ≤ ٠

∴ قيم س التى تجعل ر (س) فى مجال د هى

م$_{٢}$ =]−∞ ، ٠]

∴ مجال (د ∘ ر) = م$_{١}$ ∩ م$_{٢}$ =]−∞ ، ٠]

② ∵ (ر ∘ د) (س) = ر (د (س))

= ر ($\sqrt{س - ٢}$)

= $\sqrt{٤ - \sqrt{س - ٢}}$

، ∵ م$_{١}$ = مجال د = [٢ ، ∞[

، بوضع ٤ − $\sqrt{س - ٢}$ ≥ ٠

∴ $\sqrt{س - ٢}$ ≤ ٤

∴ س − ٢ ≤ ١٦ ∴ س ≤ ١٨

∴ قيم س التى تجعل د (س) فى مجال ر هى م$_{٢}$

=]−∞ ، ١٨]

∴ مجال (ر ∘ د) = م$_{١}$ ∩ م$_{٢}$ = [٢ ، ١٨]

١٤

① ∵ (د ∘ ر) (س) = د (ر (س))

= د ($\sqrt{س^{٢} - ٤}$)

= $\sqrt{\sqrt{س^{٢} - ٤} - ١}$

، بوضع س^{٢} − ٤ ≥ ٠

∴ م$_{١}$ = مجال ر = ح −]−٢ ، ٢[

وبوضع $\sqrt{س^{٢} - ٤}$ − ١ ≥ ٠

أى $\sqrt{س^{٢} - ٤}$ ≥ ١ أى س^{٢} − ٤ ≥ ١

أى س^{٢} − ٥ ≥ ٠

، قيم س التى تجعل ر (س) فى مجال د هى

م$_{٢}$ = ح −]−$\sqrt{٥}$ ، $\sqrt{٥}$[

∴ مجال (د ∘ ر) = م$_{١}$ ∩ م$_{٢}$

= ح −]−$\sqrt{٥}$ ، $\sqrt{٥}$[

② ∵ (ر ∘ د) (س) = ر (د (س))

= ر ($\sqrt{س - ١}$)

= $\sqrt{(\sqrt{س - ١})^{٢} - ٤}$

= $\sqrt{س - ١ - ٤}$ = $\sqrt{س - ٥}$

، ∵ م$_{١}$ = مجال د = [١ ، ∞[

، قيم س التى تجعل د (س) فى مجال ر هى

م$_{٢}$ = [٥ ، ∞[

∴ مجال (ر ∘ د) = م$_{١}$ ∩ م$_{٢}$ = [٥ ، ∞[

١٥

د (س) = $\sqrt{س - ٤}$ ، ر (س) = س^{٣}

(توجد حلول أخرى)

١٦

بفرض د (س) = أ س + ب

، ∵ (د ∘ د) (س) = ١٦ س + ١٥

∴ د (د(س)) = ١٦ س + ١٥

∴ د (أ س + ب) = ١٦ س + ١٥

∴ أ (أ س + ب) + ب = ١٦ س + ١٥

∴ أ^{٢} س + أ ب + ب = ١٦ س + ١٥

∴ أ^{٢} = ١٦ ومنها أ = ± ٤

، أ ب + ب = ١٥ ∴ ب = $\frac{١٥}{أ + ١}$

، عند أ = ٤ ∴ ب = ٣

، عند أ = −٤ ∴ ب = −٥

∴ د (س) = ٤ س + ٣

أو د (س) = −٤ س − ٥

ثالثا مسائل تقيس مهارات التفكير

١

① (د) ② (د) ③ (د) ④ (جـ) ⑤ (جـ)
⑥ (د) ⑦ (أ) ⑧ (د) ⑨ (جـ)

إرشادات لحل رقم ١

① ∵ مجال د = [١ ، ∞[، مجال ر =]−∞ ، ١]
∴ مجال (د + ر) = [١ ، ∞[∩]−∞ ، ١]
= {١}

② عندما ٠ < س < ١
(د + ر) (س) = د (س) + ر (س)
= (−س + ٢) + (س + ٢) = ٤

③ (ر o د) (−١) = ر (د (−١))
[لاحظ أن د (−١) = (−١)^{٢} + ١ = ٢]
= ر (٢)
= (٢)^{٢} + ٢ = ٦

④ ∵ د (ر (س)) = د (س)
∴ د (٢ س + ٣) = د (س)
∴ (٢ س + ٣)^{٢} = س^{٢}
∴ ٤ س^{٢} + ١٢ س + ٩ − س^{٢} = ٠
∴ ٣ س^{٢} + ١٢ س + ٩ = ٠
∴ س^{٢} + ٤ س + ٣ = ٠
∴ (س + ١) (س + ٣) = ٠
∴ س = −١ أ، س = −٣
∴ مجموعة الحل = {−١ ، −٣}

⑤ ∵ (د o ر) (س) = ٣ س + ٢
∴ د (ر (س)) = ٣ س + ٢
∴ ٢ ر (س) + ١ = ٣ س + ٢
∴ ٢ ر (س) = ٣ س + ١
∴ ر (س) = ٣/٢ س + ١/٢

⑥ ∵ (ر o د) (س) = س + ٢
∴ ر (د (س)) = س + ٢
∴ ر (٢ س − ٣) = س + ٢
وبوضع ٢ س − ٣ = ص
∴ س = (ص + ٣)/٢
∴ ر (ص) = (ص + ٣)/٢ + ٢ = (ص + ٧)/٢
∴ ر (س) = (س + ٧)/٢

⑦ ∵ (ر o د) (٠) = (د o ر) (١)
∴ ر [د (٠)] = د [ر (١)]
لاحظ أن : د (٠) = ٢ ، ر (١) = (١ − ك)/٢
∴ ر (٢) = د ((١ − ك)/٢)
∴ (٢ − ك)/٥ = (١ − ك)/٢ + ٢
∴ ٤ − ٢ ك = ٥ − ٥ ك + ٢٠
∴ ٣ ك = ٢١ ∴ ك = ٧

⑧ ∵ (د o د o د) (١)
= د (د [د (١)]) [من الرسم د (١) = ٥]
= د (د (٥)) [من الرسم د (٥) = صفر]
= د (صفر) [من الرسم د (٠) = ٢]
= ٢

⑨ (د o ت) (٣) − (د o ت) (٨)
= د (ت (٣)) − د (ت (٨))
= د (٢) − د (٤)
= ٤ − ٨ = −٤

٢

① (د o د) (س) = د (د (س)) = د (١/س)
= ١ ÷ ١/س = س

② (د o د o د) (س) = د (د (د (س)))
= د (د (١/س))
= د (س) = ١/س

③ نلاحظ مما سبق أن التركيب مرتين يعطى س والتركيب ثلاثة مرات يعطى ١/س وهكذا نلاحظ أن فى باقى التركيب يعطى س ثم ١/س
∴ (د o د o د o ..... إلى ن من المرات) (س)
= { س إذا كانت ن زوجية ، ١/س إذا كانت ن فردية

إجابات تمارين 3

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

① (د)	② (أ)	③ (أ)	④ (أ)
⑤ (ب)	⑥ (أ)	⑦ (جـ)	⑧ (ب)
⑨ (ب)	⑩ (أ)	⑪ (جـ)	⑫ (أ)
⑬ (د)	⑭ (أ)	⑮ (د)	⑯ (ب)
⑰ (ب)	⑱ (د)	⑲ (د)	⑳ (ب)
㉑ (جـ)	㉒ (جـ)	㉓ (أ)	㉔ (جـ)
㉕ (ب)	㉖ (جـ)	㉗ (جـ)	㉘ (جـ)
㉙ (ب)	㉚ (د)	㉛ (د)	㉜ (جـ)
㉝ (أ)	㉞ (جـ)	㉟ (أ)	㊱ (د)
㊲ (جـ)	㊳ (جـ)	㊴ (أ)	㊵ (أ)
㊶ (ب)	㊷ (د)	㊸ (د)	㊹ (د)
㊺ (ب)	㊻ (ب)		

ثانيا الأسئلة المقالية

١

شكل (١) : متماثل حول محور السينات ومحور الصادات ونقطة الأصل
شكل (٢) : متماثل حول محور السينات
شكل (٣) : متماثل حول نقطة الأصل
شكل (٤) : متماثل حول نقطة الأصل
شكل (٥) : متماثل حول محور الصادات
شكل (٦) : متماثل حول نقطة الأصل

٢

① فردية ② ليست زوجية وليست فردية
③ زوجية ④ ليست زوجية وليست فردية
⑤ فردية ⑥ فردية

٣

شكل (١) :
المدى = {−٢ ، ٢} ، ليست زوجية وليست فردية
شكل (٢) : المدى = ح − [−٢ ، ٢] ، فردية
شكل (٣) : المدى =]−∞ ، ٣] ، زوجية
شكل (٤) : المدى = [٠ ، ٤] ، زوجية
شكل (٥) : المدى = ح − {٠} ، فردية
شكل (٦) : المدى = ح ، فردية

٤

شكل (١) : د (س) = س^{٣} + س
∵ مجال د = ح والمنحنى متماثل حول نقطة الأصل
∴ الدالة د فردية.
التحقيق الجبرى : لكل س ، −س ∈ ح
∵ د (−س) = (−س)^{٣} + (−س)
= −س^{٣} − س = −(س^{٣} + س)
= −د (س)
∴ الدالة فردية
شكل (٢) : د (س) = س^{٣} − ٢
∵ مجال د = ح
، المنحنى ليس متماثلاً حول محور الصادات وليس متماثلاً بالنسبة لنقطة الأصل.

∴ الدالة د ليست زوجية وليست فردية.

التحقيق الجبرى : لكل س ، −س ∈ ح

∵ د (−س) = $(-س)^{٣}$ − ٢ = $-س^{٣}$ − ٢

= −($س^{٣}$ + ٢)

∴ د (−س) ≠ د (س) ≠ − د (س)

∴ الدالة د ليست زوجية وليست فردية.

شكل (٣) : د (س) = ٢ − $س^{٢}$

∵ مجال د = [−٢ ، ٢]

، المنحنى متماثل حول محور الصادات.

∴ الدالة د زوجية.

التحقيق الجبرى : لكل س ، −س ∈ [−٢ ، ٢]

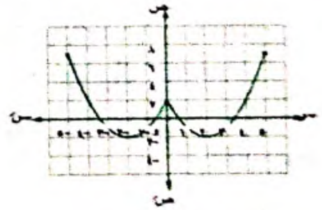
∵ د (−س) = ٢ − $(-س)^{٢}$

= ٢ − $س^{٢}$ = د (س)

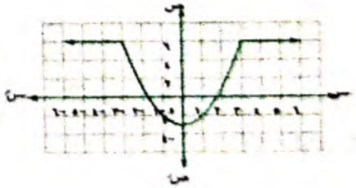
∴ الدالة زوجية.

٥

أولاً :



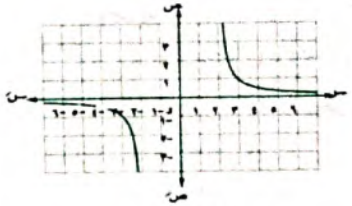
شكل (١)



شكل (٣)

ثانيًا :

شكل (٢)



شكل (٤)

ثالثًا :

شكل (١) : المجال = [−٥ ، ٥] ، المدى = [−٢ ، ٧]
، ليست أحادية

شكل (٢) : المجال = ح − {٠}
، المدى = [−٢ ، ٢] − {٠} ، ليست أحادية

شكل (٣) : المجال = ح ، المدى = [−٣ ، ٦]
، ليست أحادية

شكل (٤) : المجال = ح − [−٢ ، ٢]
، المدى = ح − {٠} ، أحادية.

٦

① د (−س) = ٥ = د (س) ∴ الدالة زوجية.

② د (−س) = $(-س)^{٤}$ + $(-س)^{٢}$ − ١
= $س^{٤}$ + $س^{٢}$ − ١ = د (س)
∴ الدالة زوجية.

③ د (−س) = ٣ (−س) − ٤ $(-س)^{٣}$
= −٣ س + ٤ $س^{٣}$
= − (٣ س − ٤ $س^{٣}$) = − د (س)
∴ الدالة فردية.

④ د (−س) = $(-س)^{٢}$ − ٣ (−س) + ٤
= $س^{٢}$ + ٣ س + ٤
≠ د (س) ≠ − د (س)
∴ الدالة ليست زوجية وليست فردية.

⑤ د (−س) = $(-س)^{٣}$ $((-س)^{٢} - ١)$
= − $س^{٣}$ ($س^{٢}$ − ١) = − د (س)
∴ الدالة فردية.

⑥ د (−س) = $(-س - ٣)^{٢}$ − ٧
= $(س + ٣)^{٢}$ − ٧
≠ د (س) ≠ − د (س)
∴ الدالة ليست زوجية وليست فردية.

⑦ د (−س) = $\frac{(-س)^{٢} + ٢}{-س - ٣}$
= $\frac{س^{٢} + ٢}{-س - ٣}$ = $\frac{س^{٢} + ٢}{-(س + ٣)}$
≠ د (س) ≠ − د (س)
∴ الدالة ليست زوجية وليست فردية.

حل آخر :

∵ مجال الدالة = ح − {−٣}

∴ ٣ ∈ مجال الدالة ، −٣ ∉ مجالها

∴ الدالة ليست فردية وليست زوجية.

⑧ د (−س) = $\frac{٢ (-س)^{٣} - (-س)^{٥}}{-س}$
= $\frac{-٢ س^{٣} + س^{٥}}{-س}$
= $\frac{-(٢ س^{٣} - س^{٥})}{-س}$
= $\frac{٢ س^{٣} - س^{٥}}{س}$ = د (س)
∴ الدالة زوجية.

⑨ د (−س) = $\frac{(-س)^{٢}}{-س - ١}$ = $\frac{س^{٢}}{-س - ١}$
≠ د (س) ≠ − د (س)
∴ الدالة ليست زوجية وليست فردية.

⑩ ∵ مجال د = [−٣ ، ∞[
∴ لكل س ∈ [−٣ ، ∞[
ليس بالضرورة أن يوجد −س ∈ [−٣ ، ∞[
∴ الدالة د ليست زوجية وليست فردية.

⑪ د (−س) = $((-س)^{٢} + ١)^{٣}$ = $(س^{٢} + ١)^{٣}$
= د (س)
∴ الدالة زوجية.

⑫ د (−س) = $\sqrt[٣]{(-س)^{٢} + ٦}$ = $\sqrt[٣]{س^{٢} + ٦}$ = د (س)
∴ الدالة زوجية.

⑬ د (−س) = $\sqrt[٣]{(-س)^{٣} + (-س)}$
= $\sqrt[٣]{-(س^{٣} + س)}$ = − $\sqrt[٣]{س^{٣} + س}$
= − د (س)
∴ الدالة فردية.

⑭ د (−س) = $(-س)^{٣}$ − $\frac{١}{-س}$
= − $س^{٣}$ + $\frac{١}{س}$
= − ($س^{٣}$ − $\frac{١}{س}$) = − د (س)
∴ الدالة فردية.

⑮ د (−س) = $(-س - \frac{٢}{-س})^{٣}$
= $(-(س - \frac{٢}{س}))^{٣}$
= − $(س - \frac{٢}{س})^{٣}$ = − د (س)
∴ الدالة فردية.

⑯ د (−س) = $(\frac{(-س)^{٢}}{٣} - \frac{٥}{(-س)^{٢}})^{٢}$
= $(\frac{س^{٢}}{٣} - \frac{٥}{س^{٢}})^{٢}$ = د (س)
∴ الدالة زوجية.

⑰ د (−س) = [illegible]
= د (س)
∴ الدالة زوجية.

⑱ $د(-س) = \left(\frac{١ - س}{١ + س}\right)^{٢} - \left(\frac{١ + س}{١ - س}\right)^{٢}$

$= -د(س)$

∴ الدالة فردية.

⑲ $د(-س) = \left(\frac{-س - ١}{-س + ١}\right)^{٥} + \left(\frac{-س + ١}{-س - ١}\right)^{٥}$

$= \left[\frac{-(س + ١)}{-(س - ١)}\right]^{٥} + \left[\frac{-(س - ١)}{-(س + ١)}\right]^{٥}$

$= \left(\frac{س + ١}{س - ١}\right)^{٥} + \left(\frac{س - ١}{س + ١}\right)^{٥}$

$= د(س)$

∴ الدالة زوجية.

⑳ $د(-س) = ((-س)^{٣} + ١)^{٤} - ((-س)^{٣} - ١)^{٤}$

$= (-(س^{٣} - ١))^{٤} - (-(س^{٣} + ١))^{٤}$

$= (س^{٣} - ١)^{٤} - (س^{٣} + ١)^{٤}$

$= -د(س)$

∴ الدالة فردية.

㉑ $د(-س) = -س\ جتا(-س) = -س\ جتا\ س$

$= -د(س)$

∴ الدالة فردية.

㉒ $د(-س) = \frac{-٣س}{ظا(-س)} = \frac{-٣س}{-ظا\ س} = \frac{٣س}{ظا\ س}$

$= د(س)$

∴ الدالة زوجية.

㉓ $د(-س) = \frac{(-س)^{٢} \times جا(-٣س)}{١ + (-س)^{٤}}$

$= \frac{س^{٢}\ جا\ ٣س}{١ + س^{٤}} = د(س)$

∴ الدالة زوجية.

㉔ $د(-س) = \frac{٣(-س)^{٢} - جتا(-س)}{(-س)^{٣} + ٦س}$

$= \frac{٣س^{٢} - جتا\ س}{-س^{٣} + ٦س} = \frac{٣س^{٢} - جتا\ س}{-(س^{٣} - ٦س)}$

$= -د(س)$

∴ الدالة فردية.

㉕ $د(-س) = (-س)^{٢}\ (جا(-س))^{٣}$

$= س^{٢}\ (-جا\ س)^{٣} = -س^{٢}\ جا^{٣}\ س$

$= -د(س)$

∴ الدالة فردية.

㉖ $د(-س) = -س\ جا(-س)^{٣}$

$= -س\ جا(-س^{٣})$

$= س\ جا\ س^{٣} = د(س)$

∴ الدالة زوجية.

㉗ $د(-س) = \frac{(-س)^{٢} + ظا(-س)}{(-س)^{٤} + جا(-س)}$

$= \frac{س^{٢} - ظا\ س}{س^{٤} - جا\ س} \neq د(س) \neq -د(س)$

∴ الدالة ليست زوجية وليست فردية.

㉘ $د(-س) = جا(-س)^{٢} - (جا(-س))^{٢}$

$= جا\ س^{٢} - (-جا\ س)^{٢}$

$= جا\ س^{٢} - جا^{٢}\ س = د(س)$

∴ الدالة زوجية.

㉙ $د(-س) = (-س)^{٤} + جا^{٦}(-س)$

$= س^{٤} + (-جا\ س)^{٦}$

$= س^{٤} + جا^{٦}\ س = د(س)$

∴ الدالة زوجية.

㉚ $د(-س) = (-س)^{٧} + ظا^{٥}(-س)$

$= -س^{٧} + (-ظا\ س)^{٥}$

$= -س^{٧} - ظا^{٥}\ س = -د(س)$

∴ الدالة فردية.

㉛ $د(-س) = \frac{جا(-٣س)\ جتا(-٢س)}{قا(-س)}$

$= \frac{-جا\ ٣س\ جتا\ ٢س}{قا\ س} = -د(س)$

∴ الدالة فردية.

㉜ ∵ $د(س) = ٢^{٢س} + جتا\ س + ٢^{-٢س}$

∴ $د(-س) = ٢^{-٢س} + جتا(-س) + ٢^{٢س}$

$= ٢^{-٢س} + جتا\ س + ٢^{٢س}$

$= د(س)$

∴ الدالة زوجية.

㉝ ∵ $د(س)$

$= ((جتا\ س + جا\ س) - ١)((جتا\ س + جا\ س) + ١)$

$= (جتا\ س + جا\ س)^{٢} - ١$

$= جتا^{٢}\ س + جا^{٢}\ س + ٢\ جا\ س\ جتا\ س - ١$

$= ١ + ٢\ جا\ س\ جتا\ س - ١ = ٢\ جا\ س\ جتا\ س$

∴ $د(-س) = ٢\ جا(-س)\ جتا(-س)$

$= -٢\ جا\ س\ جتا\ س = -د(س)$

∴ الدالة فردية.

㉞ $د(-س) = \begin{cases} -٢س & ، -س \geq ٠ \\ ٢س & ، -س < ٠ \end{cases}$

$= \begin{cases} -٢س & ، س \leq ٠ \\ ٢س & ، س > ٠ \end{cases}$

$= \begin{cases} ٢س & ، س \geq ٠ \\ -٢س & ، س < ٠ \end{cases}$

$= د(س)$

∴ الدالة زوجية.

㉟ $د(-س)$

$= \begin{cases} -٢س + (-س)^{٢} & ، -س \geq ٠ \\ -٢س - (-س)^{٢} & ، -س < ٠ \end{cases}$

$= \begin{cases} -(٢س - س^{٢}) & ، س \leq ٠ \\ -(٢س + س^{٢}) & ، س > ٠ \end{cases}$

$= \begin{cases} -(٢س + س^{٢}) & ، س \geq ٠ \\ -(٢س - س^{٢}) & ، س < ٠ \end{cases}$

$= - \begin{cases} ٢س + س^{٢} & ، س \geq ٠ \\ ٢س - س^{٢} & ، س < ٠ \end{cases}$

$= -د(س)$

∴ الدالة فردية.

٧

شكل (١) : نلاحظ أن كل مستقيم أفقى يقطع المنحنى فى نقطة واحدة ولذلك فإن الدالة د أحادية

التحقيق الجبرى :

بفرض أن أ ، ب ∈ مجال الدالة د

∴ $د(أ) = ٢ - ٢أ ، د(ب) = ٢ - ٢ب$

وبوضع $د(أ) = د(ب)$ ∴ $٢ - ٢أ = ٢ - ٢ب$

∴ $-٢أ = -٢ب$ ∴ $أ = ب$

∴ الدالة د أحادية

شكل (٢) : نلاحظ أن كل مستقيم أفقى يقطع المنحنى فى نقطة واحدة ولذلك فإن الدالة د أحادية

التحقيق الجبرى :

بفرض أن أ ، ب ∈ مجال الدالة د

∴ $د(أ) = ٤ - أ^{٣} ، د(ب) = ٤ - ب^{٣}$

وبوضع $د(أ) = د(ب)$ ∴ $٤ - أ^{٣} = ٤ - ب^{٣}$

∴ $-أ^{٣} = -ب^{٣}$ ∴ $أ = ب$

∴ الدالة د أحادية.

شكل (٣) : نلاحظ أن كل مستقيم أفقى يقطع المنحنى فى نقطة واحدة ولذلك فإن الدالة د أحادية

التحقيق الجبرى :

بفرض أن أ ، ب ∈ مجال الدالة د

∴ $د(أ) = \frac{أ - ١}{أ - ٢} ، د(ب) = \frac{ب - ١}{ب - ٢}$

وبوضع $د(أ) = د(ب)$ ∴ $\frac{أ - ١}{أ - ٢} = \frac{ب - ١}{ب - ٢}$

∴ $(أ - ١)(ب - ٢) = (أ - ٢)(ب - ١)$

∴ $أب - ٢أ - ب + ٢ = أب - أ - ٢ب + ٢$

∴ $-٢أ - ب = -أ - ٢ب$

∴ $٢ب - ب = ٢أ - أ$ ∴ $ب = أ$

∴ الدالة د أحادية

٨

① بفرض أن : أ ، ب ∋ مجال الدالة د

، ∵ د (أ) = ٢أ − ٣ ، د (ب) = ٢ب − ٣

ويوضع د (أ) = د (ب)

∴ ٢أ − ٣ = ٢ب − ٣ ∴ ٢أ = ٢ب

∴ أ = ب ∴ د دالة أحادية.

② بفرض أن : أ ، ب ∋ مجال الدالة د

، ∵ د (أ) = ٤ − أ^{٢} ، د (ب) = ٤ − ب^{٢}

ويوضع د (أ) = د (ب)

∴ ٤ − أ^{٢} = ٤ − ب^{٢} ∴ − أ^{٢} = − ب^{٢}

∴ أ = ب ∴ د دالة أحادية

③ بفرض أن : أ ، ب ∋ مجال الدالة د

، ∵ د (أ) = $\frac{٢}{٢أ + ٥}$ ، د (ب) = $\frac{٢}{٢ب + ٥}$

ويوضع د (أ) = د (ب)

∴ $\frac{٢}{٢أ + ٥}$ = $\frac{٢}{٢ب + ٥}$ ∴ ٢أ + ٥ = ٢ب + ٥

∴ أ = ب ∴ د دالة أحادية.

④ بفرض أن : أ ، ب ∋ مجال الدالة د

، ∵ د (أ) = $\frac{٣أ − ٥}{٤أ + ٣}$ ، د (ب) = $\frac{٣ب − ٥}{٤ب + ٣}$

ويوضع د (أ) = د (ب)

∴ $\frac{٣أ − ٥}{٤أ + ٣}$ = $\frac{٣ب − ٥}{٤ب + ٣}$

∴ (٣أ − ٥) (٤ب + ٣) = (٤أ + ٣) (٣ب − ٥)

∴ ١٢أب + ٩أ − ٢٠ب − ١٥

= ١٢أب − ٢٠أ + ٩ب − ١٥

∴ ٩أ − ٢٠ب = − ٢٠أ + ٩ب

∴ ٢٩أ = ٢٩ب

∴ أ = ب ∴ د دالة أحادية.

٩

① بفرض أن : أ ، ب ∋ مجال الدالة د ، أ ≠ ب

، ∵ د (أ) = ٣ ، د (ب) = ٣

∴ د (أ) = د (ب) ∴ د دالة ليست أحادية.

② بفرض أن : أ ، ب ∋ مجال الدالة د

، ∵ د (أ) = (أ + ٣)^{٢} ، د (ب) = (ب + ٣)^{٢}

ويوضع د (أ) = د (ب)

∴ (أ + ٣)^{٢} = (ب + ٣)^{٢} ∴ أ + ٣ = ± (ب + ٣)

∴ أ + ٣ = ب + ٣ ∴ أ = ب

أ، أ + ٣ = − ب − ٣ ∴ أ = − ب − ٦

∴ أ لها قيمتان هما : ب ، − ب − ٦

∴ د دالة ليست أحادية.

③ بفرض أن : أ ، ب ∋ مجال الدالة د

، ∵ د (أ) = أ^{٢} − ٥أ + ٦

، د (ب) = ب^{٢} − ٥ب + ٦

ويوضع د (أ) = د (ب)

∴ أ^{٢} − ٥أ + ٦ = ب^{٢} − ٥ب + ٦

∴ أ^{٢} − ٥أ = ب^{٢} − ٥ب

∴ أ^{٢} − ب^{٢} − ٥أ + ٥ب = ٠

∴ (أ − ب) (أ + ب) − ٥ (أ − ب) = ٠

∴ (أ − ب) (أ + ب − ٥) = ٠

∴ أ − ب = ٠ ∴ أ = ب

أ، أ + ب − ٥ = ٠ ∴ أ = − ب + ٥

∴ أ لها قيمتان هما : ب ، − ب + ٥

∴ د دالة ليست أحادية.

④ بفرض أن : أ ، ب ∋ مجال الدالة د

، ∵ د (أ) = $\frac{١}{أ^{٢} − ٤}$ ، د (ب) = $\frac{١}{ب^{٢} − ٤}$

ويوضع د (أ) = د (ب)

∴ $\frac{١}{أ^{٢} − ٤}$ = $\frac{١}{ب^{٢} − ٤}$ ∴ أ^{٢} − ٤ = ب^{٢} − ٤

∴ أ^{٢} = ب^{٢} ∴ أ = ± ب

∴ أ لها قيمتان هما : ب ، − ب

∴ د دالة ليست أحادية.

١٠

① بفرض أن : أ ، ب ∋ مجال الدالة د

، ∵ د (أ) = أ^{٢} + ١ ، د (ب) = ب^{٢} + ١

ويوضع د (أ) = د (ب) ∴ أ^{٢} + ١ = ب^{٢} + ١

∴ أ^{٢} = ب^{٢} ∴ أ = ب ∴ د دالة أحادية.

② بفرض أن : أ ، ب ∋ مجال الدالة د

، ∵ د (أ) = أ^{٢} − ١ ، د (ب) = ب^{٢} − ١

ويوضع د (أ) = د (ب) ∴ أ^{٢} − ١ = ب^{٢} − ١

∴ أ^{٢} = ب^{٢} ∴ أ = ± ب

∴ أ لها قيمتان هما : ب ، − ب

∴ د دالة ليست أحادية.

③ بفرض أن : أ ، ب ∋ مجال الدالة د

، ∵ د (أ) = ٢أ^{٢} − أ − ٣

، د (ب) = ٢ب^{٢} − ب − ٣

ويوضع د (أ) = د (ب)

∴ ٢أ^{٢} − أ − ٣ = ٢ب^{٢} − ب − ٣

∴ ٢أ^{٢} − ٢ب^{٢} − أ + ب = ٠

∴ ٢ (أ^{٢} − ب^{٢}) − (أ − ب) = ٠

∴ ٢ (أ − ب) (أ + ب) − (أ − ب) = ٠

∴ (أ − ب) (٢ (أ + ب) − ١) = ٠

∴ أ − ب = ٠ ∴ أ = ب

أ، ٢ (أ + ب) − ١ = ٠

∴ أ + ب = $\frac{١}{٢}$ ∴ أ = $\frac{١}{٢}$ − ب

∴ أ لها قيمتان هما : ب ، $\frac{١}{٢}$ − ب

∴ د دالة ليست أحادية.

④ بفرض أن : أ ، ب ∋ مجال الدالة د

، ∵ د (أ) = أ^{٤} + ٢أ^{٢} + ١

، د (ب) = ب^{٤} + ٢ب^{٢} + ١

، ويفرض د (أ) = د (ب)

∴ أ^{٤} + ٢أ^{٢} + ١ = ب^{٤} + ٢ب^{٢} + ١

∴ (أ^{٢} + ١)^{٢} = (ب^{٢} + ١)^{٢}

∴ أ^{٢} + ١ = ب^{٢} + ١ ∴ أ^{٢} = ب^{٢} ∴ أ = ± ب

∴ أ لها قيمتان هما : ب ، − ب

∴ د دالة ليست أحادية.

⑤ بفرض أن : أ ، ب ∋ مجال الدالة د

، ∵ د (أ) = $\frac{٢أ + ١}{أ − ٢}$ ، د (ب) = $\frac{٢ب + ١}{ب − ٢}$

، ويفرض أن د (أ) = د (ب)

∴ $\frac{٢أ + ١}{أ − ٢}$ = $\frac{٢ب + ١}{ب − ٢}$

∴ (٢أ + ١) (ب − ٢) = (أ − ٢) (٢ب + ١)

∴ ٢أب − ٤أ + ب − ٢

= ٢أب + أ − ٤ب − ٢

∴ −٤أ + ب = أ − ٤ب

∴ ٥ب = ٥أ ∴ أ = ب ∴ د دالة أحادية

⑥ بفرض أن : أ ، ب ∋ مجال الدالة د

، ∵ د (أ) = $\frac{٣ − أ}{٢ + أ}$ ، د (ب) = $\frac{٣ − ب}{٢ + ب}$

، ويفرض أن د (أ) = د (ب) ∴ $\frac{٣ − أ}{٢ + أ}$ = $\frac{٣ − ب}{٢ + ب}$

∴ (٣ − أ) (ب + ٢) = (أ + ٢) (٣ − ب)

∴ ٣ب + ٦ − أب − ٢أ = ٣أ − أب + ٦ − ٢ب

∴ ٣ب − ٢أ = ٣أ − ٢ب

∴ ٥ب = ٥أ ∴ أ = ب ∴ د دالة أحادية

١١

من ① : ④ ليست زوجية وليست فردية

١٢

① ∵ الدالة فردية. ∴ د (−٥) = − د (٥)

∴ المقدار = $\frac{-٧\ د\ (٥) + ٣\ د\ (٥)}{-٢\ د\ (٥)} = \frac{-٤\ د\ (٥)}{-٢\ د\ (٥)} = ٢$

② ∵ الدالة زوجية. ∴ د (−٥) = د (٥)

∴ المقدار = $\frac{٧\ د\ (٥) + ٣\ د\ (٥)}{٢\ د\ (٥)} = \frac{١٠\ د\ (٥)}{٢\ د\ (٥)} = ٥$

١٣

① (د + ر) (س) = (١ − س)^{٢} + (١ + س)^{٢}

∴ (د + ر) (−س) = (١ + س)^{٢} + (١ − س)^{٢}

= (د + ر) (س)

∴ (د + ر) زوجية.

② (د − ر) (س) = (١ − س)^{٢} − (١ + س)^{٢}

∴ (د − ر) (−س) = (١ + س)^{٢} − (١ − س)^{٢}

= − (د − ر) (س)

∴ (د − ر) فردية.

③ (د . ر) (س) = (١ − س)^{٢} (١ + س)^{٢}

∴ (د . ر) (−س) = (١ + س)^{٢} (١ − س)^{٢}

= (د . ر) (س)

∴ (د . ر) زوجية.

④ $\left(\frac{د}{ر}\right)$ (س) = $\frac{(١ - س)^{٢}}{(١ + س)^{٢}}$

∴ $\left(\frac{د}{ر}\right)$ (−س) = $\frac{(١ + س)^{٢}}{(١ - س)^{٢}}$

≠ $\left(\frac{د}{ر}\right)$ (س) ≠ − $\left(\frac{د}{ر}\right)$ (س)

∴ $\left(\frac{د}{ر}\right)$ ليست زوجية وليست فردية.

١٤

∵ $د_{١}$ ، $د_{٢}$ زوجيتان ، $ر_{١}$ ، $ر_{٢}$ فرديتان

① $د_{١}$ + $ر_{٢}$ ليست زوجية وليست فردية

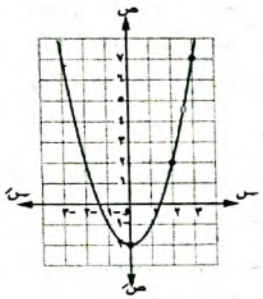
② $د_{١}$ − $د_{٢}$ زوجية ③ $ر_{١}$ + $ر_{٢}$ فردية

④ $د_{١}$. $ر_{٢}$ فردية ⑤ $ر_{١}$. $ر_{٢}$ زوجية

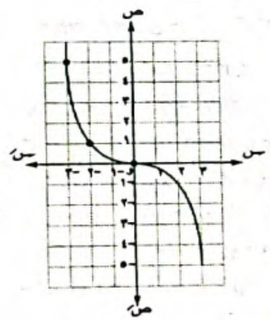
⑥ $\frac{ر_{٢}}{ر_{١}}$ زوجية

١٥

①



②



ثالثاً مسائل تقيس مهارات التفكير

① (جـ) ② (جـ) ③ (جـ) ④ (ب)

⑤ (أ) ⑥ (ب) ⑦ (أ) ⑧ (أ)

إرشادات الحل :

① ∵ د دالة ينتمي إليها النقطة (٢ ، ٣)

∴ النقطة (٢ ، −١) ∌ بيان الدالة

، ∵ د أحادية ينتمي اليها النقطة (٢ ، ٣)

∴ النقطة (٥ ، ٣) ∌ بيان الدالة

∴ النقطة التى يمكن أن تنتمي للدالة هى (٣ ، ٢)

② ∵ الدالة احادية تمر بالنقطتين (٢ ، أ) ، (٣ ، ب)

∴ لابد وأن يكون أ ≠ ب دائمًا

③ ∵ د زوجية ∴ د (س) = د (−س)

∴ د (س) + س^{٢} د (س) = ٣

∴ د (س) [١ + س^{٢}] = ٣

∴ د (س) = $\frac{٣}{١ + س^{٢}}$

∴ د (١) = $١\frac{١}{٢}$

④ ∵ د فردية ، د (١) = ك ∴ د (−١) = − ك

، ∵ د (س + ٢) = د (س) + د (٢)

بوضع س = −١

∴ د (١) = د (−١) + د (٢)

∴ ك = − ك + د (٢) ∴ د (٢) = ٢ ك

، بوضع س = ١

∴ د (٣) = د (١) + د (٢) = ك + ٢ ك = ٣ ك

⑤ ∵ (د + ر) (−س)

= $\frac{١ + (-س)}{١ - (-س)} + \frac{١ - (-س)}{١ + (-س)}$

= $\frac{١ - س}{١ + س} + \frac{١ + س}{١ - س}$ = (د + ر) (س)

∴ (د + ر) دالة زوجية

، ∵ (د . ر) (س) = $\frac{١ + س}{١ - س} \times \frac{١ - س}{١ + س} = ١$

∴ (د . ر) دالة زوجية أيضًا.

⑥ ∵ ر (−س) = د (−س) + د (س) = ر (س)

∴ ر دالة زوجية دائمًا

⑦ ∵ ٣ د (س) + ٢ د (−س) = س^{٣} − جاس (١)

وبوضع −س بدلاً من س

∴ ٣ د (−س) + ٢ د (س) = (−س)^{٣} − جا(−س)

∴ ٣ د (−س) + ٢ د (س) = −س^{٣} + جاس (٢)

بجمع (١) ، (٢) :

∴ ٥ د (س) + ٥ د (−س) = صفر

∴ د (س) = − د (−س)

∴ الدالة فردية.

⑧ د (س) = س^{٣} ، ر (س) = س^{٢} + ١

(١) (د × ر) (س) = س^{٣} (س^{٢} + ١)

∴ (د × ر) (−س) = (−س)^{٣} ((−س)^{٢} + ١)

= −س^{٣} (س^{٢} + ١)

∴ (د × ر) (−س) = −(د × ر) (س)

أى أن : (د × ر) فردية.

(٢) (د ∘ ر) (س) = د (ر (س))

= د (س^{٢} + ١)

= (س^{٢} + ١)^{٣}

∴ (د ∘ ر) (−س) = ((−س)^{٢} + ١)^{٣}

= (س^{٢} + ١)^{٣}

= (د ∘ ر) (س)

∴ (د ∘ ر) زوجية.

(٣) (ر ∘ د) (س) = ر (د (س))

= ر (س^{٣}) = س^{٦} + ١

∴ (ر ∘ د) (−س) = ((−س)^{٦} + ١)

= س^{٦} + ١ = (ر ∘ د) (س)

∴ (ر ∘ د) زوجية.

∴ الإجابة (أ) هى الصحيحة.

إجابات تمارين 4

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

① (أ)	② (جـ)	③ (د)	④ (ب)
⑤ (د)	⑥ (د)	⑦ (ب)	⑧ (جـ)
⑨ (جـ)	⑩ (جـ)	⑪ (د)	⑫ (ب)
⑬ (ب)	⑭ (ب)	⑮ (جـ)	⑯ (ب)
⑰ (ب)			

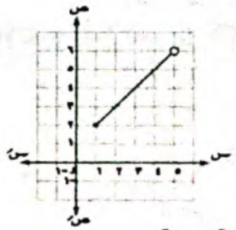
ثانيا الأسئلة المقالية

1

①

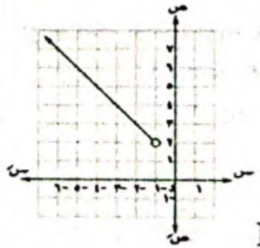
المدى = {−٣ ، ١ ، ٥ ، ٧}

②



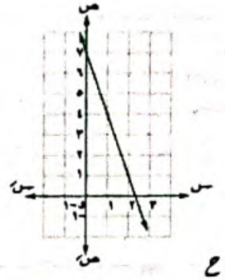
المدى =]٢ ، ٦]

③



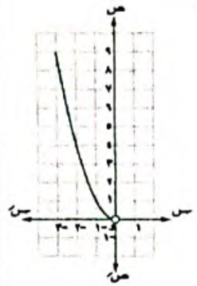
المدى =]٢ ، ∞[

④



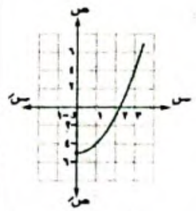
المدى = ح

⑤



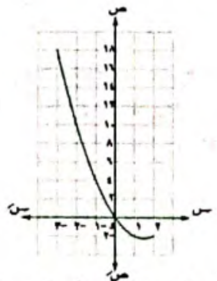
المدى = [٠ ، ∞[

⑥



المدى = [−٥ ، ∞[

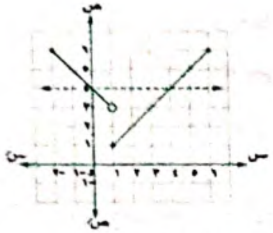
⑦



- لاحظ أن رأس المنحنى (١,٥ ، −٢$\frac{1}{4}$)
- المدى = [−٢$\frac{1}{4}$ ، ١٨]

2

①



- المدى = [١ ، ٦]
- الدالة تناقصية فى]−٢ ، ١[
- ، وتزايدية فى]١ ، ٦[

② الدالة ليست أحادية لأنه يوجد خط أفقى يقطع الدالة فى أكثر من نقطة.

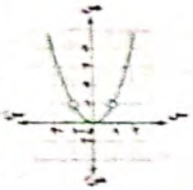
③

$$د(س) = \frac{س(س^٢ - ١)}{(س^٢ - ١)} = س ، س \neq \pm ١$$

- المجال = ح − {−١ ، ١}
- المدى = ح − {−١ ، ١}
- الدالة تزايدية على ح − {−١ ، ١}
- الدالة فردية.
- الدالة متماثلة حول نقطة الأصل.

④

$$د(س) = \frac{س^٢(س^٢ - ١)}{(س^٢ - ١)} = س^٢$$



حيث س ≠ ±١

- المجال = ح − {١ ، −١}
- المدى = [٠ ، ∞[− {١}
- الدالة تناقصية فى]−∞ ، ٠[− {−١}
- ، وتزايدية فى]٠ ، ∞[− {١}
- الدالة زوجية.
- الدالة متماثلة حول محور الصادات.

3

①

$$د(س) = \frac{٣(س^٢ - ١)}{(س^٢ - ١)}$$

∴ د(س) = ٣ ، س ≠ ±١

- المجال = ح − {١ ، −١}
- المدى = {٣}
- الدالة ثابتة على مجالها.
- الدالة زوجية.
- الدالة متماثلة حول محور الصادات.

②

$$د(س) = \frac{(٢ - س)(٢ + س)}{س + ٢} = ٢ - س$$

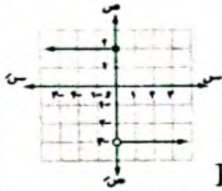
، س ≠ −٢

- المجال = ح − {−٢}
- المدى = ح − {٤}
- الدالة تناقصية على مجالها
- الدالة ليست فردية وليست زوجية.

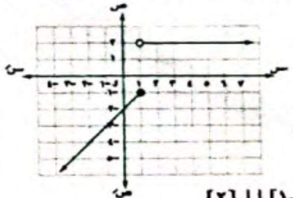
4

①

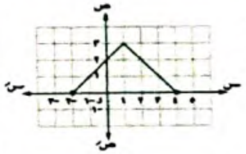
- المجال =]−∞ ، ٣[
- المدى = {٢}
- الدالة ثابتة فى الفترة]−∞ ، ٣[
- الدالة ليست زوجية وليست فردية.
- الدالة ليست لها نقطة تماثل وليس لها محور تماثل.

②


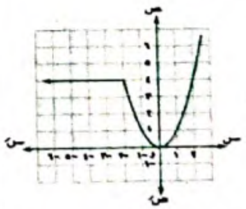
• المجال = ح
• المدى = {−٣ ، ٢}
• الدالة ثابتة فى كل من :
]−∞ ، ٠[،]٠ ، ∞[
• الدالة ليست زوجية وليست فردية.
• الدالة ليست لها نقطة تماثل وليس لها محور تماثل.

③


• المجال = ح
• المدى
=]−∞ ، −١] ∪ {٢}
• الدالة ثابتة فى]١ ، ∞[، وتزايدية فى]−∞ ، ١[
• الدالة ليست زوجية وليست فردية.
• الدالة ليست لها نقطة تماثل وليس لها محور تماثل.

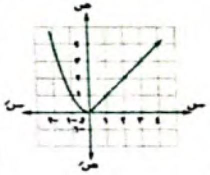
④


• المجال = [−٢ ، ٤]
• المدى = [٠ ، ٣]
• الدالة تزايدية
فى]−٢ ، ١[
، وتناقصية فى]١ ، ٤[
• الدالة ليست زوجية وليست فردية.
• محور التماثل هو المستقيم س = ١

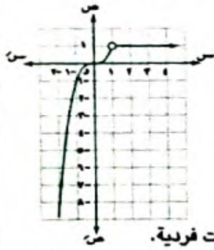
⑤


• المجال = ح
• المدى = [٠ ، ∞[
• الدالة ثابتة
فى]−∞ ، −٢[
، وتناقصية فى]−٢ ، ٠[، وتزايدية فى]٠ ، ∞[

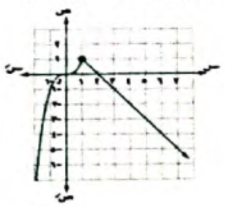
• الدالة ليست زوجية وليست فردية.
• الدالة ليست لها نقطة تماثل وليس لها محور تماثل.

⑥


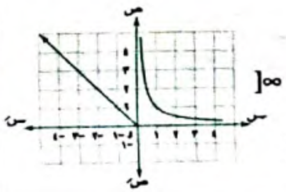
• المجال = ح
• المدى = [٠ ، ∞[
• الدالة تناقصية
فى]−∞ ، ٠[
، وتزايدية فى]٠ ، ∞[
• الدالة ليست زوجية وليست فردية.
• الدالة ليست لها نقطة تماثل وليس لها محور تماثل.

⑦


• المجال = ح − {١}
• المدى =]−∞ ، ١[
• الدالة تزايدية
فى]−∞ ، ١[
، وثابتة فى]١ ، ∞[
• الدالة ليست زوجية وليست فردية.
• الدالة ليست لها نقطة تماثل وليس لها محور تماثل.

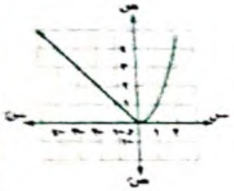
⑧


• المجال = ح
• المدى =]−∞ ، ١]
• الدالة تزايدية
فى]−∞ ، ١[
، وتناقصية
فى]١ ، ∞[
• الدالة ليست زوجية وليست فردية.
• الدالة ليست لها نقطة تماثل وليس لها محور تماثل.

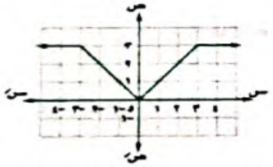
⑨


• المجال = ح
• المدى = [صفر ، ∞[
• الدالة تناقصية
فى]−∞ ، ٠[
،]٠ ، ∞[

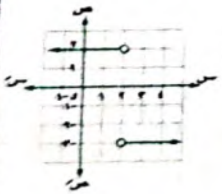
• الدالة ليست زوجية وليست فردية.
• الدالة ليست لها نقطة تماثل وليس لها محور تماثل.

⑩


• المجال = ح
• المدى = [صفر ، ∞[
• الدالة تناقصية
فى]−∞ ، ٠[
، وتزايدية فى]٠ ، ∞[
• الدالة ليست زوجية وليست فردية.
• الدالة ليست لها نقطة تماثل وليس لها محور تماثل.

⑪


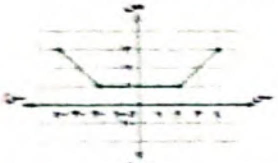
• المجال = ح • المدى = [٠ ، ٣]
• الدالة ثابتة فى كل من]−∞ ، −٣[،]٣ ، ∞[
، وتناقصية فى]−٣ ، ٠[، وتزايدية فى]٠ ، ٣[
• الدالة زوجية. • محور التماثل هو المستقيم : س = ٠

⑫


د (س) = { −٣ ، س > ٢ ؛ ٢ ، س < ٢ }
• المجال = ح − {٢}
• المدى = {٢ ، −٣}
• الدالة ثابتة فى كل من :]−∞ ، ٢[،]٢ ، ∞[
• الدالة ليست زوجية وليست فردية.
• الدالة ليست لها نقطة تماثل وليس لها محور تماثل.

⑬

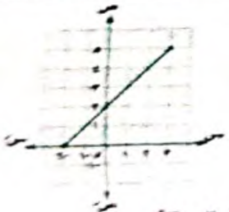
• المجال = [−٣ ، ٣]
• المدى = {٠ ، ٢}
• الدالة ثابتة فى كل من
]−٣ ، −١[،]−١ ، ١[،]١ ، ٣[
• الدالة زوجية
• محور التماثل هو المستقيم س = ٠

⑭


• المجال = [−٤ ، ٤] • المدى = [١ ، ٣]
• الدالة تناقصية فى]−٤ ، −٢[
، وثابتة فى]−٢ ، ٢[
وتزايدية فى]٢ ، ٤[• الدالة زوجية
• محور التماثل هو المستقيم س = ٠

د١ (س) = ٢ س − ١ ، مجالها = ح
، د٢ (س) = ٣ − ٢ س ، مجالها = [−٢ ، ٣]
، (د١ + د٢) (س) = س + ٢ ، ومجالها = [−٢ ، ٣]

س	−٢	−١	٠	١	٢	٣
(د١ + د٢) (س)	٠	١	٢	٣	٤	٥



• المجال = [−٢ ، ٣]
• الدالة تزايدية فى]−٢ ، ٣[

٦

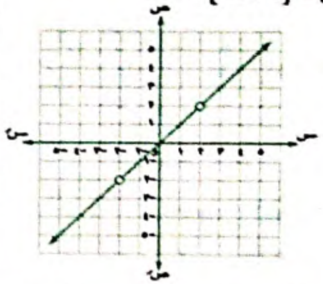
∵ د (س) = $س^٣$ − ٤ س ومجالها = ح

، ر (س) = $س^٢$ − ٤ ومجالها = ح

∴ $\frac{د}{ر}$ (س) = $\frac{س^٣ - ٤ س}{س^٢ - ٤}$ = $\frac{س (س^٢ - ٤)}{س^٢ - ٤}$ = س

حيث س ≠ ± ٢

ومجال $\frac{د}{ر}$ = ح − {٢ ، −٢}



- المدى = ح − {٢ ، −٢}
- الدالة فردية.
- الدالة تزايدية على ح − {٢ ، −٢}
- الدالة أحادية.

إجابات تمارين 5

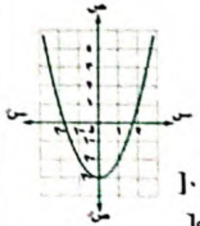
أولا أسئلة الاختيار من متعدد

① (أ)	② (ب)	③ (جـ)	④ (ب)
⑤ (د)	⑥ (جـ)	⑦ (جـ)	⑧ (أ)
⑨ (د)	⑩ (ب)	⑪ (جـ)	⑫ (جـ)
⑬ (أ)	⑭ (جـ)	⑮ (ب)	⑯ (جـ)
⑰ (جـ)	⑱ (ب)	⑲ (أ)	⑳ (ب)
㉑ (ب)	㉒ (ب)	㉓ (ب)	㉔ (د)
㉕ (ب)	㉖ (جـ)	㉗ (جـ)	㉘ (ب)
㉙ (جـ)	㉚ (جـ)	㉛ (أ)	㉜ (جـ)
㉝ (جـ)	㉞ (د)	㉟ (ب)	㊱ (جـ)
㊲ (ب)	㊳ (جـ)	㊴ (د)	㊵ (جـ)
㊶ (د)	㊷ (أ)	㊸ (جـ)	㊹ (أ)
㊺ (ب)	㊻ (ب)	㊼ (جـ)	㊽ (أ)
㊾ (د)	㊿ (ب)	(٥١) (د)	(٥٢) (جـ)

ثانيا الأسئلة المقالية

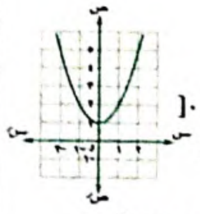
١

①



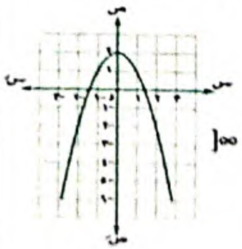
- المجال = ح
- المدى = [−٣ ، ∞[
- الدالة تناقصية في]−∞ ، ٠[
  ، الدالة تزايدية في]٠ ، ∞[
- الدالة زوجية.
- معادلة محور التماثل هي : س = صفر

②



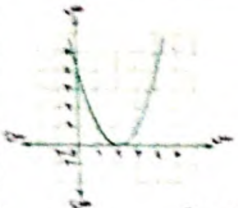
- المجال = ح
- المدى = [١ ، ∞[
- الدالة تناقصية في]−∞ ، ٠[
  ، الدالة تزايدية في]٠ ، ∞[
- الدالة زوجية.
- معادلة محور التماثل هي : س = صفر

③



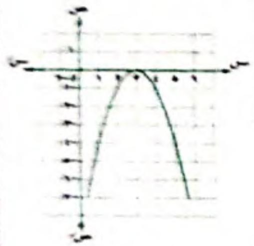
- المجال = ح
- المدى =]−∞ ، ٢]
- الدالة تناقصية في]٠ ، ∞[
  ، الدالة تزايدية
  في]−∞ ، ٠[
- الدالة زوجية.
- معادلة محور التماثل هي : س = صفر

④



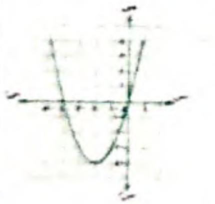
- المجال = ح
- المدى = [٠ ، ∞[
- الدالة تناقصية
  في]−∞ ، ٢[
  ، الدالة تزايدية في]٢ ، ∞[
- الدالة ليست زوجية وليست فردية.
- معادلة محور التماثل هي : س = ٢

⑤



- المجال = ح
- المدى =]−∞ ، ٠]
- الدالة تناقصية
  في]٣ ، ∞[
  ، الدالة تزايدية
  في]−∞ ، ٣[
- الدالة ليست زوجية وليست فردية.
- معادلة محور التماثل هي : س = ٣

⑥

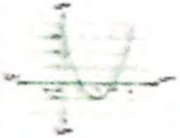


- المجال = ح
- المدى = [−٤ ، ∞[
- الدالة تناقصية
  في]−∞ ، −٢[
  ، الدالة تزايدية
  في]−٢ ، ∞[
- الدالة ليست زوجية وليست فردية.
- معادلة محور التماثل هي : س = −٢

⑦

- المجال = ح
- المدى =]−∞ ، ٢]
- الدالة تناقصية
  في]−٣ ، ∞[
  ، الدالة تزايدية
  في]−∞ ، −٣[
- الدالة ليست زوجية وليست فردية.
- معادلة محور التماثل هي : س = −٣

⑧

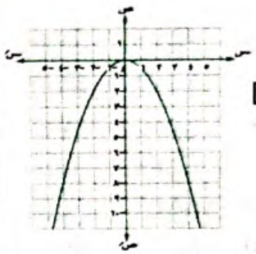


- المجال = ح
- المدى = [−١ ، ∞[
- الدالة تناقصية في]−∞ ، ٢[
  ، الدالة تزايدية في]٢ ، ∞[
- الدالة ليست زوجية وليست فردية.
- معادلة محور التماثل هي : س = ٢

⑨

- المجال = ح
- المدى = [$-\frac{١}{٤}$ ، ∞[
- الدالة تناقصية في]−∞ ، $-\frac{٣}{٢}$[
  ، الدالة تزايدية في]$-\frac{٣}{٢}$ ، ∞[
- الدالة ليست زوجية وليست فردية.
- معادلة محور التماثل هي : س = $-\frac{٣}{٢}$

⑩



• المجال = ح

• المدى =]-∞ ، ٠]

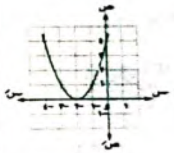
• الدالة تناقصية في [٠ ، ∞[

، الدالة تزايدية في]-∞ ، ٠]

• الدالة زوجية.

• معادلة محور التماثل هي : س = صفر

⑪



$د(س) = (س + ٢)^٢$

• المجال = ح

• المدى = [٠ ، ∞[

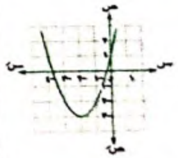
• الدالة تناقصية في]-∞ ، -٢]

، الدالة تزايدية في [-٢ ، ∞[

• الدالة ليست زوجية وليست فردية.

• معادلة محور التماثل هي : س = -٢

⑫



$د(س) = (س + ٢)^٢ - ٣$

• المجال = ح

• المدى = [-٣ ، ∞[

• الدالة تناقصية في]-∞ ، -٢]

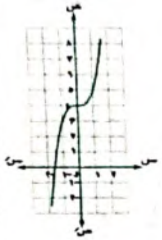
، الدالة تزايدية في [-٢ ، ∞[

• الدالة ليست زوجية وليست فردية.

• معادلة محور التماثل هي : س = -٢

٢

①



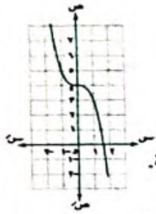
• المجال = ح • المدى = ح

• الدالة تزايدية على ح

• الدالة ليست زوجية وليست فردية.

• نقطة التماثل هي : (٠ ، ٤)

②



• المجال = ح

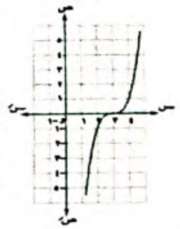
• المدى = ح

• الدالة تناقصية على ح

• الدالة ليست زوجية وليست فردية.

• نقطة التماثل هي : (٠ ، ٤)

③



• المجال = ح

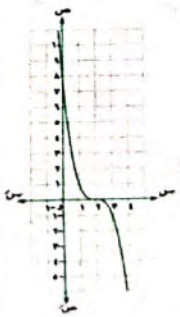
• المدى = ح

• الدالة تزايدية على ح

• الدالة ليست زوجية وليست فردية.

• نقطة التماثل هي : (٣ ، ٠)

④



$د(س) = -(س - ٢)^٣$

• المجال = ح

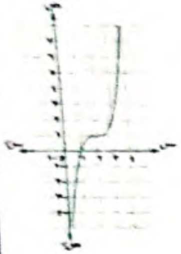
• المدى = ح

• الدالة تناقصية على ح

• الدالة ليست زوجية وليست فردية.

• نقطة التماثل هي : (٢ ، ٠)

⑤



• المجال = ح

• المدى = ح

• الدالة تزايدية على ح

• الدالة ليست زوجية وليست فردية.

• نقطة التماثل هي : (٢ ، ١)

⑥

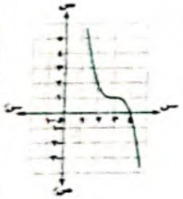
• المجال = ح • المدى = ح

• الدالة تناقصية على ح

• الدالة ليست زوجية وليست فردية.

• نقطة التماثل هي : (١ ، ٢)

⑦



$د(س) = -(س - ٣)^٣ + ١$

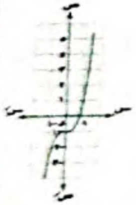
• المجال = ح • المدى = ح

• الدالة تناقصية على ح

• الدالة ليست زوجية وليست فردية.

• نقطة التماثل هي : (٣ ، ١)

⑧



• المجال = ح • المدى = ح

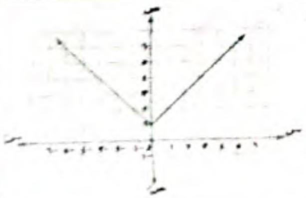
• الدالة تزايدية على ح

• الدالة ليست زوجية وليست فردية.

• نقطة التماثل هي : (٠ ، -١)

٣

①



• المجال = ح

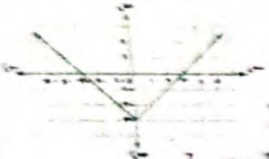
• المدى = [١ ، ∞[

• الدالة تناقصية في]-∞ ، ٠]

، الدالة تزايدية في [٠ ، ∞[

• الدالة زوجية • معادلة محور التماثل هي : س = ٠

②



• المجال = ح

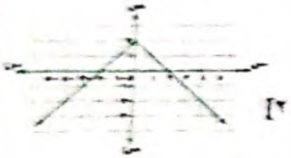
• المدى = [-٢ ، ∞[

• الدالة تناقصية في]-∞ ، ٠]

، الدالة تزايدية في [٠ ، ∞[

• الدالة زوجية • معادلة محور التماثل هي : س = ٠

③



• المجال = ح

• المدى =]-∞ ، ٢]

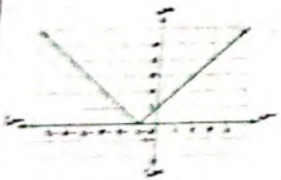
• الدالة تناقصية في [٠ ، ∞[

، الدالة تزايدية في]-∞ ، ٠]

• الدالة زوجية.

• معادلة محور التماثل هي : س = ٠

④



• المجال = ح

• المدى = [٠ ، ∞[

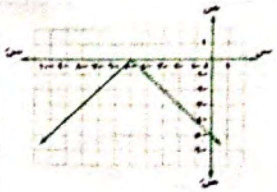
• الدالة تناقصية في]-∞ ، -١]

، الدالة تزايدية في [-١ ، ∞[

• الدالة ليست زوجية وليست فردية

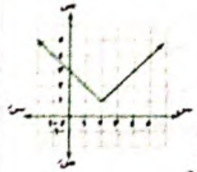
• معادلة محور التماثل هي س = -١

⑤



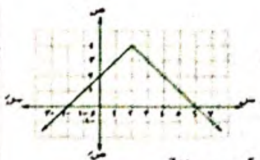
- المجال = ح
- المدى
 =]-∞ ، ٠]
- الدالة تناقصية
 فى]-٥ ، ∞[
 ، الدالة تزايدية فى]-∞ ، -٥[
- الدالة ليست زوجية وليست فردية.
- معادلة محور التماثل هى : س = -٥

⑥



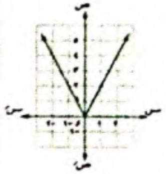
د (س) = |س - ٢| + ١
- المجال = ح
- المدى = [١ ، ∞[
- الدالة تناقصية فى]-∞ ، ٢[
 ، الدالة تزايدية فى]٢ ، ∞[
- الدالة ليست زوجية وليست فردية.
- معادلة محور التماثل هى : س = ٢

⑦



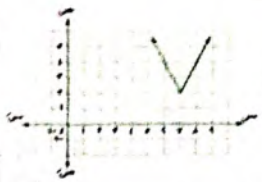
- المجال = ح
- المدى =]-∞ ، ٤]
- الدالة تناقصية
 فى]٢ ، ∞[
 ، الدالة تزايدية فى]-∞ ، ٢[
- الدالة ليست زوجية وليست فردية.
- معادلة محور التماثل هى : س = ٢

⑧



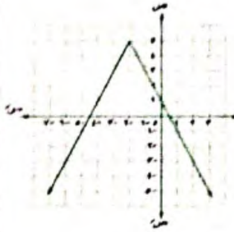
- المجال = ح
- المدى = [٠ ، ∞[
- الدالة تناقصية فى]-∞ ، ٠[
 ، الدالة تزايدية فى]٠ ، ∞[
- الدالة زوجية.
- معادلة محور التماثل هى : س = ٠

⑨



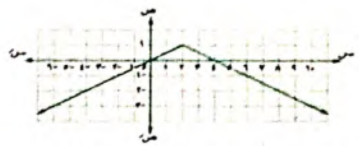
- المجال = ح
- المدى = [٢ ، ∞[
- الدالة تناقصية
 فى]-∞ ، ٧[
 ، الدالة تزايدية فى]٧ ، ∞[
- الدالة ليست زوجية وليست فردية.
- معادلة محور التماثل هى : س = ٧

⑩



- المجال = ح
- المدى =]-∞ ، ٥]
- الدالة تناقصية
 فى]-٢ ، ∞[
 ، الدالة تزايدية
 فى]-∞ ، -٢[
- الدالة ليست زوجية وليست فردية.
- معادلة محور التماثل هى : س = -٢

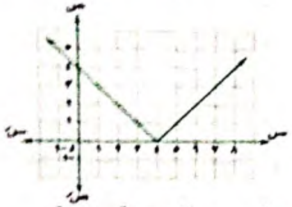
⑪ د (س) = ١ - $\frac{1}{2}$ |س - ٢|



- المجال = ح • المدى =]-∞ ، ١]
- الدالة تناقصية فى]٢ ، ∞[
 ، الدالة تزايدية فى]-∞ ، ٢[
- الدالة ليست زوجية وليست فردية.
- معادلة محور التماثل هى : س = ٢

⑫ ∵ د (س) = $\sqrt{س^2 - ٨ س + ١٦}$

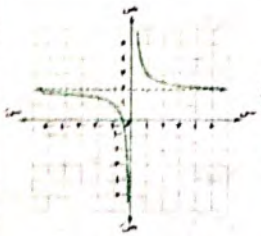
 = $\sqrt{(س - ٤)^2}$ = |س - ٤|



- المجال = ح • المدى = [٠ ، ∞[
- الدالة تناقصية فى]-∞ ، ٤[
 ، الدالة تزايدية فى]٤ ، ∞[
- الدالة ليست زوجية وليست فردية.
- معادلة محور التماثل هى : س = ٤

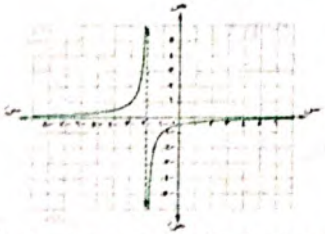
٤

①



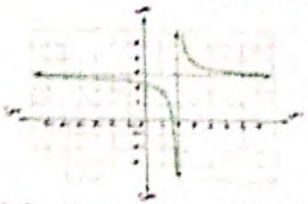
- المجال = ح - {٠}
- المدى = ح - {٢}
- الدالة تناقصية
 فى]٠ ، ∞[
 ،]-∞ ، ٠[
- الدالة ليست زوجية وليست فردية.
- نقطة التماثل هى : (٠ ، ٢)

②



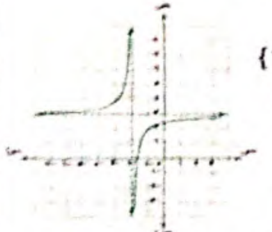
- المجال = ح - {-٢} • المدى = ح - {٠}
- الدالة تزايدية فى]-∞ ، -٢[،]-٢ ، ∞[
- الدالة ليست زوجية وليست فردية.
- نقطة التماثل هى : (-٢ ، ٠)

③



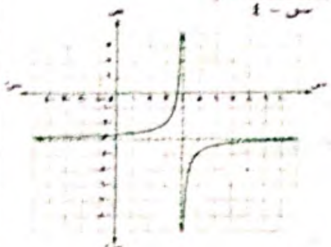
- المجال = ح - {٢} • المدى = ح - {٣}
- الدالة تناقصية فى]-∞ ، ٢[،]٢ ، ∞[
- الدالة ليست زوجية وليست فردية.
- نقطة التماثل هى : (٢ ، ٣)

④



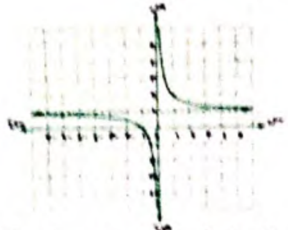
- المجال = ح - {-٢}
- المدى = ح - {٣}
- الدالة تزايدية
 فى]-∞ ، -٢[
 ،]-٢ ، ∞[
- الدالة ليست زوجية وليست فردية.
- نقطة التماثل هى : (-٢ ، ٣)

⑤ د (س) = $\frac{-١}{س - ٤}$ - ٣



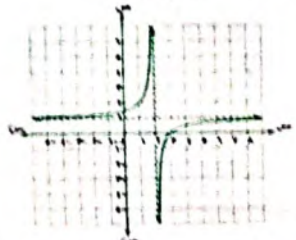
- المجال = ح - {٤} • المدى = ح - {-٣}
- الدالة تزايدية فى]-∞ ، ٤[،]٤ ، ∞[
- الدالة ليست زوجية وليست فردية.
- نقطة التماثل هى : (٤ ، -٣)

⑥ ر(س) = ١ + $\frac{١}{س}$



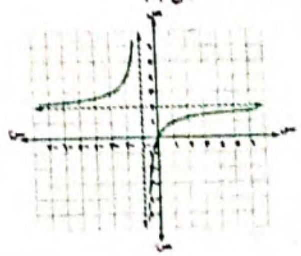
• المجال = ح − {٠} • المدى = ح − {١}
• الدالة تناقصية فى]−∞ ، ٠[،]٠ ، ∞[
• الدالة ليست زوجية وليست فردية.
• نقطة التماثل هى : (٠ ، ١)

⑦ ر(س) = ١ − $\frac{١}{س − ٢}$



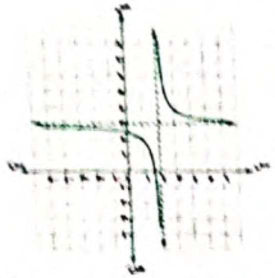
• المجال = ح − {٢} • المدى = ح − {١}
• الدالة تزايدية فى]−∞ ، ٢[،]٢ ، ∞[
• الدالة ليست زوجية وليست فردية.
• نقطة التماثل هى : (٢ ، ١)

⑧ ر(س) = ٢ − $\frac{٢}{س + ١}$



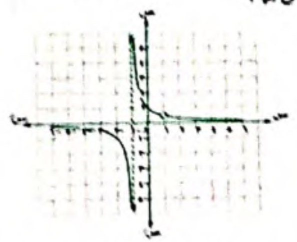
• المجال = ح − {−١} • المدى = ح − {٢}
• الدالة تزايدية فى]−∞ ، −١[،]−١ ، ∞[
• الدالة ليست زوجية وليست فردية.
• نقطة التماثل هى : (−١ ، ٢)

⑨ ر(س) = ٣ + $\frac{١}{س − ٢}$



• المجال = ح − {٢} • المدى = ح − {٣}
• الدالة تناقصية فى]−∞ ، ٢[،]٢ ، ∞[
• الدالة ليست زوجية وليست فردية.
• نقطة التماثل هى : (٢ ، ٣)

⑩ ر(س) = $\frac{س − ١}{(س − ١)(س + ١)}$ = $\frac{١}{س + ١}$ ، س ≠ ١



• المجال = ح − {−١ ، ١} • المدى = ح − {٠ ، $\frac{١}{٢}$}
• الدالة تناقصية فى]−∞ ، −١[،]−١ ، ١[،]١ ، ∞[
• الدالة ليست زوجية وليست فردية.
• لا توجد نقطة تماثل.

٥

• ر(س) = |س − ٢| • ع(س) = |س| − ٢
• ع(س) = |س + ٢| + ٢

٦

① د(س) = −١
② د(س) = س − ٢
③ د(س) = (س + ٢)^{٢} − ٣
④ د(س) = −(س − ١)^{٢} + ٢
⑤ د(س) = س^{٣}
⑥ د(س) = (س − ٢)^{٣}
⑦ د(س) = (س + ١)^{٣} − ٣
⑧ د(س) = |س − ٢| − ٣
⑨ د(س) = −|س − ١| + ٣
⑩ د(س) = $\frac{−١}{س}$
⑪ د(س) = $\frac{١}{س}$ + ٢
⑫ د(س) = $\frac{−١}{س + ٢}$ − ٢

٧

①

د$_{١}$(س) = د(س + ١)
= (س + ١)^{٢}
• المجال = ح
• المدى = [٠ ، ∞[

②

د$_{٢}$(س) = د(س) − ١
= س^{٢} − ١
• المجال = ح
• المدى = [−١ ، ∞[

③

د$_{٣}$(س) = ٢ − د(س − ١)
= ٢ − (س − ١)^{٢}
• المجال = ح
• المدى =]−∞ ، ٢]

④

ر$_{١}$(س) = ر(س − ١)
= (س − ١)^{٣}
• المجال = ح
• المدى = ح

⑤

ر$_{٢}$(س) = ر(س) − $\frac{١}{٢}$
= س^{٣} − $\frac{١}{٢}$
• المجال = ح
• المدى = ح

⑥

ر$_{٣}$(س) = ر(س − ١) + ٢
= (س − ١)^{٣} + ٢
• المجال = ح
• المدى = ح

⑦

ع$_{١}$(س) = ٢ ع(س)
= ٢ |س|
• المجال = ح
• المدى = [٠ ، ∞[

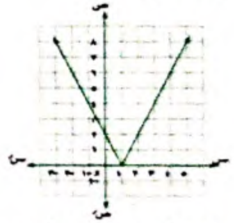
⑧

د٣ (س) = ½ ى (س) − ٣ = ½ |س| − ٣

• المجال = ح

• المدى = [−٣ ، ∞[

⑨

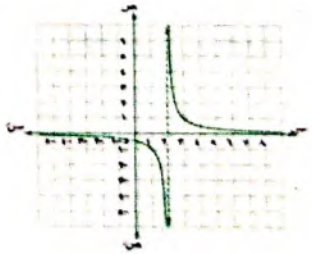


د٤ (س) = ٢ ى (س − ١) = ٢ |س − ١|

• المجال = ح

• المدى = [٠ ، ∞[

⑩

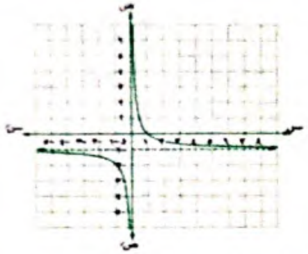


د٥ (س) = ن (س − ٢) = $\frac{١}{س − ٢}$

• المجال = ح − {٢}

• المدى = ح − {٠}

⑪

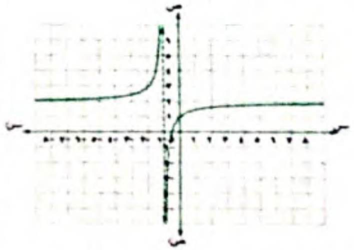


د٢ (س) = ن (س) − ١ = $\frac{١}{س}$ − ١

• المجال = ح − {٠}

• المدى = ح − {−١}

⑫



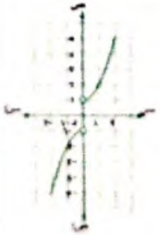
د٣ (س) = ٢ − ن (س + ١) = ٢ − $\frac{١}{س + ١}$

• المجال = ح − {−١}

• المدى = ح − {٢}

٨

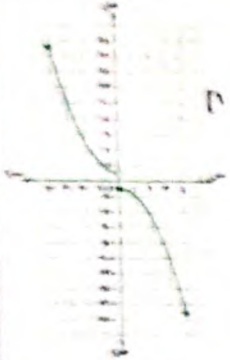
①



• المدى = ح −]−١ ، ١[

• الدالة تزايدية فى ح − {٠}

②



• المدى

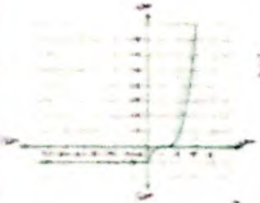
= [−١٧ ، ١٧] −]−١ ، ١[

• الدالة تناقصية

فى]−٤ ، ٠[

،]٠ ، ٤[

③



• المدى = [−١ ، ∞[

• الدالة ثابتة

فى]−∞ ، ٠[

• وتزايدية فى]٠ ، ∞[

④

• المدى = ح

• الدالة تناقصية

فى]−١ ، ∞[

• وتزايدية

فى]−∞ ، −١[

٩

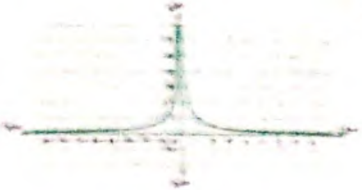
شكل (١) : د (س) = |(س − ٢)^٢ − ٤|

شكل (٢) : ى (س) = |س^٢|

شكل (٣) : ر (س) = $\frac{١}{|س − ٢|}$

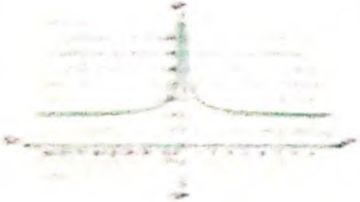
١٠

①

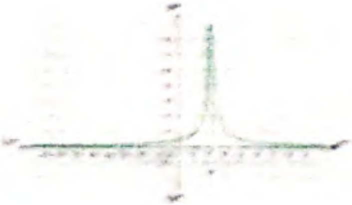


②

③



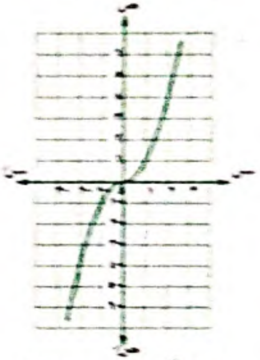
④



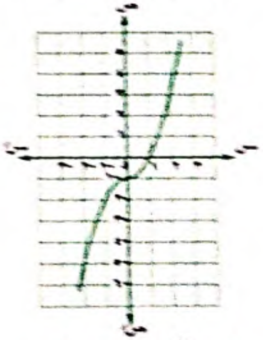
⑤

١١

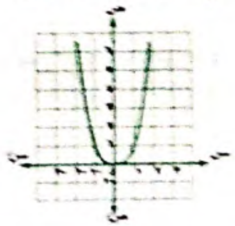
① $د(س) = \begin{cases} س^٢ ، & س \geq ٠ \\ -س^٢ ، & س < ٠ \end{cases}$



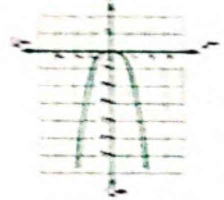
② $د(س) = \begin{cases} س^٢ - ١ ، & س \geq ٠ \\ -س^٢ - ١ ، & س < ٠ \end{cases}$



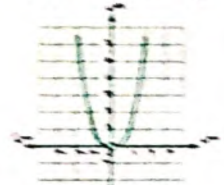
③ $د(س) = \begin{cases} س^٢ ، & س \geq ٠ \\ -س^٢ ، & س < ٠ \end{cases}$



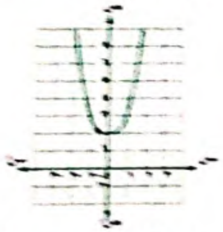
④ $د(س) = \begin{cases} -س^٢ ، & س \geq ٠ \\ س^٢ ، & س < ٠ \end{cases}$



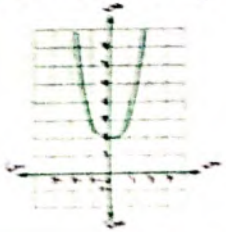
⑤ $د(س) = \begin{cases} س^٢ ، & س > ٠ \\ -س^٢ ، & س < ٠ \end{cases}$



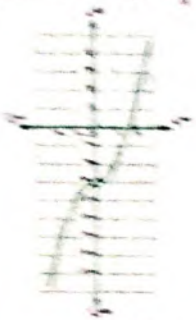
⑥ $د(س) = \begin{cases} س^٢ + ٢ ، & س \geq ٠ \\ -س^٢ + ٢ ، & س < ٠ \end{cases}$



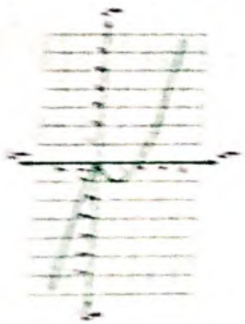
⑦ $د(س) = \begin{cases} س^٢ + ٢ ، & س \geq ٠ \\ -س^٢ + ٢ ، & س < ٠ \end{cases}$



⑧ $د(س) = \begin{cases} س^٢ - ٢ ، & س \geq ٠ \\ -س^٢ - ٢ ، & س < ٠ \end{cases}$



⑨ $د(س) = \begin{cases} س^٢ - ٢س ، & س \geq ٠ \\ -س^٢ + ٢س ، & س < ٠ \end{cases} = \begin{cases} (س - ١)^٢ - ١ ، & س \geq ٠ \\ -(س - ١)^٢ + ١ ، & س < ٠ \end{cases}$



١٢

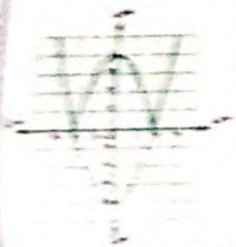
① $د(س) = |س^٢ - ٤|$

• المجال =]-∞ ، ∞[

• الدالة متناقصة

في]-∞ ، -٢] ، [٠ ، ٢]

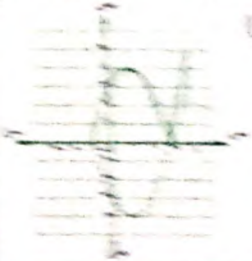
ومتزايدة في [-٢ ، ٠] ، [٢ ، ∞[



② [illegible]

• المجال = [illegible]

• الدالة تزايدية [illegible]



تمارين تقيس مهارات التفكير

[illegible]

④ المنحنى ص = ٣ (س − ٥)^{٢} + ٧ تحت تأثير انتقال ٣ وحدات يمينًا ووحدة لأسفل.

∴ ص = ٣ (س − ٥ − ٣)^{٢} + ٧ − ١

∴ ص = ٣ (س − ٨)^{٢} + ٦

⑤ ∵ (د ∘ د) (س) = د (د (س))

= د (|س| + ٢)

= ||س| + ٢| + ٢

= |س| + ٤

∴ مدى الدالة (د ∘ د) هو [٤ ، ∞[

⑥ ∵ (د ∘ ر) (س) = د (ر (س)) = |$\frac{١}{٢}$س^{٢} − ٨|

∴ مدى الدالة (د ∘ ر) = [٠ ، ∞[

⑦ ∵ | د (س) | هو نفس منحنى د (س) بعد انعكاس الجزء المرسوم اسفل محور السينات لأعلى

أى أن : الدالة | د (س) | تكون زوجية.

⑧ ∵ الدالة متماثلة حول نقطة الأصل.

∴ ر (س) = س^{٣} − ٢

∴ ر تزايدية.

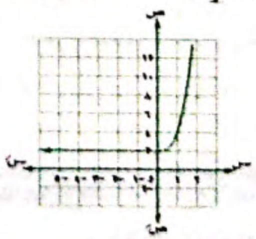
⑨ ∵ الدالة متماثلة حول محور الصادات

∴ ر (س) = − س^{٣} + ٢

٢

① د (س) = { س^{٣} + س^{٣} + ٢ ، س ≥ ٠ / س^{٣} − س^{٣} + ٢ ، س < ٠ }

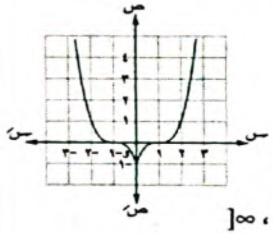
= { ٢ س^{٣} + ٢ ، س ≥ ٠ / ٢ ، س < ٠ }



* المجال = ح
* المدى = [٢ ، ∞[
* الدالة ثابتة فى]− ∞ ، ٠[
، تزايدية فى]٠ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.

② د (س) = { (س − ١)^{٣} ، س ≥ ٠ / (− س − ١)^{٣} ، س < ٠ }

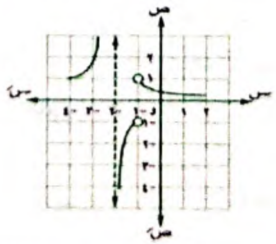
= { (س − ١)^{٣} ، س ≥ ٠ / − (س + ١)^{٣} ، س < ٠ }



* المجال = ح
* المدى = [−١ ، ∞[
* الدالة تناقصية فى]− ∞ ، ٠[
وتزايدية فى]٠ ، ∞[
* الدالة زوجية.

③ د (س) = { $\frac{س + ١}{(س + ٢)(س + ١)}$ ، س > −١ / $\frac{−(س + ١)}{(س + ٢)(س + ١)}$ ، س < −١ ، س ≠ −٢ }

= { $\frac{١}{س + ٢}$ ، س > −١ / −$\frac{١}{س + ٢}$ ، س < −١ ، س ≠ −٢ }



* المجال = ح − {−١ ، −٢}
* المدى = ح − [−١ ، ٠]
* الدالة تزايدية فى كل من :
]− ∞ ، −٢[،]−٢ ، −١[
، وتناقصية فى]−١ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.

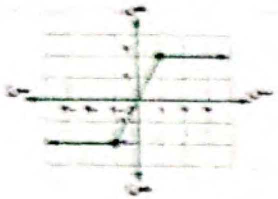
④ د (س) = { − س − ٢ ، س < −٢ / س + ٢ ، −٢ ≤ س ≤ −١ / ١ ، −١ < س < ١ / − س + ٢ ، ١ ≤ س < ٢ / س − ٢ ، س ≥ ٢ }

* المجال = ح
* المدى = [٠ ، ∞[
* الدالة تناقصية فى كل من
]− ∞ ، −٢[،]١ ، ٢[
، وتزايدية فى كل من]−٢ ، −١[،]٢ ، ∞[
، وثابتة فى]−١ ، ١[
* الدالة زوجية.

⑤ د (س) = |س + ١| − |س − ١|

= { ٢ ، س > ١ / ٢ س ، −١ ≤ س ≤ ١ / −٢ ، س < −١ }

− س − ١	س + ١	س + ١
− س + ١	− س + ١	س − ١
−٢	٢ س	٢



* المجال = ح
* المدى = [−٢ ، ٢]
* الدالة ثابتة فى كل من]− ∞ ، −١[
،]١ ، ∞[
وتزايدية فى]−١ ، ١[
* الدالة فردية.

إجابات تمارين 6

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

① (ب)	② (جـ)	③ (جـ)	④ (أ)
⑤ (جـ)	⑥ (جـ)	⑦ (جـ)	⑧ (ب)
⑨ (ب)	⑩ (د)	⑪ (أ)	⑫ (ب)
⑬ (جـ)	⑭ (ب)	⑮ (جـ)	⑯ (جـ)
⑰ (د)	⑱ (أ)	⑲ (ب)	⑳ (ب)
㉑ (جـ)	㉒ (جـ)	㉓ (ب)	㉔ (د)
㉕ (د)	㉖ (د)	㉗ (ب)	㉘ (جـ)
㉙ (جـ)	㉚ (ب)	㉛ (د)	㉜ (د)
㉝ (د)	㉞ (ب)	㉟ (ب)	㊱ (جـ)
㊲ (جـ)	㊳ (أ)	㊴ (ب)	㊵ (ب)
㊶ (أ)	㊷ (ب)	㊸ (جـ)	㊹ (جـ)
㊺ (د)	㊻ (د)		

ثانيا الأسئلة المقالية

تمارين على حل معادلات القيمة المطلقة

١

(١) ٤ |س| = ٢٠ ∴ |س| = ٥

∴ س = ± ٥ ∴ مجموعة الحل = {٥ ، -٥}

(٢) |٢ س - ٣| = ٧ ∴ ٢ س - ٣ = ± ٧

∴ ٢ س - ٣ = ٧ ومنها ٢ س = ١٠

∴ س = ٥

أ، ٢ س - ٣ = -٧ ومنها ٢ س = -٤

∴ س = -٢

∴ مجموعة الحل = {٥ ، -٢}

(٣) |س + ٢| = ١ ∴ س + ٢ = ± ١

∴ س = -١ أ، س = -٣

∴ مجموعة الحل = {-١ ، -٣}

(٤) ٣ |س| = ٣ ∴ |س| = ١

∴ س = ± ١

∴ مجموعة الحل = {١ ، -١}

(٥) عندما س ≤ ٢ : ∴ س - ٢ = ٣ س - ٤

∴ ٢ س = ٢ ∴ س = ١ ∉ [٢ ، ∞[

عندما س < ٢ : ∴ - س + ٢ = ٣ س - ٤

∴ ٤ س = ٦ ∴ س = $\frac{٣}{٢}$ ∈]-∞ ، ٢[

∴ مجموعة الحل = {$\frac{٣}{٢}$}

(٦) عندما س ≤ -٢ : ∴ س + ٢ = س - ١ (مرفوض)

عندما س < -٢ : ∴ - س - ٢ = س - ١

∴ ٢ س = -١ ∴ س = - $\frac{١}{٢}$ ∉]-∞ ، -٢[

∴ مجموعة الحل = ∅

(٧) عندما س ≤ -٢ : ∴ س + ٢ = - س + ٢

∴ ٢ س = ٠ ∴ س = ٠ ∈ [-٢ ، ∞[

عندما س < -٢ :

∴ - س - ٢ = - س + ٢ (مرفوض)

∴ مجموعة الحل = {٠}

(٨) ∵ ٢ |س| = ٥ س - ٢١

عندما س ≤ ٠ : ∴ ٢ س = ٥ س - ٢١

∴ ٣ س = ٢١ ∴ س = ٧ ∈ [٠ ، ∞[

عندما س < ٠ : ∴ - ٢ س = ٥ س - ٢١

∴ ٧ س = ٢١ ∴ س = ٣ ∉]-∞ ، ٠[

∴ مجموعة الحل = {٧}

(٩) |س + ٥| = |س - ٣|

∴ س + ٥ = ± (س - ٣)

∴ س + ٥ = س - ٣ (مرفوض)

أ، س + ٥ = - س + ٣ ∴ ٢ س = -٢

∴ س = -١ (تحقق) ∴ مجموعة الحل = {-١}

(١٠) ∵ |٢ (س - ٣)| = |س - ٣|

∴ ٢ |س - ٣| = |س - ٣|

∴ |س - ٣| = ٠ ∴ س - ٣ = ٠

∴ س = ٣ ∴ مجموعة الحل = {٣}

(١١) |س - ١| = ٢ |س - ٢|

∴ س - ١ = ± ٢ (س - ٢)

∴ س - ١ = ٢ س - ٤ ∴ س = ٣ (تحقق)

أ، س - ١ = -٢ س + ٤ ∴ ٣ س = ٥

∴ س = $\frac{٥}{٣}$ (تحقق)

∴ مجموعة الحل = {٣ ، $\frac{٥}{٣}$}

(١٢) عندما س ≤ ٠ : ∴ س² - ٥ س + ٦ = ٠

∴ (س - ٢) (س - ٣) = ٠

∴ س = ٢ ∈ [٠ ، ∞[أ، س = ٣ ∈ [٠ ، ∞[

عندما س < ٠ : ∴ س² + ٥ س + ٦ = ٠

∴ (س + ٢) (س + ٣) = ٠

∴ س = -٢ ∈]-∞ ، ٠[

أ، س = -٣ ∈]-∞ ، ٠[

∴ مجموعة الحل = {٢ ، ٣ ، -٢ ، -٣}

(١٣) ∵ √س² - ٢ س = ٦

∴ |س| - ٢ س = ٦

عندما س ≤ ٠ : ∴ س - ٢ س = ٦

∴ س = -٦ ∉ [٠ ، ∞[

عندما س < ٠ : ∴ - س - ٢ س = ٦

∴ ٣ س = -٦ ∴ س = -٢ ∈]-∞ ، ٠[

∴ مجموعة الحل = {-٢}

(١٤) ∵ √(س² - ٤ س + ٤) = ٤

∴ √((س - ٢)²) = ٤ ∴ |س - ٢| = ٤

∴ س - ٢ = ± ٤

∴ س - ٢ = ٤ ∴ س = ٦

أ، س - ٢ = -٤ ∴ س = -٢

∴ مجموعة الحل = {-٢ ، ٦}

(١٥) |س| + س = ٠

عندما س ≤ ٠ : ∴ س + س = ٠

∴ ٢ س = ٠ ∴ س = ٠ ∈ [٠ ، ∞[

عندما س < ٠ ∴ - س + س = صفر

∴ صفر = صفر وذلك متحقق لجميع قيم س < ٠

∴ مجموعة الحل =]-∞ ، ٠]

(١٦) عندما س ≤ -٣ : س + ٣ + ٢ س = ٠

∴ ٣ س = -٣ ∴ س = -١ ∈ [-٣ ، ∞[

عندما س < -٣ ∴ - س - ٣ + ٢ س = ٠

∴ س = ٣ ∉]-∞ ، -٣[

∴ مجموعة الحل = {-١}

(١٧) ∴ √(س² - ٦ س + ٩) + ٢ س = ٩

∴ √((س - ٣)²) + ٢ س = ٩

∴ |س - ٣| + ٢ س = ٩

عندما س ≤ ٣ ∴ س - ٣ + ٢ س = ٩

∴ ٣ س = ١٢ ∴ س = ٤ ∈ [٣ ، ∞[

عندما س < ٣ ∴ - س + ٣ + ٢ س = ٩

∴ س = ٦ ∉]-∞ ، ٣[

∴ مجموعة الحل = {٤}

(١٨) |س - ٣| (|س - ٣| - ١) = ٠

∴ |س - ٣| = ٠ ومنها س = ٣

أ، |س - ٣| - ١ = ٠ ∴ |س - ٣| = ١

∴ س - ٣ = ± ١ ومنها س = ٢ أ، س = ٤

∴ مجموعة الحل = {٣ ، ٢ ، ٤}

(١٩) ∵ ٥ |س - ٣| - ٢ √((س - ٣)²) = ١٢

∴ ٥ |س - ٣| - ٢ |س - ٣| = ١٢

∴ ٣ |س - ٣| = ١٢ ∴ |س - ٣| = ٤

∴ س - ٣ = ± ٤ ومنها س = ٧ أ، س = -١

∴ مجموعة الحل = {٧ ، -١}

(٢٠) |س - ١| |س + ١| = |س - ١|

∴ |س - ١| (|س + ١| - ١) = ٠

∴ |س - ١| = ٠ ومنها س = ١

أ، |س + ١| - ١ = ٠ ∴ |س + ١| = ١

∴ س + ١ = ± ١

ومنها س = ٠ أ، س = −٢

∴ مجموعة الحل = {١ ، ٠ ، −٢}

(٢١) |س^{٢} − ١| = ٢٦ ∴ س^{٢} − ١ = ± ٢٦

∴ س^{٢} = −٢٥ (مرفوض) أ، س^{٢} = ٢٧

ومنها س = ± ٣ $\sqrt{٣}$

∴ مجموعة الحل = {٣ $\sqrt{٣}$ ، −٣ $\sqrt{٣}$}

(٢٢) (|س + ١| + ٢) (|س + ١| − ٥) = ٠

∴ |س + ١| + ٢ = ٠

∴ |س + ١| = −٢ (مرفوض)

أ، |س + ١| − ٥ = ٠   ∴ |س + ١| = ٥

∴ س + ١ = ± ٥ ومنها س = ٤ أ، س = −٦

∴ مجموعة الحل = {٤ ، −٦}

(٢٣) |س − ٥|^{٢} = ٢ |س − ٥|

∴ |س − ٥| (|س − ٥| − ٢) = ٠

∴ |س − ٥| = ٠ ومنها س = ٥

أ، |س − ٥| − ٢ = ٠   ∴ |س − ٥| = ٢

ومنها س − ٥ = ± ٢

∴ س = ٧ أ، س = ٣

∴ مجموعة الحل = {٥ ، ٧ ، ٣}

(٢٤) ∵ س |س| − س = ٠

∴ س (|س| − ١) = ٠

∴ س = ٠ أ، |س| − ١ = ٠

∴ |س| = ١   ∴ س = ± ١

∴ مجموعة الحل = {٠ ، ١ ، −١}

(٢٥) س |س − ٥| − ٦ = ٠

عندما س ≥ ٥ : ∴ س^{٢} − ٥ س − ٦ = ٠

∴ (س − ٦) (س + ١) = ٠

∴ س = ٦ ∈ [٥ ، ∞[أ، س = −١ ∉ [٥ ، ∞[

عندما س < ٥ : −س^{٢} + ٥ س − ٦ = ٠

∴ س^{٢} − ٥ س + ٦ = ٠

∴ (س − ٢) (س − ٣) = ٠

∴ س = ٢ ∈]−∞ ، ٥[

أ، س = ٣ ∈]−∞ ، ٥[

∴ مجموعة الحل = {٦ ، ٢ ، ٣}

(٢٦) س^{٢} + س − ١٠ = ± ١٠

∴ س^{٢} + س − ١٠ = −١٠

∴ س^{٢} + س = ٠   ∴ س (س + ١) = ٠

∴ س = ٠ أ، س = −١

أ، س^{٢} + س − ١٠ = ١٠

∴ س^{٢} + س − ٢٠ = ٠

∴ (س + ٥) (س − ٤) = ٠

∴ س = −٥ أ، س = ٤

∴ مجموعة الحل = {٠ ، −١ ، −٥ ، ٤}

(٢٧) س |س − ٢| = ٤ س − ٨

عندما س > ٢ : ∴ س (س − ٢) = ٤ س − ٨

∴ س^{٢} − ٢ س − ٤ س + ٨ = ٠

∴ س^{٢} − ٦ س + ٨ = ٠

∴ (س − ٢) (س − ٤) = ٠

∴ س = ٢ ∉]٢ ، ∞[

أ، س = ٤ ∈]٢ ، ∞[

عندما س < ٢ : ∴ س (−س + ٢) = ٤ س − ٨

∴ −س^{٢} + ٢ س = ٤ س − ٨

∴ س^{٢} + ٢ س − ٨ = ٠

∴ (س + ٤) (س − ٢) = ٠

∴ س = −٤ ∈]−∞ ، ٢[

أ، س = ٢ ∉]−∞ ، ٢[

∴ مجموعة الحل = {٤ ، −٤}

(٢٨) س^{٢} |س| = ٨ س

عندما س ≥ ٠ : ∴ س^{٢} × س = ٨ س

∴ س^{٤} − ٨ س = ٠

∴ س (س^{٣} − ٨) = ٠

∴ س = ٠ ∈ [٠ ، ∞[

أ، س^{٣} − ٨ = ٠   ∴ س^{٣} = ٨

∴ س = ٢ ∈ [٠ ، ∞[

عندما س < ٠ : ∴ س^{٢} × −س = ٨ س

∴ س^{٤} + ٨ س = ٠

∴ س (س^{٣} + ٨) = ٠

∴ س = ٠ ∉]−∞ ، ٠[

أ، س^{٣} + ٨ = ٠

∴ س^{٣} = −٨

∴ س = −٢ ∈]−∞ ، ٠[

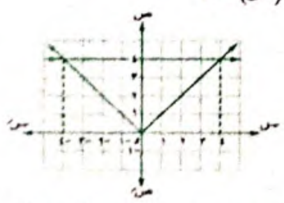
∴ مجموعة الحل = {−٢ ، ٠ ، ٢}

٢

* تم الحل بيانيًا وعليك التحقق جبريًا بنفسك.
* نرسم منحنيي الدالتين د (س) ، ر (س) فتكون الإحداثيات السينية لنقط تقاطع المنحنيين هى مجموعة حل المعادلة.

(١) ∵ |س| = ٤   ∴ د (س) = |س|

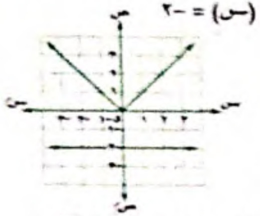
، ر (س) = ٤



من الرسم : مجموعة الحل = {٤ ، −٤}

(٢) ∵ |س| = −٢   ∴ د (س) = |س|

، ر (س) = −٢



من الرسم : مجموعة الحل = ∅

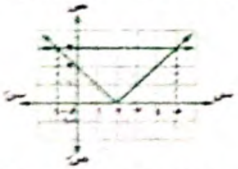
(٣) ∵ |س + ٢| = ٢   ∴ د (س) = |س + ٢|

، ر (س) = ٢

من الرسم : مجموعة الحل = {٠ ، −٤}

(٤) ∵ $\sqrt{(س − ٢)^{٢}}$ = ٣   ∴ |س − ٢| = ٣

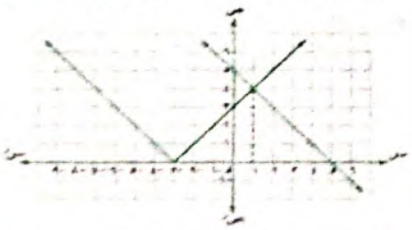
∴ د (س) = |س − ٢| ، ر (س) = ٣



من الرسم : مجموعة الحل = {٥ ، −١}

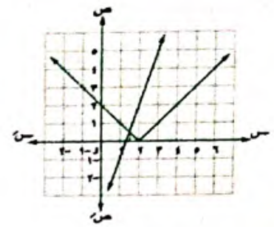
(٥) ∵ |س + ٣| = ٥ − س

∴ د (س) = |س + ٣| ، ر (س) = ٥ − س



من الرسم مجموعة الحل = {١}

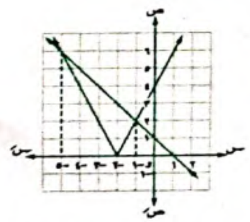
⑥ د (س) = |س − ٢| ، ر (س) = ٣ س − ٤



من الرسم : مجموعة الحل = {$١\frac{١}{٢}$}

⑦ د (س) = ٢ |س + ٢|

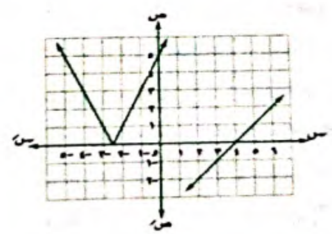
، ر (س) = ١ − س



من الرسم : مجموعة الحل = {−١ ، −٥}

⑧ د (س) = ٢ |س + $\frac{٥}{٢}$|

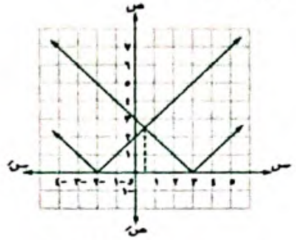
، ر (س) = س − ٤



من الرسم : مجموعة الحل = ∅

⑨ د (س) = |س + ٢|

، ر (س) = |س − ٢|

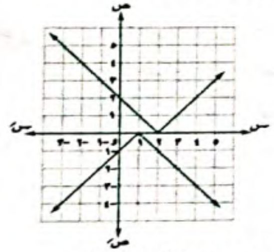


من الرسم : مجموعة الحل = {$\frac{١}{٢}$}

⑩ ∵ |س − ٢| = −|س − ١|

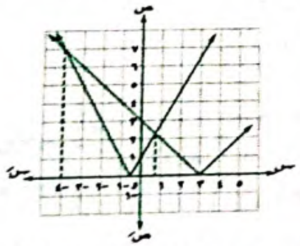
∴ د (س) = |س − ٢|

، ر (س) = −|س − ١|



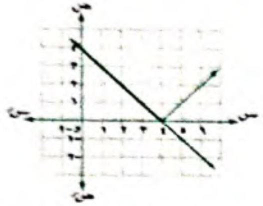
من الرسم : مجموعة الحل = ∅

⑪ د (س) = |س − ٣| ، ر (س) = |٢ س + ١|



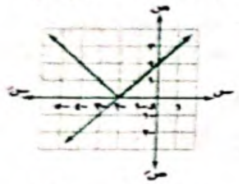
من الرسم : مجموعة الحل = {−٤ ، $\frac{٢}{٣}$}

⑫ د (س) = |س − ٤| ، ر (س) = ٤ − س



من الرسم : مجموعة الحل =]−∞ ، ٤]

⑬ د (س) = |س + ٢| ، ر (س) = س + ٢

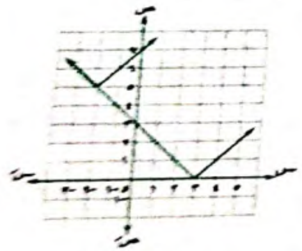


من الرسم : مجموعة الحل = [−٢ ، ∞[

⑭ ∵ |س − ٣| = |س + ٢| + ٥

∴ د (س) = |س − ٣|

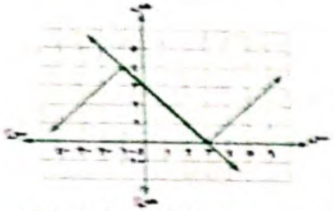
، ر (س) = |س + ٢| + ٥



من الرسم : مجموعة الحل =]−∞ ، −٢]

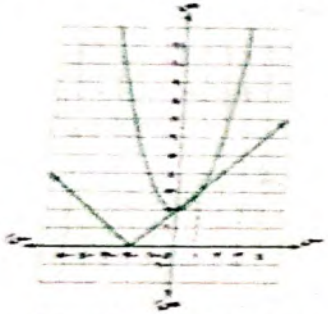
⑮ د (س) = |س − ٣|

، ر (س) = ٤ − |س + ١|



من الرسم : مجموعة الحل = [−١ ، ٣]

⑯ د (س) = |س + ٢| ، ر (س) = س^{٢} + ٢



من الرسم : مجموعة الحل = {٠ ، −١}

٣

د (−س) = $\frac{١٢}{|−س| + ٢}$ = $\frac{١٢}{|س| + ٢}$ = د (س)

∴ الدالة زوجية

∵ د (س) = ٢   ∴ $\frac{١٢}{|س| + ٢}$ = ٢

∴ |س| + ٢ = ٦   ∴ |س| = ٤

∴ س = ± ٤   ∴ مجموعة الحل = {−٤ ، ٤}

٤

د (س) = ٢ |س + $\frac{٥}{٢}$| − ٣

من الرسم

• المدى = [−٣ ، ∞[

* الدالة تناقصية فى]- ∞ ، - $\frac{٥}{٢}$]

، وتزايدية فى]- $\frac{٥}{٢}$ ، ∞[

* مجموعة الحل = {-١ ، -٤}

الحل الجبرى : ∵ | ٢ س + ٥ | = ٣

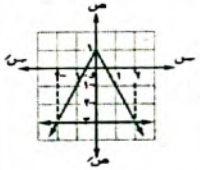
∴ ٢ س + ٥ = ± ٣

∴ ٢ س + ٥ = ٣ ومنها س = -١

أ، ٢ س + ٥ = -٣ ومنها س = -٤

٥

من الرسم :



* المدى =]- ∞ ، ١]

* الدالة تزايدية فى]- ∞ ، ٠]

، وتناقصية فى [٠ ، ∞[

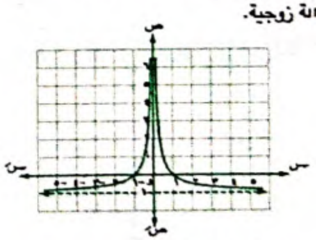
* الدالة زوجية لأنها متماثلة حول محور الصادات.

* مجموعة الحل = {-٢ ، ٢} ويمكنك التحقق منها جبريًا.

٦

د (- س) = $\frac{١ - |- س|}{|- س|}$ = $\frac{١ - |س|}{|س|}$ = د (س)

∴ الدالة زوجية.



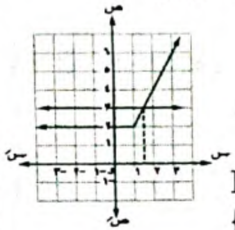
∴ د (س) = $\frac{١ - |س|}{|س|}$ = $\frac{١}{|س|}$ - ١

من الرسم : مجموعة الحل = {-١ ، ١}

٧

د (س) = { ٢ س ، س ≥ ١ ؛ ٢ ، س < ١ }

من الرسم :



* المدى = [٢ ، ∞[

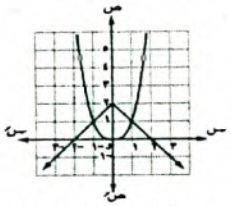
* الدالة ثابتة فى]- ∞ ، ١]

، وتزايدية فى]١ ، ∞[

* مجموعة الحل = { $\frac{٣}{٢}$ }

٨

د (س) = { س٢ ، س ≥ ٠ ؛ - س٢ ، س < ٠ }



من الرسم : مجموعة الحل = {-١ ، ١}

تمارين على حل متباينات القيمة المطلقة

٩

① -٥ ≤ س - ٣ ≤ ٥

∴ -٢ ≤ س ≤ ٨

∴ مجموعة الحل = [-٢ ، ٨]

② س - ٣ ≥ ٥ ومنها س ≥ ٨

أ، س - ٣ ≤ -٥ ومنها س ≤ -٢

∴ مجموعة الحل = ح -]-٢ ، ٨[

③ ٢ س + ٥ > ٣ ومنها س > - ١

أ، ٢ س + ٥ < - ٣ ومنها س < - ٤

مجموعة الحل = ح - [-٤ ، -١]

④ ∴ | س - ٣ | < ٧ ∴ -٧ < س - ٣ < ٧

∴ - ٤ < س < ١٠

∴ مجموعة الحل =]-٤ ، ١٠[

⑤ - ١ ≤ $\frac{س - ٣}{٤}$ ≤ ١

∴ - ٤ ≤ س - ٣ ≤ ٤ ∴ - ١ ≤ س ≤ ٧

∴ مجموعة الحل = [-١ ، ٧]

⑥ | ٣ س + ٢ | < - ١ ∴ مجموعة الحل = ∅

⑦ ∵ $\frac{١}{|٢ س - ٥|}$ ≥ ٣ ∴ | ٢ س - ٥ | ≤ $\frac{١}{٣}$

∴ - $\frac{١}{٣}$ ≤ ٢ س - ٥ ≤ $\frac{١}{٣}$

∴ ٤ $\frac{٢}{٣}$ ≤ ٢ س ≤ ٥ $\frac{١}{٣}$ ∴ $\frac{٧}{٣}$ ≤ س ≤ $\frac{٨}{٣}$

، ∵ | ٢ س - ٥ | = ٠ عندما س = $\frac{٥}{٢}$

∴ مجموعة الحل = [$\frac{٧}{٣}$ ، $\frac{٨}{٣}$] - { $\frac{٥}{٢}$ }

⑧ ∵ $\frac{١}{|٣ س|}$ ≥ ٥ ∴ | ٣ س | ≤ $\frac{١}{٥}$

∴ $\frac{-١}{٥}$ ≤ ٣ س ≤ $\frac{١}{٥}$ ∴ $\frac{-١}{١٥}$ ≤ س ≤ $\frac{١}{١٥}$

، ∵ | ٣ س | = ٠ عندما س = ٠

∴ مجموعة الحل = [$\frac{-١}{١٥}$ ، $\frac{١}{١٥}$] - {٠}

⑨ ∵ $\frac{١}{|٢ س - ٣|}$ > ٢ ∴ | ٢ س - ٣ | < $\frac{١}{٢}$

∴ - $\frac{١}{٢}$ < ٢ س - ٣ < $\frac{١}{٢}$

∴ $\frac{٥}{٢}$ < ٢ س < $\frac{٧}{٢}$ ∴ $\frac{٥}{٤}$ < س < $\frac{٧}{٤}$

، ∵ | ٢ س - ٣ | = ٠ عندما س = $\frac{٣}{٢}$

∴ مجموعة الحل =] $\frac{٥}{٤}$ ، $\frac{٧}{٤}$ [- { $\frac{٣}{٢}$ }

⑩ | ٢ س - ٣ | > ٤

∴ ٢ س - ٣ > ٤ ومنها س > $\frac{٧}{٢}$

أ، ٢ س - ٣ < - ٤ ومنها س < $\frac{-١}{٢}$

∴ مجموعة الحل = ح - [- $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٧}{٢}$]

⑪ ∵ $\sqrt{(س - ١)^٢}$ ≥ ٤ ∴ | س - ١ | ≥ ٤

∴ س - ١ ≥ ٤ ومنها س ≥ ٥

أ، س - ١ ≤ - ٤ ومنها س ≤ - ٣

∴ مجموعة الحل = ح -]-٣ ، ٥[

⑫ ∵ $\sqrt{(٢ س - ٣)^٢}$ ≤ ٩ ∴ | ٢ س - ٣ | ≤ ٩

∴ - ٩ ≤ ٢ س - ٣ ≤ ٩

∴ -٦ ≤ ٢ س ≤ ١٢ ∴ - ٣ ≤ س ≤ ٦

∴ مجموعة الحل = [-٣ ، ٦]

⑬ ٢ | س - ٢ | < ٦ ∴ | س - ٢ | < ٣

∴ - ٣ < س - ٢ < ٣ ∴ - ١ < س < ٥

∴ مجموعة الحل =]-١ ، ٥[

⑭ | ٣ س - ٢ | + ٢ × ٢ | ٣ س - ٢ | ≥ ٢٠

∴ ٥ | ٣ س - ٢ | ≥ ٢٠

∴ | ٣ س - ٢ | ≥ ٤

∴ ٣ س - ٢ ≥ ٤ ومنها س ≥ ٢

أ، ٣ س - ٢ ≤ - ٤ ومنها س ≤ - $\frac{٢}{٣}$

∴ مجموعة الحل = ح -] - $\frac{٢}{٣}$ ، ٢ [

⑮ | س + ٢ | + ٢ | س + ٢ | ≥ ٦

∴ ٣ | س + ٢ | ≥ ٦ ∴ | س + ٢ | ≥ ٢

∴ س + ٢ ≥ ٢ ومنها س ≥ ٠

أ، س + ٢ ≤ - ٢ ومنها س ≤ - ٤

∴ مجموعة الحل = ح -]-٤ ، ٠[

١٠

①]-٤ ، ٠[

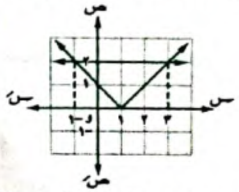
② ح - [-١ ، ٥]

③ [-٥ ، -١]

١١

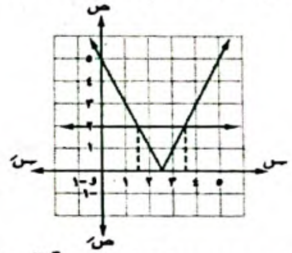
تم الحل بيانيًا وعليك التحقق جبريًا بنفسك

① د (س) = |س − ١| ، ر (س) = ٢



من الرسم : مجموعة الحل =]−١ ، ٣[

② د (س) = ٢ |س − ٥/٢| ، ر (س) = ٢



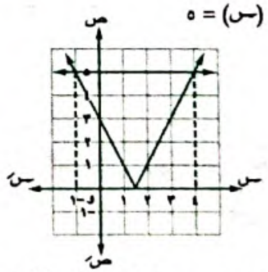
من الرسم : مجموعة الحل = ح −]٣/٢ ، ٧/٢[

③ ∵ √(٤س² − ١٢س + ٩) = √((٢س − ٣)²)

= |٢س −٣|

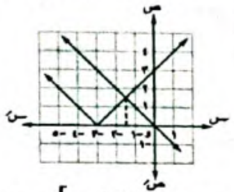
∴ د (س) = |٢س − ٣| = ٢ |س − ٣/٢|

، ر (س) = ٥



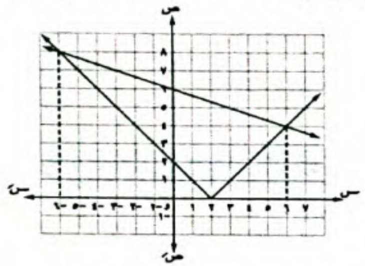
من الرسم : مجموعة الحل = ح − [−١ ، ٤]

④ د (س) = |س + ٣| ، ر (س) = − س



من الرسم : مجموعة الحل =]−∞ ، − ٣/٢[

⑤ د (س) = |س − ٢| ، ر (س) = −١/٢ س + ٦

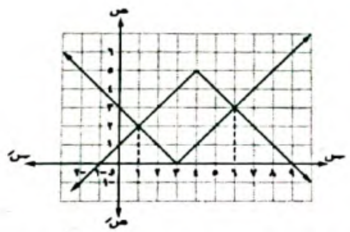


من الرسم : مجموعة الحل =]−٦ ، ٦[

⑥ ∵ |س − ٣| > ٥ − |س − ٤|

∴ د (س) = |س − ٣|

، ر (س) = ٥ − |س − ٤|



من الرسم : مجموعة الحل = ح − [١ ، ٦]

١٢

① ∵ − ٤ ≤ س ≤ ٤ ∴ |س| ≤ ٤

② ∵ ٠ < س < ٦ بإضافة (−٣) إلى أطراف المتباينة.

∴ − ٣ < س − ٣ < ٣ ∴ |س − ٣| < ٣

③ ∵ س ≤ − ٢ أ، س ≥ ٢ ∴ |س| ≥ ٢

④ ∵ س ∈ ح − [−٢ ، ٦]

∴ س > ٦ ، س < −٢

وبإضافة (−٢) إلى أطراف المتباينة

∴ س − ٢ > ٤ ، س − ٢ < − ٤

∴ |س − ٢| > ٤

١٣

① نفرض أن درجة الطالب = س درجة

∴ ٦٠ < س < ١٠٠

وبإضافة (− ٨٠) إلى أطراف المتباينة

∴ −٢٠ < س − ٨٠ < ٢٠

∴ |س − ٨٠| < ٢٠

② نفرض أن درجة الحرارة = س درجة

∴ ٣٥ < س < ٤٢

وبإضافة (− ٣٨,٥) إلى أطراف المتباينة

∴ − ٣,٥ < س − ٣٨,٥ < ٣,٥

∴ |س − ٣٨,٥| < ٣,٥

③ نفرض أن العمق الذى تعيش فيه الطحالب الخضراء = س مترًا

∴ ٠ ≤ س ≤ ٣٠

وبإضافة (−١٥) إلى أطراف المتباينة

∴ −١٥ ≤ س − ١٥ ≤ ١٥

∴ |س − ١٥| ≤ ١٥

تمارين متنوعة

١٤

① بوضع |س| − ١ = ٠ ∴ |س| = ١

∴ س = ± ١

∴ المجال = ح − {١ ، −١}

② بوضع |س| + ١ = ٠ ∴ |س| = −١ (تعارض)

∴ المجال = ح

③ بوضع |س − ٢| − ٥ = ٠

∴ |س − ٢| = ٥

∴ س − ٢ = ٥ ومنها س = ٧

أ، س − ٢ = −٥ ومنها س = −٣

∴ المجال = ح − {٧ ، −٣}

④ بوضع ٥ − |س| ≥ ٠ ∴ |س| ≤ ٥

∴ −٥ ≤ س ≤ ٥ ∴ المجال = [−٥ ، ٥]

⑤ بوضع |س| − ٥ ≥ ٠ ∴ |س| ≥ ٥

∴ س ≥ ٥ أ، س ≤ −٥

∴ المجال = ح −]−٥ ، ٥[

⑥ بوضع ٥ − |س| > ٠ ∴ |س| < ٥

∴ −٥ < س < ٥ ∴ المجال =]−٥ ، ٥[

١٥

① د (−س) = −س |−س| = −س |س|

= − د (س) ∴ الدالة فردية.

② د (−س) = (−س)² |−س| − ١

= س² |س| − ١ = د (س) ∴ الدالة زوجية.

③ د (−س) = (|١ − س| + |١ + س|) / (|١ − س| − |١ + س|) = − د (س)

∴ الدالة فردية

④ د (– س) = ((– س)^٢ جتا (– ٢ س)) / (٥ + | –٢ س |)

= (س^٢ جتا ٢ س) / (٥ + | ٢ س |) = د (س)

∴ الدالة زوجية.

⑤ د (– س)

= ٢ | – س | طا (– س) + ٢ (– س) | طا (– س) |

= ٢ | س | (– طا س) – ٢ س | – طا س |

= –٢ | س | طا س – ٢ س | طا س |

= – د (س) ∴ الدالة فردية.

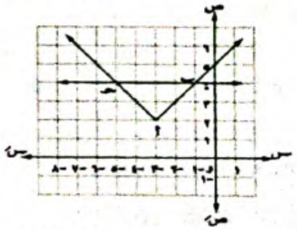
⑥ د (– س) = √(| – س | + (– س)) = √(| س | – س)

≠ د (س) ≠ – د (س)

∴ الدالة ليست زوجية وليست فردية.

١٦

① د (س) = | س + ٣ | + ٢ ، ر (س) = ٤

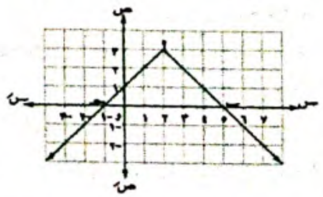


∴ مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين د ، ر

= مساحة سطح المثلث أ ب حـ = ١/٢ × ٤ × ٢

= ٤ وحدة مربعة.

② د (س) = – | س – ٢ | + ٣ ، ر (س) = صفر



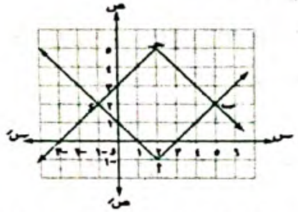
∴ مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين د ، ر

= مساحة سطح المثلث أ ب حـ

= ١/٢ × ٦ × ٣ = ٩ وحدة مربعة.

③ د (س) = | س – ٢ | – ١

، ر (س) = ٥ – | س – ٢ |



∴ مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين د ، ر

= مساحة سطح المربع أ ب حـ ء = ١/٢ (ب ء)^٢

= ١/٢ × ٦^٢ = ١٨ وحدة مربعة.

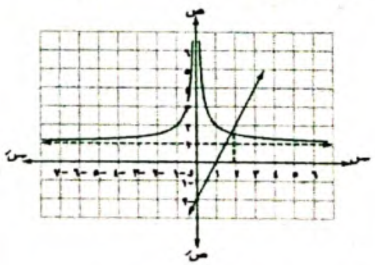
١٧

د (– س) = (| – س | + ١) / | – س | = (| س | + ١) / | س | = د (س)

∴ الدالة زوجية. ∵ د (س) = (| س | + ١) / | س | = ١ + ١ / | س |

بيانيًا :

ويوضع ر (س) = ٢ س – ٢



من الرسم : س ≃ ١,٨

∴ مجموعة الحل = {١,٨}

جبريًا : ∵ د (س) = { ١/س + ١ ، س > ٠ ؛ –١/س + ١ ، س < ٠ }

عندما س > ٠ : ∴ ١/س + ١ = ٢ س – ٢

∴ ١/س = ٢ س – ٣ (بالضرب فى س)

∴ ١ = ٢ س^٢ – ٣ س

∴ ٢ س^٢ – ٣ س – ١ = ٠

∴ س = (٣ ± √(٩ – ٤ × ٢ × –١)) / (٢ × ٢) = (٣ ± √١٧) / ٤

∴ س ≃ ١,٨ ∈]٠ ، ∞[

أ، س ≃ –٠,٣ ∉]٠ ، ∞[

عندما س < ٠ : ∴ –١/س + ١ = ٢ س – ٢

∴ –١/س = ٢ س – ٣ (بالضرب فى س)

∴ –١ = ٢ س^٢ – ٣ س

∴ ٢ س^٢ – ٣ س + ١ = ٠

∴ (٢ س – ١) (س – ١) = ٠

∴ س = ١/٢ ∉]–∞ ، ٠[

أ، س = ١ ∉]–∞ ، ٠[

∴ مجموعة الحل = {١,٨}

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١

① (د) ② (د) ③ (جـ) ④ (جـ) ⑤ (د)

⑥ (أ) ⑦ (أ) ⑧ (جـ) ⑨ (ب)

إرشادات لحل رقم ١

① ∵ | س + ١ |^٢ + | ٢ س + ٣ | = ٠

∴ س + ١ = ٠ ومنها س = –١

وفى نفس الوقت يكون ٢ س + ٣ = ٠ ومنها س = –٣/٢

وهذا تعارض.

∴ مجموعة الحل = ∅

② ∵ | (س – ١) (س – ٢) | = | س – ٢ |

∴ | س – ٢ | | س – ١ | – | س – ٢ | = ٠

∴ | س – ٢ | (| س – ١ | – ١) = ٠

∴ | س – ٢ | = ٠ ومنها س = ٢

أ، | س – ١ | = ١

∴ س – ١ = ± ١ ومنها س = ٠ أ، ٢

∴ مجموعة الحل = {٠ ، ٢ ، ٢}

③ ∵ | س | + | ص | ≥ | س + ص |

∴ (| س | + | ص |) / | س + ص | ≥ ١

∴ أصغر قيمة للمقدار (| س | + | ص |) / | س + ص | هى ١

④ ∵ ٣٢ < ٦١ < ٦٤

∴ ٢^٥ < ٢^س < ٢^٦ ∴ ٥ < س < ٦

∴ | س – ٦ | = – س + ٦

، | س – ٥ | = س – ٥

∴ | س – ٦ | + | س – ٥ |

= – س + ٦ + س – ٥ = ١

⑤ ∵ أ^٢ ب > ٠ ∴ ب موجبة.

، ∵ أ/ب < ٠ ∴ أ سالبة.

∴ √(أ^٢) = | أ | = – أ ، √(ب^٢) = | ب | = ب

∴ √(أ^٢) + √(ب^٢) – (ب – أ)

= – أ + ب – ب + أ = صفر

⑥ ∵ –٤ ≤ س ≤ ٦

∴ –١٦ ≤ ٤ س ≤ ٢٤

∴ –٢٤ ≤ ٤ س – ٨ ≤ ١٦

∴ ٠ ≤ | ٤ س – ٨ | ≤ ٢٤

∴ أ = صفر ، ب = ٢٤

∴ أ + ب = ٢٤

⑦ ∵ س^{٢} − ٣ |س| − ١٠ = ٠
∴ |س|^{٢} − ٣ |س| − ١٠ = ٠
(|س| − ٥) (|س| + ٢) = ٠
∴ |س| = ٥ ومنها س = ± ٥
أ، |س| = −٢ (مرفوض)
∴ جذرا المعادلة هما ± ٥
∴ حاصل ضرب جذرى المعادلة يساوى − ٢٥

⑧ ∵ ٣ < |س| < ٨ ∴ ٣ < س < ٨
∴ س = ٤ أ، ٥ أ، ٦ أ، ٧
أ، −٨ < س < −٣
∴ س = −٤ أ، −٥ أ، −٦ أ، −٧
∴ عدد قيم س الصحيحة هو ٨

⑨ ∵ (ر ∘ د) (س) = ٣
∴ ر (د (س)) = ٣
∴ || ٢س − ٥ | + ١ | = ٣
∴ | ٢س − ٥ | + ١ = ± ٣
∴ | ٢س − ٥ | = ± ٣ − ١
∴ | ٢س − ٥ | = −٤ (مرفوض)
أ، | ٢س − ٥ | = ٢ ∴ ٢س − ٥ = ± ٢
∴ ٢س = ٥ ± ٢
∴ ٢س = ٧ ومنها س = $\frac{٧}{٢}$
أ، ٢س = ٣ ومنها س = $\frac{٣}{٢}$
∴ مجموعة الحل = { $\frac{٧}{٢}$ ، $\frac{٣}{٢}$ }

٢

① (س + ١) (|س| − ١) + $\frac{١}{٢}$ = صفر
عندما س ≥ ٠ :
∴ (س + ١) (س − ١) + $\frac{١}{٢}$ = ٠
∴ س^{٢} − ١ + $\frac{١}{٢}$ = ٠ ∴ س^{٢} − $\frac{١}{٢}$ = ٠
∴ س = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ∈ [٠ ، ∞[
أ، س = − $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ∉ [٠ ، ∞[
، عندما س < ٠ :
∴ (س + ١) (− س − ١) + $\frac{١}{٢}$ = ٠
∴ − (س + ١)^{٢} + $\frac{١}{٢}$ = ٠
∴ (س + ١)^{٢} = $\frac{١}{٢}$ ∴ س + ١ = ± $\frac{١}{\sqrt{٢}}$
∴ س = (−١ + $\frac{١}{\sqrt{٢}}$) ∈]−∞ ، ٠[
∴ س = (−١ − $\frac{١}{\sqrt{٢}}$) ∈]−∞ ، ٠[
∴ مجموعة الحل
= { $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، −١ − $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، −١ + $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ }

② ∵ || ٢س + ٣ | − ٨ | = ٥
∴ | ٢س + ٣ | − ٨ = ± ٥
∴ | ٢س + ٣ | = ٨ ± ٥
∴ | ٢س + ٣ | = ١٣ أ، | ٢س + ٣ | = ٣

∴ ٢س + ٣ = ± ١٣	٢س + ٣ = ± ٣
∴ ٢س = −٣ ± ١٣	∴ ٢س = −٣ ± ٣
∴ س = −٨ أ، ٥	∴ س = صفر أ، −٣

∴ مجموعة الحل = { −٨ ، ٥ ، صفر ، −٣ }

③ |س|^{٢} − ٣ |س| + ٢ = ٠
∴ (|س| − ٢) (|س| − ١) = ٠
∴ |س| = ٢ ومنها س = ± ٢
أ، |س| = ١ ومنها س = ± ١
∴ مجموعة الحل = { ٢ ، −٢ ، ١ ، −١ }

④ $\sqrt{(س − \frac{١}{س})^{٢} + ٤}$ = ٢
∴ $\sqrt{س^{٢} − ٢ + \frac{١}{س^{٢}} + ٤}$ = ٢
∴ $\sqrt{س^{٢} + ٢ + \frac{١}{س^{٢}}}$ = ٢

∴ $\sqrt{(س + \frac{١}{س})^{٢}}$ = ٢ ∴ | س + $\frac{١}{س}$ | = ٢
∴ س + $\frac{١}{س}$ = ± ٢ ∴ س + $\frac{١}{س}$ = ٢
ومنها س^{٢} − ٢ س + ١ = ٠
∴ (س − ١)^{٢} = ٠ ∴ س = ١
أ، س + $\frac{١}{س}$ = −٢
ومنها س^{٢} + ٢ س + ١ = ٠
∴ (س + ١)^{٢} = ٠ ∴ س = −١
∴ مجموعة الحل = { ١ ، −١ }

⑤ ∵ | س^{٢} − ٣ | + $\frac{٢}{|س^{٢} − ٣|}$ = ٣
∴ | س^{٢} − ٣ |^{٢} − ٣ | س^{٢} − ٣ | + ٢ = ٠
∴ (| س^{٢} − ٣ | − ١) (| س^{٢} − ٣ | − ٢) = ٠
∴ | س^{٢} − ٣ | − ١ = ٠ ، أ، | س^{٢} − ٣ | − ٢ = ٠

∴	س^{٢} − ٣	= ١	∴	س^{٢} − ٣	= ٢
∴ س^{٢} − ٣ = ± ١	∴ س^{٢} − ٣ = ± ٢
∴ س^{٢} = ٣ ± ١	∴ س^{٢} = ٣ ± ٢
∴ س^{٢} = ٤	∴ س^{٢} = ٥
ومنها س = ± ٢	ومنها س = ± $\sqrt{٥}$
أ، س^{٢} = ٢	أ، س^{٢} = ١
ومنها س = ± $\sqrt{٢}$	ومنها س = ± ١

∴ مجموعة الحل = { ± ٢ ، ± $\sqrt{٢}$ ، ± $\sqrt{٥}$ ، ± ١ }

⑥ | س − ٤ | + | س − ٢ | = ١٠

س > ٤	٢ < س < ٤	س < ٢
س − ٤	٤ − س	٤ − س
س − ٢	س − ٢	٢ − س
٢ س − ٦	٢	٦ − ٢ س

∴ عندما س > ٤ ∴ ٢ س − ٦ = ١٠
∴ س = ٨ (يحقق)
، عندما س < ٢ ∴ ٦ − ٢ س = ١٠
∴ س = −٢ (يحقق)
عندما ٢ < س < ٤ ∴ ٢ = ١٠ تعارض
∴ مجموعة الحل = { ٨ ، −٢ }

⑦ ∵ (| ٢س − ٣ | − ٥) (| ٢س − ٣ | + ٥) > ١١
∴ | ٢س − ٣ |^{٢} − ٢٥ > ١١
∴ | ٢س − ٣ |^{٢} > ٣٦
∴ | ٢س − ٣ | > ٦
∴ ٢س − ٣ > ٦ ومنها س > $\frac{٩}{٢}$
أ، ٢س − ٣ < −٦ ومنها س < $\frac{−٣}{٢}$
∴ مجموعة الحل = ح − [$\frac{−٣}{٢}$ ، $\frac{٩}{٢}$]

ارشادات التطبيقات الحياتية على الوحدة الأولى

١

① ع (١٠) = ٨ × ١٠ = ٨٠ سم/ث
② ع (١٥٠) = ٨٠ سم/ث
③ ع (٢١٠) = −٤ × ٢١٠ + ٨٨٠ = ٤٠ سم/ث

٢

ح (ل) = ٤ ل
① ح (٣) = ٤ × ٣ = ١٢ وحدة طول.
② ح ($\frac{١٥}{٤}$) = ٤ × $\frac{١٥}{٤}$ = ١٥ وحدة طول.

٣

م (نق) = π نق^{٢}
① م ($\frac{١}{٢}$) = $\frac{١}{٤}$ π وحدة مربعة
② م (٥) = ٢٥ π وحدة مربعة

٤

① د (س) = ٣,٠ س + ٨ × ٧

② نعم دالة أحادية لأنه بفرض أ ، ب ∈ مجال الدالة د

، ∵ د (أ) = ٣,٠ أ + ٨ × ٧

، د (ب) = ٣,٠ ب + ٨ × ٧

وبفرض أن د (أ) = د (ب)

∴ ٣,٠ أ + ٨ × ٧ = ٣,٠ ب + ٨ × ٧

∴ ٣,٠ أ = ٣,٠ ب   ∴ أ = ب

٥

د (س) = ٥٠ س

٦

• ∵ ف = ع × ن

، ∵ ن = ٣ دقائق ، ع = ٣٠ مترًا/دقيقة

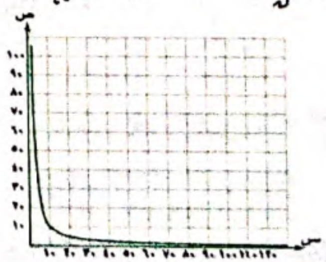
∴ ف = ٣ × ٣٠ = ٩٠   ∴ ع = $\frac{٩٠}{ن}$

∴ ع ∝ $\frac{١}{ن}$

∴ ع تتغير عكسيًا بتغير الزمن.

• ع = $\frac{٩٠}{ن}$ • عندما ع = ٤٥ مترًا/دقيقة.

∴ ٤٥ = $\frac{٩٠}{ن}$ ∴ ن = $\frac{٩٠}{٤٥}$ = ٢ دقيقة.



٧

① ∵ النقطة (٠ ، ٣) تنتمى لمنحنى الدالة

∴ (٠ ، ٣) تحقق معادلة الدالة.

د (س) = أ (س − ٢)^{٢} + ٤

∴ ٣ = أ (٠ − ٢)^{٢} + ٤

∴ ٣ = ٤ أ + ٤

∴ ٤ أ = −١

∴ أ = −$\frac{١}{٤}$

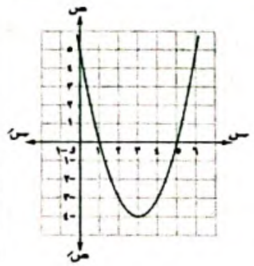
② ∵ نقطة رأس المنحنى هى : (٢ ، ٤)

∴ أقصى ارتفاع للبوابة = ٤ أمتار.

③ عرض البوابة = ٢ + ٢ = ٤ أمتار.

٨

①



من الرسم :

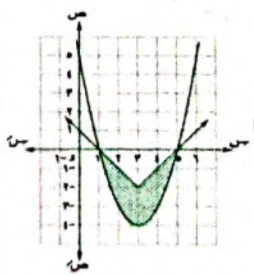
ل = ٤ وحدة طول.

، ع = ٤ وحدة طول.

∴ المساحة المطلوبة

= $\frac{٢}{٣}$ ل ع = $\frac{٢}{٣}$ × ٤ × ٤ = $\frac{٣٢}{٣}$ وحدة مربعة.

②



المساحة المطلوبة

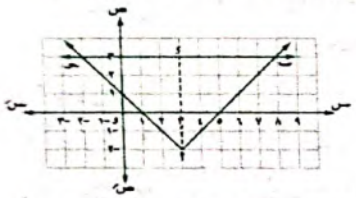
= $\frac{٣٢}{٣}$ − ($\frac{١}{٢}$ × ٤ × ٢)

= $\frac{٣٢}{٣}$ − ٤

= $\frac{٢٠}{٣}$ وحدة مربعة.

٩

د (س) = | س − ٢ | − ٢ ، ر (س) = ٣



∵ طول الوحدة = ٨ أمتار.

، ∵ ب حـ = ١٠ وحدات.

∴ طول القاعدة = ١٠ × ٨ = ٨٠ متر.

، ∵ أ ء = ٥ وحدات.

∴ الارتفاع = ٥ × ٨ = ٤٠ متر.

∴ مساحة الأرض = مساحة Δ أ ب حـ

= $\frac{١}{٢}$ × ٨٠ × ٤٠ = ١٦٠٠ متر مربع.

١٠

يتقاطع الطريقان عندما د (س) = ر (س)

∴ | س − ٥ | = ٥ − $\frac{٢}{٣}$ س

عندما س ≥ ٥ : س − ٥ = ٥ − $\frac{٢}{٣}$ س

∴ ١$\frac{٢}{٣}$ س = ١٠   ∴ س = ٦ ∈ [٥ ، ∞[

، عندما س < ٥ : ∴ − س + ٥ = ٥ − $\frac{٢}{٣}$ س

∴ $\frac{١}{٣}$ س = ٠   ∴ س = ٠ ∈]−∞ ، ٥[

، ∵ د (٦) = | ٦ − ٥ | = ١

∴ أ (٦ ، ١) نقطة تقاطع المنحنيين.

، د (٠) = | ٠ − ٥ | = ٥

∴ ب (٠ ، ٥) نقطة تقاطع المنحنيين.

∴ أ ب = $\sqrt{(٦ - ٠)^{٢} + (١ - ٥)^{٢}}$ = ٢ $\sqrt{١٣}$

، ∵ وحدة الأطوال تمثل ٥ كيلو مترات

∴ أ ب = ٥ × ٢ $\sqrt{١٣}$ = ١٠ $\sqrt{١٣}$ ≈ ٣٦ كم

١١

بفرض أن طول المتقدم لشغل الوظيفة = س سم

∴ ١٧٨ ≤ س ≤ ١٩٢ وبإضافة (− ١٨٥)

إلى أطراف المتباينة.   ∴ −٧ ≤ س − ١٨٥ ≤ ٧

∴ | س − ١٨٥ | ≤ ٧

١٢

① بعد ثانيتين : ف = ٨ | ٥ − ٢ | = ٢٤ سم.

[فى اتجاه الحركة من أ إلى ب]

، بعد ٨ ثوان : ف = ٨ | ٥ − ٨ | = ٢٤ سم.

[فى اتجاه الحركة من ب إلى حـ]

② ∵ ٨ | ٥ − ن | = ١٦   ∴ | ن − ٥ | = ٢

∴ ن − ٥ = −٢ ومنها ن = ٣

[فى اتجاه الحركة من أ إلى ب]

أ، ن − ٥ = ٢ ومنها ن = ٧

[فى اتجاه الحركة من ب إلى حـ]

③ ∵ ٨ | ن − ٥ | < ٨   ∴ | ن − ٥ | < ١

∴ −١ < ن − ٥ < ١   ∴ ٤ < ن < ٦

∴ ن ∈]٤ ، ٦[

١٣

∵ ب = (٨ ، ٤)

، ∵ د (٨) = $\frac{٤}{٣}$ | ٨ − ٥ | = ٤

∴ ب تقع على منحنى الدالة د

∴ الكرة السوداء سوف تسقط فى الجيب ب

إجابات الوحدة الثانية

إجابات تمارين 7

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

① (ب) ② (د) ③ (ب) ④ (جـ)
⑤ (ب) ⑥ (جـ) ⑦ (ب) ⑧ (جـ)
⑨ (ب) ⑩ (أ) ⑪ (جـ) ⑫ (د)
⑬ (ب) ⑭ (د) ⑮ (جـ) ⑯ (جـ)
⑰ (جـ) ⑱ (ب) ⑲ (ب) ⑳ (ب)
㉑ (د) ㉒ (جـ) ㉓ (أ) ㉔ (أ)
㉕ (جـ) ㉖ (أ) ㉗ (ب) ㉘ (جـ)
㉙ (أ) ㉚ (د) ㉛ (ب) ㉜ (أ)
㉝ (ب) ㉞ (ب) ㉟ (ب) ㊱ (د)
㊲ (جـ) ㊳ (د) ㊴ (أ) ㊵ (أ)
㊶ (أ) ㊷ (د) ㊸ (جـ) ㊹ (د)
㊺ (أ) ㊻ (جـ)

ثانيًا الأسئلة المقالية

١

① $\frac{(٢٧)^{-٣}\times(١٢)^{٢}}{١٦\times(٨١)^{-٢}} = \frac{(٣^{٣})^{-٣}\times(٣)^{٢}\times(٢^{٢})^{٢}}{٢^{٤}\times(٣^{٤})^{-٢}}$

$= \frac{٣^{-٩}\times ٣^{٢}\times ٢^{٤}}{٢^{٤}\times ٣^{-٨}} = ٣^{-٩+٢+٨} = ٣$

② $\frac{٤^{٢ن+١}\times ٢^{١-ن}}{٨^{ن+٢}} = \frac{(٢^{٢})^{٢ن+١}\times ٢^{١-ن}}{(٢^{٣})^{ن+٢}}$

$= \frac{٢^{٤ن+٢}\times ٢^{١-ن}}{٢^{٣ن+٦}}$

$= ٢^{٤ن+٢+١-ن-٣ن-٦}$

$= ٢^{-٣} = \frac{١}{٢^{٣}} = \frac{١}{٨}$

③ $\frac{٩^{ن+١}\times ٦^{٢-ن}}{٢٧^{ن+١}\times ٤٨^{١-ن}}$

$= \frac{(٣^{٢})^{ن+١}\times(٢\times٣)^{٢-ن}}{(٣^{٣})^{ن+١}\times ٣^{١-ن}\times(٢^{٤})^{١-ن}}$

$= \frac{٣^{٨ن+٢}\times ٢^{١-ن}}{٣^{٩ن+١}\times ٣^{١-ن}\times ٢^{١-ن}}$

$= ٣^{٨ن+٢-٩ن-١-١+ن}\times ٢^{١-ن-١+ن}$

$= ٣^{٠}\times ٢^{٠} = ١\times ١ = ١$

④ $\frac{١٢٥\times(١٥)^{ن-٢}\times(٢٥)^{م+ن}}{(٧٥)^{ن}\times(٥)^{ن+٢م}}$

$= \frac{٥^{٣}\times ٥^{ن-٢}\times ٣^{ن-٢}\times(٥^{٢})^{م+ن}}{٣^{ن}\times(٥^{٢})^{ن}\times ٥^{ن+٢م}}$

$= \frac{٥^{٣}\times ٥^{ن-٢}\times ٣^{ن-٢}\times ٥^{٢م+٢ن}}{٣^{ن}\times ٥^{٢ن}\times ٥^{ن+٢م}}$

$= ٥^{٣+ن-٢+٢م+٢ن-٢ن-ن-٢م}\times ٣^{ن-٢-ن}$

$= ٥^{٠}\times ٣^{-٣} = \frac{١}{٢٧}$

⑤ $(١٨)^{\frac{١}{٣}}\times(١٢)^{\frac{٢}{٣}}\times\frac{١}{(٢٤)^{\frac{١}{٣}}}$

$= ٢^{\frac{١}{٣}}\times(٣^{٢})^{\frac{١}{٣}}\times ٣^{\frac{٢}{٣}}\times(٢^{٢})^{\frac{٢}{٣}}\times\frac{١}{(٢^{٣})^{\frac{١}{٣}}\times ٣^{\frac{١}{٣}}}$

$= ٢^{\frac{١}{٣}}\times ٣\times ٣^{\frac{٢}{٣}}\times ٢^{٢}\times ٢^{-\frac{٢}{٣}}\times ٣^{-\frac{١}{٣}}$

$= ٢^{\frac{١}{٣}+٢-\frac{١}{٣}}\times ٣^{١+\frac{٢}{٣}-\frac{١}{٣}}$

$= ٢^{٢}\times ٣^{٢} = ٣٦$

⑥ المقدار $= \frac{٣^{\frac{١}{٣}}\times ٢^{\frac{١}{٣}}\times(٧^{٢})^{\frac{١}{٣}}}{(٣^{٢})^{\frac{١}{٣}}\times ٧^{\frac{١}{٣}}} = \frac{٣^{\frac{١}{٣}}\times ٣^{\frac{١}{٣}}\times ٧^{\frac{٢}{٣}}}{٣^{\frac{٢}{٣}}\times ٧^{\frac{١}{٣}}}$

$= ٣^{\frac{١}{٣}+\frac{١}{٣}-\frac{٢}{٣}}\times ٧^{\frac{٢}{٣}-\frac{١}{٣}}$

$= ٣^{٠}\times ٧^{٠} = ١\times ١ = ١$

٢

① الطرف الأيمن

$= \frac{(٣^{٢})^{س-\frac{١}{٢}}\times ٧^{\frac{س(س+٢)}{س}}}{(٣^{٤})^{س-١}\times ٣^{٥-س}\times ٧^{٥-س}\times(٧^{٢})^{س-١}}$

$= \frac{٣^{٣س-١}\times ٧^{س+٢}}{٣^{٤س-٤}\times ٣^{٥-س}\times ٧^{٥-س}\times ٧^{٢س-٢}}$

$= ٣^{٣س-١-٤س+٤-٥+س}$

$\times ٧^{س+٢-٥+س-٢س+٢}$

$= ٣^{-٢}\times ٧^{صفر} = ٣^{-٢} = \frac{١}{٩}$

② الطرف الأيمن $= \frac{(٧^{٢})^{س-١}\times ٧^{\frac{١}{٢}}\times(٢^{٣})^{٢س+١}}{(٢^{٢})^{٣س}\times(٧^{٢})^{س}\times ٢^{٢}}$

$= \frac{٧^{٢س-١}\times ٢^{٦س+١}}{٧^{٢س}\times ٢^{٦س}\times ٢^{٢}}$

$= ٢^{٦س+١-٦س-٢}$

$\times ٧^{٢س-١-٢س}$

$= ٢^{صفر}\times ٧^{-١} = \frac{١}{٧}$

③ الطرف الأيمن

$= \frac{٥^{٢}\times(٢^{٢})^{\frac{١}{٤}}\times ٢^{-\frac{١}{٤}}\times ٥^{-\frac{١}{٤}}}{(٢^{٢})^{\frac{١}{٤}}\times ٢^{-\frac{١}{٤}}\times ٣^{-\frac{١}{٤}}\times ٣^{\frac{١}{٤}}\times ٥^{\frac{١}{٤}}}$

$= \frac{٥^{٢}\times ٢^{\frac{١}{٢}}\times ٢^{-\frac{١}{٤}}\times ٥^{-\frac{١}{٤}}}{٢^{\frac{١}{٢}}\times ٢^{-\frac{١}{٤}}\times ٣^{-\frac{١}{٤}}\times ٣^{\frac{١}{٤}}\times ٥^{\frac{١}{٤}}}$

$= ٥^{٢-\frac{١}{٤}-\frac{١}{٤}}\times ٢^{\frac{١}{٢}-\frac{١}{٤}-\frac{١}{٢}+\frac{١}{٤}}\times ٣^{\frac{١}{٤}-\frac{١}{٤}}$

$= ٥^{٢}\times ٢^{٠}\times ٣^{٠} = ٢٥\times ١\times ١ = ٢٥$

④ الطرف الأيمن

$= \frac{٣\times ٢^{س+١}+٢^{س+٢}}{٢^{س+٣}-٢\times ٣\times ٢^{س}}$

$= \frac{٢^{س+١}(٣+١)}{٢^{س+١}(٢^{٢}-٣)} = \frac{٢^{س+١}\times ٢^{٢}}{٢^{س+١}\times ١} = ٢^{٣} = ٨$

٣

① ∵ $س^{\frac{٢}{٣}} = ٢^{٢}$ ∴ $س = (٢^{٢})^{\frac{٣}{٢}} = ٤$

∴ م.ح = {٤}

② $س^{\frac{٣}{٢}} = \frac{١}{٨} = ٢^{-٣}$ ∴ $س = (٢^{-٣})^{\frac{٢}{٣}}$

∴ $س = ٢^{-٢}$ ∴ م.ح = $\{\frac{١}{٤}\}$

③ ∵ $س^{-\frac{٣}{٤}} = ٢\sqrt{٢}$ ∴ $س = (٢^{\frac{٣}{٢}})^{-\frac{٤}{٣}}$

∴ $س = ٢^{-٢} = \frac{١}{٤}$ ∴ م.ح = $\{\frac{١}{٤}\}$

④ $س^{\frac{٢}{٣}} = ٣^{٤}$

∴ $س = \pm(٣^{٤})^{\frac{٣}{٢}} = \pm ٣^{٦}$...

∴ مجموعة الحل = {٢٧ ، -٢٧}

⑤ $(س-١)^{\frac{٣}{٢}} = ٢^{٦}$

∴ $س-١ = (٢^{٦})^{\frac{٢}{٣}} = ٢^{٣} = ٨$

∴ $س = ٩$ ∴ م.ح = {٩}

⑥ $٢س+٣ = \pm(٢٧)^{\frac{٢}{٣}}$ ∴ $٢س+٣ = \pm ٢٧$

∴ $٢س = ٢٤$ أو $٢س = -٣٠$

∴ $س = ١٢$ أو $س = -١٥$

∴ م.ح = {١٢ ، -١٥}

⑦ $س+١ = (٣٢)^{\frac{١}{٥}} = (٢^{٥})^{\frac{١}{٥}}$

∴ $س+١ = ٢$ ∴ $س = ١$

∴ م.ح = {١}

⑧ $س^{٢}-٥س+٩ = (٣^{٣})^{\frac{٢}{٣}}$

∴ $س^{٢}-٥س+٩ = ٩$

∴ $س^{٢}-٥س = ٠$ ∴ $س(س-٥) = ٠$

∴ $س = ٠$ أو $س = ٥$ ∴ م.ح = {٠ ، ٥}

⑨ ∵ $\sqrt{س}+٢ = ٩$ ∴ $\sqrt{س} = ٧$

∴ $س = ٤٩$ ∴ م.ح = {٤٩}

⑩ $(س^{\frac{٢}{٥}}-١)(س^{\frac{٢}{٥}}-٤) = ٠$

∴ $س^{\frac{٢}{٥}} = ١$ ومنها $س = \pm ١$

أو $س^{\frac{٢}{٥}} = ٤$ ومنها $س = \pm(٢^{٢})^{\frac{٥}{٢}} = \pm ٣٢$

∴ م.ح = {١ ، -١ ، ٣٢ ، -٣٢}

⑪ $(س^{\frac{٢}{٣}}-١)(س^{\frac{٢}{٣}}-٩) = ٠$

∴ $س^{\frac{٢}{٣}} = ١$ ∴ $س = \pm ١$

أو $س^{\frac{٢}{٣}} = ٩$ ∴ $س = \pm(٣^{٢})^{\frac{٣}{٢}} = \pm ٢٧$

∴ م.ح = {١ ، -١ ، ٢٧ ، -٢٧}

(١٢) (س$^{\frac{١}{٢}}$ − ١) (س$^{\frac{١}{٢}}$ − ٢) = ٠

∴ س$^{\frac{١}{٢}}$ = ١ ∴ س = ١

أ، س$^{\frac{١}{٢}}$ = ٢ ∴ س = (٢)^{٢} = ٤

∴ م.ح = {١ ، ٤}

(١٣) س − ٨ $\sqrt{\text{س}}$ + ١٥ = ٠

∴ ($\sqrt{\text{س}}$ − ٣) ($\sqrt{\text{س}}$ − ٥) = ٠

∴ $\sqrt{\text{س}}$ = ٣ ومنها س = ٩

أ، $\sqrt{\text{س}}$ = ٥ ومنها س = ٢٥

∴ م.ح = {٩ ، ٢٥}

(١٤) ∵ س$^{\frac{٢}{٣}}$ − ٢٥ س$^{\frac{١}{٣}}$ − ٥٤ = ٠

∴ (س$^{\frac{١}{٣}}$ − ٢٧) (س$^{\frac{١}{٣}}$ + ٢) = ٠

∴ س$^{\frac{١}{٣}}$ = ٢٧

∴ س = (٣^{٣})^{٣} = ٣^{٩} = ١٩٦٨٣

أ، س$^{\frac{١}{٣}}$ = −٢ ∴ س = (−٢)^{٣} = −٨

∴ م.ح = {١٩٦٨٣ ، −٨}

(١٥) س$^{\frac{٥}{٣}}$ − س$^{\frac{٥}{٦}}$ − ٦ = ٠

∴ (س$^{\frac{٥}{٦}}$ − ٣) (س$^{\frac{٥}{٦}}$ + ٢) = ٠

∴ س$^{\frac{٥}{٦}}$ = ٣ ∴ س = ٣$^{\frac{٦}{٥}}$ ≃ ٣,٧

أ، س$^{\frac{٥}{٦}}$ = −٢ (مرفوض)

∴ م.ح = {٣,٧}

(١٦) س$^{\frac{٤}{٥}}$ − ٣ س$^{\frac{٢}{٥}}$ − ٤ = ٠

∴ (س$^{\frac{٢}{٥}}$ + ١) (س$^{\frac{٢}{٥}}$ − ٤) = ٠

∴ س$^{\frac{٢}{٥}}$ = −١ (مرفوض)

أ، س$^{\frac{٢}{٥}}$ = ٤

∴ س = ± (٢^{٢})$^{\frac{٥}{٢}}$ = ± ٢^{٥} = ± ٣٢

∴ م.ح = {−٣٢ ، ٣٢}

(١٧) بالضرب × $\sqrt[٥]{\text{س}}$

∴ ($\sqrt[٥]{\text{س}}$)^{٢} − ٣ $\sqrt[٥]{\text{س}}$ + ٢ = ٠

∴ س$^{\frac{٢}{٥}}$ − ٣ س$^{\frac{١}{٥}}$ + ٢ = ٠

∴ (س$^{\frac{١}{٥}}$ − ١) (س$^{\frac{١}{٥}}$ − ٢) = ٠

∴ س$^{\frac{١}{٥}}$ = ١ ومنها س = ١

أ، س$^{\frac{١}{٥}}$ = ٢ ومنها س = ٣٢

∴ مجموعة الحل = {١ ، ٣٢}

٤

(١) ٥$^{٢س − ١}$ = $\frac{١}{١٢٥}$ ∴ ٥$^{٢س − ١}$ = $\frac{١}{٥^{٣}}$

∴ ٥$^{٢س − ١}$ = ٥$^{−٣}$ ∴ ٢ س − ١ = −٣

∴ ٢ س = −٢ ∴ س = −١

∴ م.ح = {−١}

(٢) ٥$^{س + ٢}$ = س$^{س + ٢}$ ∴ إما س = ٥

أ، س + ٢ = ٠ ∴ س = −٢

∴ م.ح = {−٢ ، ٥}

(٣) ٢$^{س^{٢} − ٩}$ = ١ ∴ س^{٢} − ٩ = ٠

∴ س^{٢} = ٩ ∴ س = ± ٣

∴ م.ح = {٣ ، −٣}

(٤) س$^{س^{٢} − ٢٥}$ = ٣$^{س^{٢} − ٢٥}$

∴ إما س = ± ٣ أ، س^{٢} − ٢٥ = ٠

∴ س^{٢} = ٢٥ ∴ س = ± ٥

∴ م.ح = {٣ ، −٣ ، ٥ ، −٥}

(٥) (٣ $\sqrt{٣}$)$^{|س|}$ = ٢٧

∴ (٣ $\sqrt{٣}$)$^{|س|}$ = (٣ $\sqrt{٣}$)^{٢}

∴ |س| = ٢ ∴ س = ± ٢

∴ م.ح = {٢ ، −٢}

(٦) ∵ ٣$^{|٢س − ٤|}$ = ٣$^{٤س − ٤}$

∴ |٢ س − ٤| = ٤ س − ٤

عند س ≤ $\frac{٤}{٢}$

∴ ٢ س − ٤ = ٤ س − ٤

∴ س = ٠ (لا يحقق) ، عند س < $\frac{٤}{٢}$

∴ −٢ س + ٤ = ٤ س − ٤

∴ ٧ س = ٨ ∴ س = $\frac{٨}{٧}$ (يحقق)

∴ م.ح = {$\frac{٨}{٧}$}

(٧) ٢ × ٤$^{س + ٣}$ = $\frac{١}{٣٢}$ ∴ ٤$^{س + ٣}$ = $\frac{١}{٦٤}$

∴ ٤$^{س + ٣}$ = ٤$^{−٣}$ ∴ س + ٣ = −٣

∴ س = −٦ ∴ م.ح = {−٦}

(٨) ($\frac{٣}{٥}$)$^{٢س − ١}$ = $\frac{٢٧}{١٢٥}$

∴ ($\frac{٣}{٥}$)$^{٢س − ١}$ = ($\frac{٣}{٥}$)^{٣}

∴ ٢ س − ١ = ٣ ∴ ٢ س = ٤

∴ س = ٢ ∴ م.ح = {٢}

(٩) ٥$^{س − ١}$ × ٧$^{−(س − ١)}$ = $\frac{٢٥}{٤٩}$

∴ ٥$^{س − ١}$ × ٧$^{−(س − ١)}$ = ($\frac{٥}{٧}$)^{٢}

∴ ($\frac{٥}{٧}$)$^{س − ١}$ = ($\frac{٥}{٧}$)^{٢}

∴ س − ١ = ٢ ∴ س = ٣

∴ م.ح = {٣}

(١٠) ∵ [illegible]

= [illegible]

= ٣^{٢} × ٢$^{−٢}$ = ($\frac{٣}{٢}$)^{٢}

∴ ($\frac{٣}{٢}$)^{٢} = ($\frac{٣}{٢}$)^{س} ∴ س = ٢

∴ م.ح = {٢}

(١١) [illegible] = ٩

∴ [illegible] = ٩

∴ [illegible] = ٩

∴ [illegible]

× [illegible] = ٩

∴ [illegible] ∴ [illegible]

∴ س = [illegible] ∴ م.ح = [illegible]

(١٢) [illegible] = ١

∴ [illegible] = ١

∴ ($\sqrt{٣}$)$^{س + ٢}$ = ($\sqrt{٣}$)^{٦}

∴ س + ٢ = ٦ ∴ س = ٤

∴ م.ح = {٤}

(١٣) ($\sqrt{٣}$)$^{س^{٢} − ٤س}$ = ١ ∴ س^{٢} − ٤ س = ٠

∴ س (س − ٤) = ٠ ∴ س = ٠ أ، س = ٤

∴ م.ح = {٠ ، ٤}

(١٤) ∵ [illegible]

∴ [illegible]

∵ [illegible]

∴ [illegible]

∴ [illegible] ∴ م.ح = [illegible]

(١٥) [illegible] ∴ [illegible]

∴ [illegible] ∴ [illegible]

∴ [illegible]

∴ [illegible]

∴ م.ح = [illegible]

⑯ $٣^{س^٢ - ٤٢} = \left(\frac{١}{٣}\right)^{س}$ ∴ $٣^{س^٢ - ٤٢} = ٣^{-س}$

∴ $س^٢ - ٤٢ = -س$

∴ $س^٢ + س - ٤٢ = ٠$

∴ $(س - ٦)(س + ٧) = ٠$

∴ $س - ٦ = ٠$ ومنها $س = ٦$

أ، $س + ٧ = ٠$ ومنها $س = -٧$

∴ م.ح = {٦ ، −٧}

⑰ $(\sqrt{٧})^{|س + ٢|} = ٤٩$

∴ $(\sqrt{٧})^{|س + ٢|} = (\sqrt{٧})^{٤}$

∴ $|س + ٢| = ٤$ ∴ $س + ٢ = \pm ٤$

∴ إما $س + ٢ = ٤$ ومنها $س = ٢$

أ، $س + ٢ = -٤$ ومنها $س = -٦$

∴ م.ح = {٢ ، −٦}

⑱ $٣^{٢س - ٣} \times ٧^{٦ - ٤س} = ١$

∴ $٣^{٢س - ٣} \times ٧^{-٢(٢س - ٣)} = ١$

∴ $٣^{٢س - ٣} \times \frac{١}{(٧^{٢})^{٢س - ٣}} = ١$

∴ $٣^{٢س - ٣} = (٤٩)^{٢س - ٣}$

∴ $٢س - ٣ = ٠$ ∴ $س = \frac{٣}{٢}$

∴ م.ح = $\left\{\frac{٣}{٢}\right\}$

⑲ $\sqrt{٩^{س} - ٢ \times ٣^{س + ١} + ٩} = ٢٤$

∴ $\sqrt{٣^{٢س} - ٢ \times ٣ \times ٣^{س} + ٩} = ٢٤$

∴ $\sqrt{(٣^{س} - ٣)^{٢}} = ٢٤$ ∴ $|٣^{س} - ٣| = ٢٤$

∴ $٣^{س} = ٢٧$ ∴ $٣^{س} = ٣^{٣}$

∴ $س = ٣$ أ، $٣^{س} - ٣ = -٢٤$

∴ $٣^{س} = -٢١$ (مرفوض)

∴ م.ح = {٣}

⑳ $\sqrt{٥^{٢س - ٢} - \frac{٢}{٥} \times ٥^{س} + ١} = ١٢٤$

∴ $\sqrt{٥^{٢(س - ١)} - ٢ \times ٥^{س - ١} + ١} = ١٢٤$

∴ $\sqrt{(٥^{س - ١} - ١)^{٢}} = ١٢٤$

∴ $|٥^{س - ١} - ١| = ١٢٤$

∴ $٥^{س - ١} - ١ = ١٢٤$

∴ $٥^{س - ١} = ١٢٥ = ٥^{٣}$

∴ $س - ١ = ٣$ ∴ $س = ٤$

أ، $٥^{س - ١} = -١٢٤$

∴ $٥^{س - ١} = -١٢٣$ (مرفوض)

∴ م.ح = {٤}

٥

① $٥^{س + ١} + ٥^{س - ١} = ٢٦$

∴ $٥^{س}(٥ + ٥^{-١}) = ٢٦$

∴ $٥^{س} \times \frac{٢٦}{٥} = ٢٦$

∴ $٥^{س} = ٥$ ∴ $س = ١$

∴ مجموعة الحل = {١}

② $٣^{س + ٣} - ٣^{س + ٢} = ١٦٢$

∴ $٣^{س}(٣^{٣} - ٣^{٢}) = ١٦٢$

∴ $٣^{س} \times ١٨ = ١٦٢$

∴ $٣^{س} = ٩$ ∴ $٣^{س} = ٣^{٢}$

∴ $س = ٢$ ∴ م.ح = {٢}

③ $٧^{٢ - س} + ٧^{-س} = ٥٠$

∴ $٧^{-س}(٧^{٢} + ١) = ٥٠$

∴ $٧^{-س} \times ٥٠ = ٥٠$ ∴ $٧^{-س} = ١$

∴ $س = ٠$ ∴ م.ح = {٠}

④ $٥^{٢س} + ٢٥ = ٢٦ \times ٥^{س}$

∴ $٥^{٢س} - ٢٦ \times ٥^{س} + ٢٥ = ٠$

∴ $(٥^{س} - ٢٥)(٥^{س} - ١) = ٠$

∴ $٥^{س} = ٢٥$ ومنها $س = ٢$

، $٥^{س} = ١$ ومنها $س = ٠$

∴ م.ح = {٢ ، ٠}

⑤ $٢^{س} + ٢^{٥ - س} = ١٢$

∴ $٢^{س} + \frac{٢^{٥}}{٢^{س}} = ١٢$ بالضرب × $٢^{س}$

∴ $٢^{٢س} + ٣٢ = ١٢ \times ٢^{س}$

∴ $٢^{٢س} - ١٢ \times ٢^{س} + ٣٢ = ٠$

∴ $(٢^{س} - ٤)(٢^{س} - ٨) = ٠$

∴ $٢^{س} = ٤$ ومنها $س = ٢$

أ، $٢^{س} = ٨$ ومنها $س = ٣$

∴ م.ح = {٢ ، ٣}

⑥ $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س + ١} + \left(\frac{١}{٢}\right)^{س + ٣} + \left(\frac{١}{٢}\right)^{س + ٥} = ٨٤$

∴ $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س}\left(\frac{١}{٢} + \left(\frac{١}{٢}\right)^{٣} + \left(\frac{١}{٢}\right)^{٥}\right) = ٨٤$

∴ $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س} \times \frac{٢١}{٣٢} = ٨٤$ ∴ $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س} = ٨٤ \times \frac{٣٢}{٢١}$

∴ $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س} = ١٢٨$ ∴ $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س} = \left(\frac{١}{٢}\right)^{-٧}$

∴ $س = -٧$ ∴ م.ح = {−٧}

⑦ $٤^{س} + ٢^{س + ١} = ٨$

∴ $٢^{٢س} + ٢(٢)^{س} - ٨ = ٠$

∴ $(٢^{س} + ٤)(٢^{س} - ٢) = ٠$

∴ إما $٢^{س} = -٤$ (مرفوض) أ، $٢^{س} = ٢$

∴ $س = ١$ ∴ مجموعة الحل = {١}

⑧ $٢^{٢س + ١} - ٣٣(٢)^{س} + ١٦ = ٠$

∴ $٢(٢)^{٢س} - ٣٣(٢)^{س} + ١٦ = ٠$

∴ $[٢(٢)^{س} - ١][٢^{س} - ١٦] = ٠$

∴ إما $٢(٢)^{س} = ١$ ∴ $٢^{س + ١} = ١$

∴ $س + ١ = ٠$ ∴ $س = -١$

أ، $٢^{س} = ١٦$ ∴ $٢^{س} = ٢^{٤}$ ∴ $س = ٤$

∴ مجموعة الحل = {−١ ، ٤}

⑨ $٥^{٢س - ٢} - ٦(٥)^{س - ١} + ٥ = ٠$

∴ $٥^{٢(س - ١)} - ٦(٥)^{س - ١} + ٥ = ٠$

∴ $(٥^{س - ١} - ١)(٥^{س - ١} - ٥) = ٠$

∴ إما $٥^{س - ١} = ١$ ومنها $س - ١ = ٠$

∴ $س = ١$ أ، $٥^{س - ١} = ٥$

∴ $س - ١ = ١$ ∴ $س = ٢$

∴ مجموعة الحل = {١ ، ٢}

⑩ $٩^{س^٢ - ١} - ٣٦(٣)^{س^٢ - ٣} + ٣ = ٠$

∴ $(٣)^{٢(س^٢ - ١)} - \frac{٣٦}{٩}(٣)^{س^٢ - ١} + ٣ = ٠$

∴ $(٣)^{٢(س^٢ - ١)} - ٤(٣)^{س^٢ - ١} + ٣ = ٠$

∴ $(٣^{س^٢ - ١} - ١)(٣^{س^٢ - ١} - ٣) = ٠$

∴ إما $٣^{س^٢ - ١} = ١$

∴ $س^٢ - ١ = ٠$ ∴ $س^٢ = ١$

∴ $س = \pm ١$ أ، $٣^{س^٢ - ١} = ٣$

∴ $س^٢ - ١ = ١$ ∴ $س^٢ = ٢$

∴ $س = \pm \sqrt{٢}$

∴ مجموعة الحل = {١ ، −١ ، $\sqrt{٢}$ ، $-\sqrt{٢}$}

⑪ $١٠^{س} - ٥^{س - ١} \times ٢^{س - ٢} = ٩٥٠$

∴ $١٠^{س} - \frac{٥^{س}}{٥} \times \frac{٢^{س}}{٤} = ٩٥٠$

∴ $١٠^{س} - \frac{١}{٢٠}(١٠)^{س} = ٩٥٠$

وبالضرب × ٢٠

∴ $٢٠(١٠)^{س} - (١٠)^{س} = ٢٠ \times ٩٥٠$

∴ $١٩(١٠)^{س} = ٢٠ \times ٩٥٠$

∴ $١٠^{س} = ١٠٠٠$ ∴ $١٠^{س} = ١٠^{٣}$

∴ $س = ٣$ ∴ مجموعة الحل = {٣}

٦

① $ص^{\frac{٣}{٤}} = ٢^{٦}$ ∴ $ص = (٢^{٦})^{\frac{٤}{٣}} = ٢^{٨} = ٢٥٦$

، $٢ س^{\frac{٥}{٤}} = ٢ \times ٢^{٥}$

$\therefore$ س $= (٢^{٥})^{\frac{٣}{٥}} = ٢^{٣} = ٨$

$\therefore$ ٥ س + ٢ ص = ٥ × ٨ + ٢ × ٢٥٦

= ٤٠ + ٥١٢ = ٥٥٢

② س$^{\frac{٢}{٣}}$ = ٢٧ $\therefore$ س $= (٣^{٣})^{\frac{٢}{٣}} = ٣^{٢} = ٩$

، ٣ ص$^{\frac{٢}{٣}}$ = ٢٧ $\therefore$ ص$^{\frac{٢}{٣}}$ = ٩

$\therefore$ ص $= \pm (٣^{٢})^{\frac{٣}{٢}} = \pm ٢٧$

$\therefore$ س + ص = ٩ + ٢٧ = ٣٦

أ، س + ص = ٩ − ٢٧ = −١٨

③ $\because$ س$^{\frac{٤}{٣}} = ٣^{٤}$

$\therefore$ س $= \pm (٣^{٤})^{\frac{٣}{٤}} = \pm ٢٧$

، $\because$ ٩ ص$^{\frac{-٢}{٣}}$ = ٨١ $\therefore$ ص$^{\frac{-٢}{٣}} = ٩ = ٣^{٢}$

$\therefore$ ص$^{\frac{٢}{٣}} = ٣^{-٢}$

$\therefore$ ص $= \pm (٣^{-٢})^{\frac{٣}{٢}} = \pm (٣)^{-٣} = \pm \frac{١}{٢٧}$

$\therefore$ | ٢ س ص | = | ٢ × (±٢٧) × $(\pm \frac{١}{٢٧})$ | = ٢

٧

① خطأ لأن $(-٩)^{\frac{٢}{٢}} \neq \sqrt{(-٩)^{٢}}$ لوجود عامل مشترك بين البسط والمقام للأس.

② خطأ لأن س = ± ٢ لأن الأس زوجي.

٨

① $\because$ $٢^{٢س + ٢ص} = ٢^{٧}$

$\therefore$ ٢ س + ٢ ص = ٧ (١)

، $\because$ $ء^{س - ٢ص - ٣} = ١$

$\therefore$ س − ٢ ص = ٣ (٢)

بجمع (١) ، (٢):

$\therefore$ ٣ س = ١٠ $\therefore$ س = $\frac{١٠}{٣}$

، بالتعويض في (١) $\therefore$ ص = $\frac{١}{٦}$

$\therefore$ مجموعة الحل = $\{(\frac{١٠}{٣} ، \frac{١}{٦})\}$

② $٣^{س} \times ٥^{ص} = ٧٥$ (١) ، $٣^{ص} \times ٥^{س} = ٤٥$ (٢)

وبقسمة (١) على (٢):

$\therefore (\frac{٣}{٥})^{س} \times (\frac{٥}{٣})^{ص} = \frac{٧٥}{٤٥}$

$\therefore (\frac{٥}{٣})^{-س} \times (\frac{٥}{٣})^{ص} = \frac{٥}{٣}$

$\therefore (\frac{٥}{٣})^{ص - س} = \frac{٥}{٣}$ $\therefore$ ص − س = ١ (٣)

وبضرب (١) × (٢):

$\therefore (١٥)^{س} \times (١٥)^{ص} = ٧٥ \times ٤٥$

$\therefore (١٥)^{س + ص} = ١٥^{٣}$ $\therefore$ س + ص = ٣ (٤)

بجمع (٣) ، (٤) نجد أن: ٢ ص = ٤

$\therefore$ ص = ٢ وبالتعويض في (٣): $\therefore$ س = ١

$\therefore$ مجموعة الحل = {(١ ، ٢)}

③ $٣^{س} \times ٣^{ص} = ٣^{٣}$ $\therefore$ $٣^{س + ص} = ٣^{٣}$

$\therefore$ س + ص = ٣ $\therefore$ ص = ٣ − س

، $\because$ $٣^{س} + ٣^{ص} = ١٢$

$\therefore$ $٣^{س} + ٣^{٣ - س} = ١٢$ وبالضرب × $٣^{س}$

$\therefore$ $٣^{٢س} + ٢٧ = ١٢ (٣)^{س}$

$\therefore$ $٣^{٢س} - ١٢ (٣)^{س} + ٢٧ = ٠$

$\therefore$ $(٣^{س} - ٣)(٣^{س} - ٩) = ٠$

$\therefore$ إما $٣^{س} = ٣$ $\therefore$ س = ١ ومنها ص = ٢

أ، $٣^{س} = ٩$ $\therefore$ $٣^{س} = ٣^{٢}$

$\therefore$ س = ٢ ومنها ص = ١

$\therefore$ مجموعة الحل = {(١ ، ٢) ، (٢ ، ١)}

٩

$\because$ $٩^{س + ١} - (٣^{س + ٢} + ٣^{س}) + ٣ = ٠$

$\therefore$ $٩^{س} \times ٩ - ٣^{س} (٣^{٢} + ١) + ٣ = ٠$

$\therefore$ $٩ \times ٣^{٢س} - ٢٨ \times ٣^{س} + ٣ = ٠$

$\therefore$ $(٩ \times ٣^{س} - ١)(٣^{س} - ٣) = ٠$

$\therefore$ $٩ \times ٣^{س} - ١ = ٠$ ومنها $٣^{س} = \frac{١}{٩}$

$\therefore$ $٣^{س} = ٣^{-٢}$ $\therefore$ س = −٢

أو $٣^{س} - ٣ = ٠$ ومنها $٣^{س} = ٣$ $\therefore$ س = ١

$\therefore$ مجموعة الحل = {−٢ ، ١}

١٠

$\because$ س$^{ن + ١}$ = ص$^{ن - ١}$

$\therefore$ (س$^{ن + ١})^{٣}$ = (ص$^{ن - ١})^{٣}$

$\therefore$ (س$^{٣})^{ن + ١}$ = ص$^{٣ن - ٣}$

، $\because$ س^{٣} = ص^{٢} $\therefore$ (ص$^{٢})^{ن + ١}$ = ص$^{٣ن - ٣}$

$\therefore$ ص$^{٢ن + ٢}$ = ص$^{٣ن - ٣}$

$\therefore$ ٢ ن + ٢ = ٣ ن − ٣ $\therefore$ ن = ٥

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١

① (ب) ② (د) ③ (جـ)

④ (جـ) ⑤ (جـ) ⑥ (جـ)

⑦ (د) ⑧ (د) ⑨ (د)

إرشادات لحل رقم ١

① $\because$ $\sqrt{س^{٢}}$ = | س | = − س لأن (س < ٠)

، $\sqrt[٣]{س^{٣}}$ = س

، $\sqrt{س^{٢} - ٢س + ١} = \sqrt{(س - ١)^{٢}}$

= | س − ١ | = ١ − س

(لأن س < ٠)

$\therefore$ $\sqrt{س^{٢}} - \sqrt[٣]{س^{٣}} - \sqrt{س^{٢} - ٢س + ١} + ١$

= − س − س − (١ − س) + ١ = − س

② $\because$ أ = [illegible] $\therefore$ أ^{٤} = [illegible]

$\therefore$ (أ$^{٤})^{٢}$ = $\frac{٤}{٣٤٣}$ عدد نسبي

$\therefore$ أ^{٨} عدد نسبي

③ (جـ) لا تكون دائمًا صحيحة لأن

$\sqrt{س^{٢} ص^{٢}}$ = | س ص |

④ $\because$ س$^{\frac{٤}{٣}}$ = س$^{\frac{٢}{٣}}$ $\therefore$ س$^{\frac{٤}{٣}}$ − س$^{\frac{٢}{٣}}$ = ٠

$\therefore$ س$^{\frac{٢}{٣}}$ (١ − س$^{\frac{٢}{٣}}$) = ٠

$\therefore$ س$^{\frac{٢}{٣}}$ = ٠

ومنها س = ٠ أو ١ − س$^{\frac{٢}{٣}}$ = ٠

ومنها س$^{\frac{٢}{٣}}$ = ١ $\therefore$ س = ±١

$\therefore$ مجموعة الحل = {[illegible]}

⑤ [illegible]

⑥ [illegible] صحيحة لكل [illegible]

⑦ $\because$ س$^{\frac{٢}{٣}}$ = [illegible] $\therefore$ س = [illegible]

[illegible]

⑧ [illegible] بوضع الطرفين [illegible]

[illegible]

⑨ [illegible]

[illegible]

[illegible]

$\therefore$ مجموعة الحل = [illegible]

② $\because (س - ٢)^{س - ٥} = ١$

$\therefore$ إما $س - ٥ = ٠$ ومنها $س = ٥$

أ، $س - ٣ = ١$ ومنها $س = ٤$

أ، $س - ٣ = -١$ (إذا كان الأس زوجيًا)

ومنها $س = ٢$ (مرفوض) لأن الأس $(٢ - ٥)$ فردى.

$\therefore$ مجموعة الحل $= \{٥ ، ٤\}$

③ $\because (س - ٢)^{(س - ٦)} = ١$

$\therefore$ إما $س - ٦ = ٠$ ومنها $س = ٦$

أ، $س - ٣ = ١$ ومنها $س = ٤$

أ، $س - ٣ = -١$ (إذا كان الأس زوجيًا)

ومنها $س = ٢$ (يتحقق) (لأن الأس $(٢ - ٦)$ زوجى)

$\therefore$ مجموعة الحل $= \{٦ ، ٤ ، ٢\}$

إجابات تمارين 8

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

① (د)	② (د)	③ (أ)	④ (ب)
⑤ (جـ)	⑥ (جـ)	⑦ (جـ)	⑧ (جـ)
⑨ (أ)	⑩ (جـ)	⑪ (أ)	⑫ (جـ)
⑬ (ب)	⑭ (جـ)	⑮ (جـ)	⑯ (أ)
⑰ (د)	⑱ (جـ)	⑲ (د)	⑳ (جـ)
㉑ (جـ)	㉒ (أ)	㉓ (أ)	㉔ (ب)
㉕ (ب)	㉖ (جـ)	㉗ (جـ)	㉘ (ب)
㉙ (د)	㉚ (ب)	㉛ (ب)	㉜ (جـ)
㉝ (د)	㉞ (جـ)	㉟ (أ)	㊱ (د)
㊲ (ب)	㊳ (ب)	㊴ (ب)	

ثانيا الأسئلة المقالية

1

① ليست أسية

② دالة أسية ، أساسها $= ٥$ ، أسها $=$ س

③ ليست أسية ④ ليست أسية

⑤ دالة أسية ، أساسها $= \frac{٢}{٣}$ ، أسها $=$ س $- ١$

⑥ ليست أسية

2

$$\frac{د(س + ٤) - د(س + ٣)}{د(س + ٥) - د(س + ٤)} = \frac{٥^{س+٤} - ٥^{س+٣}}{٥^{س+٥} - ٥^{س+٤}}$$

$$= \frac{٥^{س+٣}(٥ - ١)}{٥^{س+٤}(٥ - ١)} = \frac{١}{٥}$$

3

$\because د(٢س - ١) + د(س - ٢) = ٥٠$

$\therefore ٧^{(٢س-١)+١} + ٧^{(س-٢)+١} = ٥٠$

$\therefore ٧^{٢س} + ٧^{س-١} = ٥٠$

$\therefore ٧^{٢س} + ٧^{-١} \times ٧^{س} = ٥٠$

$\therefore ٧^{٢س} + \frac{١}{٧} \times ٧^{س} = ٥٠$ (بالضرب × ٧)

$\therefore ٧ \times ٧^{٢س} + ٧^{س} - ٣٥٠ = ٠$

$\therefore (٧ \times ٧^{س} + ٥٠)(٧^{س} - ٧) = ٠$

$\therefore ٧ \times ٧^{س} + ٥٠ = ٠$ ومنها $٧^{س} = \frac{-٥٠}{٧}$ (مرفوض)

أ، $٧^{س} - ٧ = ٠$ $\therefore ٧^{س} = ٧$ $\therefore س = ١$

4

$\because د_١(٢س - ١) + د_٢(س + ١) = ٧٥٦$

$\therefore ٣^{٢س-١} + ٩^{س+١} = ٧٥٦$

$\therefore ٣^{٢س-١} + ٣^{٢س+٢} = ٧٥٦$

$\therefore ٣^{٢س}(٣^{-١} + ٣^{٢}) = ٧٥٦$

$\therefore ٣^{٢س} \times \frac{٢٨}{٣} = ٧٥٦$

$\therefore ٣^{٢س} = ٧٥٦ \times \frac{٣}{٢٨}$

$\therefore ٣^{٢س} = ٨١$ $\therefore ٣^{٢س} = ٣^{٤}$

$\therefore ٢س = ٤$ $\therefore س = ٢$

5

$$\text{الطرف الأيمن} = \frac{ص^{س+١} + ص^{س+٢}}{ص^{س+١} + ص^{س}}$$

$$= \frac{ص^{س+١}(١ + ص)}{ص^{س}(ص + ١)} = ص$$

6

$$\text{الطرف الأيمن} = \frac{٣^{٣س+٢} + ٣^{٣س-١}}{٥ \times ٣^{٣س} - ٧ \times ٣^{٣س-١}}$$

$$= \frac{٣^{٣س-١}(٣^{٣} + ١)}{٣^{٣س-١}(٥ \times ٣ - ٧)} = \frac{٢٨}{٨} = \frac{٧}{٢}$$

7

$$\text{الطرف الأيمن} = \frac{٣^{٣(س+١)-١} \times ٣^{٣(س+٢)-١}}{٣^{٣(س+٣)-١}}$$

$$= \frac{٣^{٣س+٢} \times ٣^{٣س+٥}}{٣^{٣س+٨}}$$

$$= ٣^{٣س+٢+٣س+٥-٣س-٨}$$

$$= ٣^{٣س-١} = د(س)$$

8

$$\text{الطرف الأيمن} = \frac{٢^{س+١}}{٢^{س-١}} + \frac{٢^{س-١}}{٢^{س+١}} = ٢^{٢} + \frac{١}{٢^{٢}} = \frac{١٧}{٤}$$

9

$\because ٧^{٢س-١} + ٧^{٢س+١} = \frac{٥٠}{٤٩}$

$\therefore ٧^{٢س-١}(١ + ٤٩) = \frac{٥٠}{٤٩}$

$\therefore ٧^{٢س-١} = ٧^{-٢}$ $\therefore ٢س - ١ = -٢$

$\therefore ٢س = -١$ $\therefore س = -\frac{١}{٢}$

10

$\because \frac{٢^{س+١} - ٢^{س}}{٢^{س} - ٢^{س-١}} = ٢^{س-٢}$

$\therefore \frac{٢^{س}(٢ - ١)}{٢^{س-١}(٢ - ١)} = ٢^{س-٢}$

$\therefore ٢ = ٢^{س-٢}$

$\therefore س - ٢ = ١$ $\therefore س = ٣$

11

$\because \frac{٣^{-٢س-١}}{٣^{-س+١}} = ٧٢٩$

$\therefore ٣^{-٢س-١+س-١} = ٣^{٦}$

$\therefore -س - ٢ = ٦$ $\therefore س = -٨$

$\therefore$ مجموعة الحل $= \{-٨\}$

12

$\because ٣^{س+١} + ٣^{٢-س} = ٣٠$ وبالضرب $\times ٣^{س-١}$

$\therefore ٣^{٢س} + ٣^{٢} - ١٠ \times ٣ \times ٣^{س-١} = ٠$

$\therefore ٣^{٢س} - ١٠ \times ٣^{س} + ٩ = ٠$

$\therefore (٣^{س} - ١)(٣^{س} - ٩) = ٠$

$\therefore ٣^{س} = ١$ ومنها $س = ٠$

أ، $٣^{س} = ٩$ ومنها $س = ٢$

13

$\because ٢^{٢س} - ٦ \times ٢^{س} + ٨ = ٠$

$\therefore (٢^{س} - ٢)(٢^{س} - ٤) = ٠$

$\therefore ٢^{س} = ٢$ ومنها $س = ١$ أ، $٢^{س} = ٤$ ومنها $س = ٢$

$\therefore$ مجموعة الحل $= \{١ ، ٢\}$

١٤

∵ $٣^{س} + ٣ \times ٣^{\frac{س}{٢}} = ١٢$ وبوضع $٣^{\frac{س}{٢}} =$ ص

∴ $ص^{٢} + ص - ١٢ = ٠$

∴ (ص + ٤) (ص − ٣) = ٠

∴ ص = − ٤ (مرفوض) أ، ص = ٣ ومنها $٣^{\frac{س}{٢}} = ٣$

∴ $\frac{س}{٢} = ١$ ∴ س = ٢

∴ مجموعة الحل = {٢}

١٥

∵ د (س − ٢) = $٣^{س}$ ∴ د (س) = $٣^{س+٢}$

، ∵ د (٣ س + ١) − د (٣ س − ١) = ٢٤

∴ $٣^{٣س+٣} - ٣^{٣س+١} = ٢٤$

∴ $٣^{٣س+١} (٣^{٢} - ١) = ٢٤$

∴ $٣^{٣س+١} \times ٨ = ٢٤$ ∴ $٣^{٣س+١} = ٣$

∴ ٣ س + ١ = ١ ∴ ٣ س = صفر

∴ س = صفر

١٦

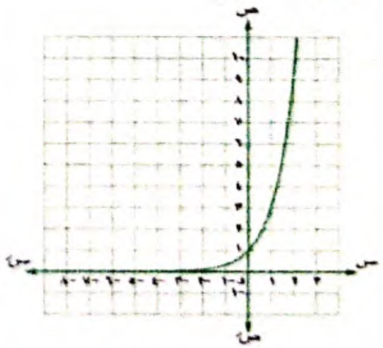
① شكل (٧) ② شكل (٢) ③ شكل (٥)

④ شكل (١) ⑤ شكل (٦) ⑥ شكل (٣)

⑦ شكل (٤) ⑧ شكل (٨)

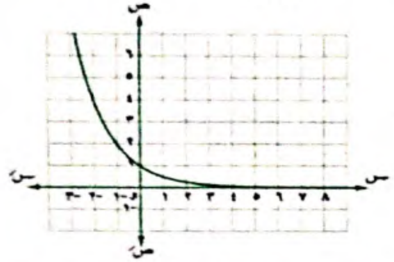
١٧

① د (س) = $٣^{س}$



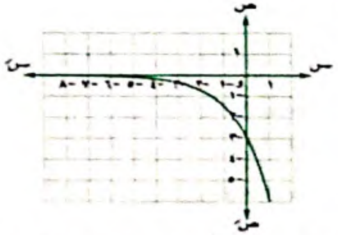
المجال = ح ، المدى = $ح^{+}$ ، الدالة تزايدية على مجالها.

② د (س) = $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س}$



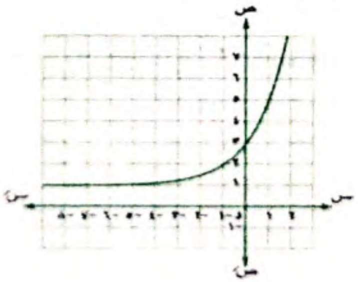
المجال = ح ، المدى = $ح^{+}$ ، الدالة تناقصية على مجالها.

③ د (س) = −٣ $(٢)^{س}$



المجال = ح ، المدى = $ح^{-}$ ، الدالة تناقصية على مجالها

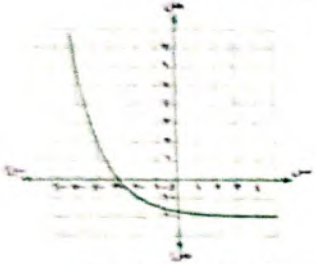
④ د (س) = $٢^{س+١} + ١$



المجال = ح ، المدى =]١ ، ∞[

، الدالة تزايدية على مجالها.

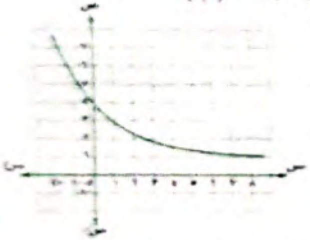
⑤ د (س) = $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س+٢} - ٢$



المجال = ح ، المدى =]−٢ ، ∞[

، الدالة تناقصية على مجالها.

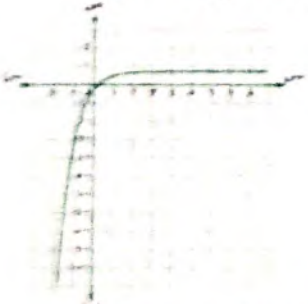
⑥ د (س) = ٢ $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{س-١} + ١$



المجال = ح ، المدى =]١ ، ∞[

، الدالة تناقصية على مجالها.

⑦ د (س) = − $\left(\frac{١}{٢}\right)^{٢س} + \frac{٣}{٢}$



المجال = ح ، المدى =]−∞ ، $\frac{٣}{٢}$[

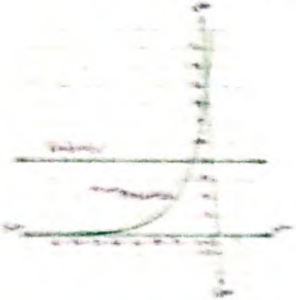
، الدالة تزايدية على مجالها.

[illegible]

① من التمثيل البياني للدالتين

∵ د (س) = [illegible] ، ر (س) = [illegible]

∴ مجموعة الحل = {−١}

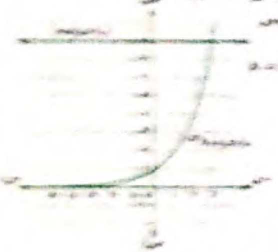


② من التمثيل البياني للدالتين

∵ د (س) = [illegible]

، ر (س) = [illegible]

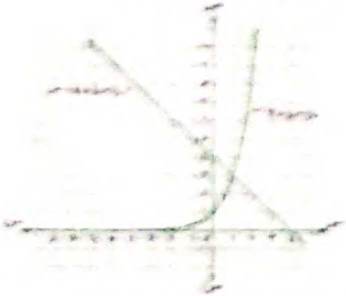
∴ مجموعة الحل = {٣}



③ من التمثيل البياني للدالتين

∵ د (س) = [illegible] ، ر (س) = [illegible]

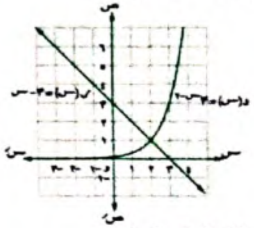
∴ مجموعة الحل = {١}



④ من التمثيل البيانى للدالتين :

د : د (س) = $٣^{س - ٢}$ ، ر : ر (س) = ٣ − س

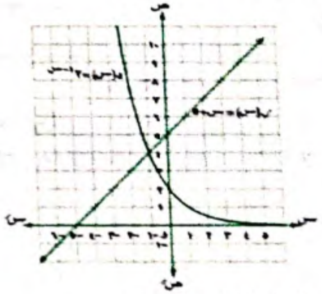
∴ مجموعة الحل = {٢}



⑤ من التمثيل البيانى للدالتين :

د : د (س) = $٢^{١ - س}$ ، ر : ر (س) = س + ٥

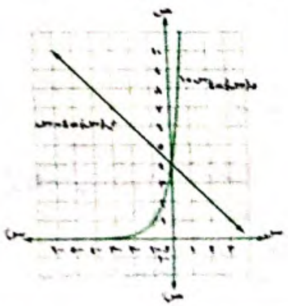
∴ مجموعة الحل = {−١}



⑥ من التمثيل البيانى للدالتين :

د : د (س) = $٤^{س + ١}$ ، ر : ر (س) = ٤ − س

∴ مجموعة الحل = {٠}

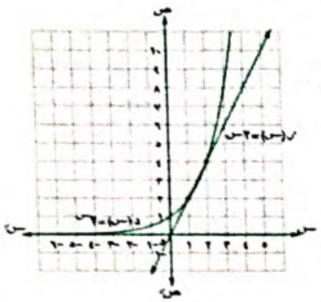


⑦ من التمثيل البيانى للدالتين :

د : د (س) = $٢^{س}$

، ر : ر (س) = ٢ س

∴ مجموعة الحل = {١ ، ٢}



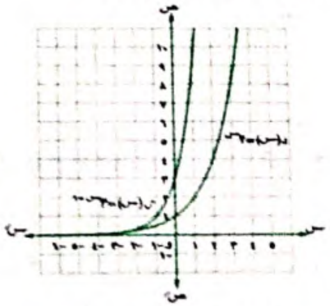
⑧ من التمثيل البيانى للدالتين :

د : د (س) = $٢^{س}$

، ر : ر (س) = $٣^{س + ١}$

∴ س ≃ $-\frac{٣}{٤}$ ٢

∴ مجموعة الحل = {$-\frac{٣}{٤}$ ٢}



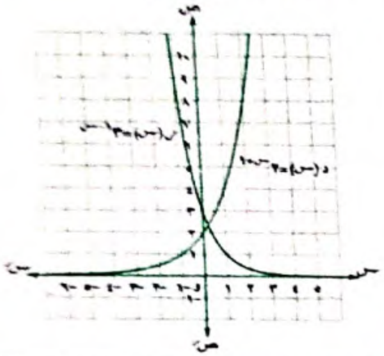
⑨ من التمثيل البيانى للدالتين :

د : د (س) = $٢^{س + ١}$

، ر : ر (س) = $٣^{١ - س}$

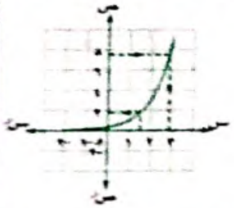
∴ س ≃ $\frac{١}{٤}$

∴ مجموعة الحل = {$\frac{١}{٤}$}



١٩

س	−٢	−١	٠	١	٢	٣
د (س)	$\frac{١}{٢٧}$	$\frac{١}{٩}$	$\frac{١}{٣}$	١	٣	٩



ومن الرسم :

① د $\left(\frac{٣}{٢}\right)$ ≃ ١,٧

② عندما $٣^{س - ١}$ = $\frac{١}{٢}$ ٧ فإن : س ≃ ٢,٨

٢٠

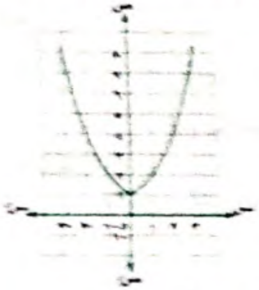
ومن الرسم

- المجال = ح ، المدى =]− ∞ ، ١]
- الدالة تزايدية فى]− ∞ ، ٠[
- ، وتناقصية فى]٠ ، ∞[

٢١

د (س) = $٢^{س}$ ، س ≥ ٠ | د (س) = $٢^{-س}$ ، س < ٠

س	٠	١	٢	٣	٠	−١	−٢	−٣
د (س)	١	٢	٤	٨	١	٢	٤	٨



- المدى = [١ ، ∞[
- الدالة تناقصية فى]− ∞ ، ٠[، وتزايدية فى]٠ ، ∞[
- الدالة زوجية لأنها متماثلة حول محور الصادات

٢٢

د (س) = $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س}$ عندما س ≥ ٠ | د (س) = $\left(\frac{١}{٢}\right)^{-س}$ عندما س < ٠

س	٠	١	٢	٣	٠	−١	−٢	−٣
د (س)	١	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٨}$	١	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٨}$

- المدى =]٠ ، ١]
- الدالة تزايدية فى]− ∞ ، ٠[، وتناقصية فى]٠ ، ∞[
- الدالة زوجية لأنها متماثلة حول محور الصادات

٢٣

∵ ٥$^{ما س}$ + ٥$^{-١}$ + ما س = ٢٦

∴ ٥$^{ما س}$ (٥ + ٥$^{-١}$) = ٢٦

∴ ٥$^{ما س}$ = ٥   ∴ ما س = ١

∴ س = $\frac{\pi}{٢}$ + ٢ ن π حيث ن ∈ ص

٢٤

المقدار = $\frac{١}{٢^{س} + ١}$ + $\frac{١}{٢^{-س} + ١}$ × $\frac{٢^{س}}{٢^{س}}$

= $\frac{١}{٢^{س} + ١}$ + $\frac{٢^{س}}{١ + ٢^{س}}$ = $\frac{١ + ٢^{س}}{١ + ٢^{س}}$ = ١

∴ قيمة المقدار = ١ مهما كانت قيمة س

٢٥

∵ دالة الرصيد هى د (ن) = أ (١ + ر)^{ن}

∴ الرصيد بعد ١٠ سنوات = ٨٠٠٠٠ $\left(١ + \frac{١٠,٥}{١٠٠}\right)^{١٠}$

= ٨٠٠٠٠ (١,١٠٥)^{١٠}

≃ ٢١٧١٢٦ جنيهًا.

٢٦

① عدد السكان بعد مرور ن سنة من عام ٢٠٠٠

= أ (١ + ر)^{ن}

= ٤٣,٣ $\left(١ + \frac{١,٥}{١٠٠}\right)^{ن}$ = ٤٣,٣ (١,٠١٥)^{ن}

② عام ٢٠٢٠ يكون عدد السنين = ٢٠٢٠ − ٢٠٠٠

= ٢٠ سنة.

∴ عدد السكان = ٤٣,٣ (١,٠١٥)^{٢٠}

≃ ٥٨,٣ مليون نسمة.

٢٧

أ = ٣٦٤٠٠ ، ر = $\frac{٤}{١٠٠}$ = ٠,٠٤ ، ن = عدد المباريات

عدد الحضور (ص) = أ (١ − ر)^{ن}

= ٣٦٤٠٠ (١ − ٠,٠٤)^{ن}

= ٣٦٤٠٠ (٠,٩٦)^{ن}

، فى المباراة العاشرة :

يكون عدد الحضور (ص) = ٣٦٤٠٠ (٠,٩٦)^{١٠}

≃ ٢٤٢٠٠ مُشجع

٢٨

أ = ٨٠ ، ر = $\frac{١٨}{١٠٠}$ = ٠,١٨ ، ن = ٤ سنوات.

∴ عدد الأبقار = أ (١ + ر)^{ن}

، عدد الأبقار بعد ٤ سنوات = ٨٠ (١ + ٠,١٨)^{٤}

≃ ١٥٥ بقرة.

٢٩

أ = ٤,٦ ، ر = $\frac{٤}{١٠٠}$ = ٠,٠٤

① دالة النمو المستقبلى بعد ن سنة = أ (١ + ر)^{ن}

= ٤,٦ (١ + ٠,٠٤)^{ن}

= ٤,٦ (١,٠٤)^{ن} مليون نسمة.

② بعد خمس سنوات :

عدد السكان = ٤,٦ (١,٠٤)^{٥} ≃ ٥,٦ مليون نسمة.

٣٠

أ = ٢٥٤ ، ر = $\frac{٥}{١٠٠}$ = ٠,٠٥

، الفترة الزمنية ن = ٩ سنوات.

∴ دالة التضاؤل الأسى هى :

د (ن) = أ (١ − ر)^{ن} = ٢٥٤ (١ − ٠,٠٥)^{ن}

= ٢٥٤ (٠,٩٥)^{ن}

∴ إنتاج المنجم فى السنة التاسعة = ٢٥٤ (٠,٩٥)^{٩}

≃ ١٦٠ كجم.

٣١

أ = ٢٠٠٠ ، ر = $\frac{٧}{١٠٠}$ = ٠,٠٧

، الفترة الزمنية ن = ١١ ساعة.

∴ دالة النمو الأسى هى د (ن) = أ (١ + ر)^{ن}

= ٢٠٠٠ (١ + ٠,٠٧)^{ن}

= ٢٠٠٠ (١,٠٧)^{ن}

∴ كمية البكتريا بعد ١١ ساعة = ٢٠٠٠ (١,٠٧)^{١١}

≃ ٤٢١٠ بكتريا.

٣٢

باستخدام العلاقة جـ = أ $\left(١ + \frac{ر}{س}\right)^{ن س}$

① العائد السنوى.   ∴ س = ١

جـ = ٥٠٠٠ (١ + ٠,٠٨)^{١٠} ≃ ١٠٧٩٤,٦٢ جنيه.

② العائد الربع سنوى.   ∴ س = ٤

جـ = ٥٠٠٠ $\left(١ + \frac{٠,٠٨}{٤}\right)^{١٠ × ٤}$ ≃ ١١٠٤٠,٢ جنيه.

③ العائد الشهرى.   ∴ س = ١٢

جـ = ٥٠٠٠ $\left(١ + \frac{٠,٠٨}{١٢}\right)^{١٠ × ١٢}$ ≃ ١١٠٩٨,٢ جنيه.

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

① (د)   ② (جـ)   ③ (د)   ④ (جـ)

⑤ (د)   ⑥ (أ)   ⑦ (د)   ⑧ (أ)

إرشادات الحل :

① ∵ الدالة متناقصة إذا كان : ٠ < ٢ أ < ١

∴ ٠ < أ < $\frac{١}{٢}$ ∴ أ ∈]٠ ، $\frac{١}{٢}$[

② ∵ الدالة تزايدية   ∴ $\frac{أ}{٢}$ > ١   ∴ أ > ٢

③ ∵ د (س) = (أ − ٢)^{س} دالة اسية.

∴ أ − ٢ > ٠ ، أ − ٢ ≠ ١

∴ أ > ٢ ، أ ≠ ٣

∴ أ ∈]٢ ، ∞[− {٣}

④ المنحنى يقطع محور السينات عندما ص = ٠

وبالتعويض عن د (س) = ٠ فى الدوال المعطاة

لا نحصل على أى قيمة للمتغير س الا فى الحالة رقم (جـ)

٣^{س} − ١ = ٠   ∴ ٣^{س} = ١   ∴ س = ٠

أى المنحنى يقطع محور السينات فى النقطة (٠ ، ٠)

⑤ بحل المعادلتين ص = ٨ ، ص = ٢^{س} معًا

∴ س = ٣

وبحل المعادلتين ص = ٨ ، ص = $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س}$ معًا

∴ س = −٣

∴ أ (٣ ، ٨) ، ب (−٣ ، ٨)

∴ طول $\overline{أب}$ = ٦ وحدات.

⑥ نعلم أن انعكاس منحنى الدالة د (س) = ٣^{س}

حول محور الصادات يعطى منحنى الدالة

د (س) = ٣$^{-س}$ ثم ازاحته ء وحدات

لأعلى يعطى المنحنى د (س) = ء + ٣$^{-س}$

⑦ ∵ د (س) = $\frac{٩^{س}}{٩^{س} + ٣}$

∴ د (١ − س) = $\frac{٩^{١ - س}}{٩^{١ - س} + ٣}$

بالضرب بسطًا ومقامًا فى ٩^{س}

∴ د (١ − س) = $\frac{٩}{٩ + ٣ × ٩^{س}}$

= $\frac{٩}{٣ (٣ + ٩^{س})}$ = $\frac{٣}{٣ + ٩^{س}}$

∴ د (س) + د (١ − س)

= $\frac{٩^{س}}{٩^{س} + ٣}$ + $\frac{٣}{٣ + ٩^{س}}$ = $\frac{٩^{س} + ٣}{٩^{س} + ٣}$ = ١

⑧ ∵ د(س) = $\frac{٤^{\text{س}}}{٤^{\text{س}}+٢}$

∴ د(١ − س) = $\frac{٤^{١-\text{س}}}{٤^{١-\text{س}}+٢}$

بالضرب بسطًا ومقامًا فى $٤^{\text{س}}$

∴ د(١ − س) = $\frac{٤}{٤+٢\times٤^{\text{س}}}$

= $\frac{٤}{٢(٢+٤^{\text{س}})} = \frac{٢}{٢+٤^{\text{س}}}$

∴ د(س) + د(١ − س)

= $\frac{٤^{\text{س}}}{٤^{\text{س}}+٢} + \frac{٢}{٢+٤^{\text{س}}} = \frac{٤^{\text{س}}+٢}{٤^{\text{س}}+٢} = ١$

∴ د$\left(\frac{١}{١١}\right)$ + د$\left(\frac{١٠}{١١}\right)$ = ١

، د$\left(\frac{٢}{١١}\right)$ + د$\left(\frac{٩}{١١}\right)$ = ١

، د$\left(\frac{٣}{١١}\right)$ + د$\left(\frac{٨}{١١}\right)$ = ١

، د$\left(\frac{٤}{١١}\right)$ + د$\left(\frac{٧}{١١}\right)$ = ١

، د$\left(\frac{٥}{١١}\right)$ + د$\left(\frac{٦}{١١}\right)$ = ١

∴ المقدار المطلوب = ٥

إجابات تمارين 9

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

① (جـ)	② (د)	③ (د)	④ (جـ)
⑤ (جـ)	⑥ (ب)	⑦ (جـ)	⑧ (ب)
⑨ (جـ)	⑩ (ب)	⑪ (جـ)	⑫ (ب)
⑬ (ب)	⑭ (ب)	⑮ (ب)	⑯ (جـ)
⑰ (جـ)	⑱ (جـ)	⑲ (ب)	⑳ (ب)
㉑ (جـ)	㉒ (د)	㉓ (جـ)	㉔ (أ)
㉕ (أ)	㉖ (ب)	㉗ (جـ)	㉘ (أ)
㉙ (أ)	㉚ (أ)		

ثانيا الأسئلة المقاليـة

١

①

س	٧	٤	١	−١٠
د^{-1} (س)	−٢	١	٢	٥

② د^{-1} = {(٢ ، ١) ، (٣ ، ٢) ، (٤ ، ٣)}

③ بوضع س = ٢ ص + ٥

∴ ص = $\frac{\text{س}-٥}{٢}$

∴ د^{-1}(س) = $\frac{\text{س}-٥}{٢}$

④ بوضع س = $\frac{١}{٢}$ ص + ٤

∴ ص = ٢ س − ٨

∴ د^{-1}(س) = ٢ س − ٨

⑤ بوضع س = ٥ + $\frac{٤}{\text{ص}}$ ∴ $\frac{٤}{\text{ص}}$ = س − ٥

∴ ص = $\frac{٤}{\text{س}-٥}$ ∴ د^{-1}(س) = $\frac{٤}{\text{س}-٥}$

⑥ بوضع س = ٨ $\text{ص}^{٣}$ − ١

∴ ٨ $\text{ص}^{٣}$ = س + ١

∴ $\text{ص}^{٣}$ = $\frac{١}{٨}$ (س + ١)

∴ ص = $\frac{١}{٢}\sqrt[٣]{\text{س}+١}$

∴ د^{-1}(س) = $\frac{١}{٢}\sqrt[٣]{\text{س}+١}$

⑦ بوضع س = $\sqrt[٣]{\text{ص}+١}$

∴ ص + ١ = $\text{س}^{٣}$ ∴ ص = $\text{س}^{٣}$ − ١

∴ د^{-1}(س) = $\text{س}^{٣}$ − ١

⑧ بوضع س = $\sqrt[٣]{٤-\text{ص}}$ ∴ ٤ − ص = $\text{س}^{٣}$

∴ ص = ٤ − $\text{س}^{٣}$

∴ د^{-1}(س) = ٤ − $\text{س}^{٣}$

⑨ ∵ ص = ٢ + $\sqrt{٢-\text{س}}$ حيث س ≤ ٢ ، ص ≥ ٢

وبتبديل المتغيرين

∴ س = ٢ + $\sqrt{٢-\text{ص}}$

حيث ص ≤ ٢ ، س ≥ ٢

∴ $\sqrt{٢-\text{ص}}$ = س − ٢

∴ ٢ − ص = $(\text{س}-٢)^{٢}$

∴ ص = ٢ − $(\text{س}-٢)^{٢}$

∴ د^{-1}(س) = ٢ − $(\text{س}-٢)^{٢}$ لكل س ≥ ٢

⑩ ∵ ص = $\text{س}^{٢}$ حيث س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠

وبتبديل المتغيرين

∴ س = $\text{ص}^{٢}$ حيث ص ≥ ٠ ، س ≥ ٠

∴ ص = $\sqrt{\text{س}}$

∴ د^{-1}(س) = $\sqrt{\text{س}}$ لكل س ≥ ٠

⑪ ∵ ص = $(\text{س}+٢)^{٢}$ حيث س ≤ −٢ ، ص ≥ ٠

وبتبديل المتغيرين

∴ س = $(\text{ص}+٢)^{٢}$ حيث ص ≤ −٢ ، س ≥ ٠

∴ ص + ٢ = −$\sqrt{\text{س}}$

∴ ص = −$\sqrt{\text{س}}$ − ٢

∴ د^{-1}(س) = −$\sqrt{\text{س}}$ − ٢ لكل س ≥ ٠

⑫ ∵ ص = $(\text{س}-١)^{٢}$ + ٢ حيث س ≥ ١

، ص ≥ ٢ وبتبديل المتغيرين

∴ س = $(\text{ص}-١)^{٢}$ + ٢ حيث ص ≥ ١ ، س ≥ ٢

∴ $(\text{ص}-١)^{٢}$ = س − ٢

∴ ص − ١ = $\sqrt{\text{س}-٢}$

∴ ص = $\sqrt{\text{س}-٢}$ + ١

∴ د^{-1}(س) = $\sqrt{\text{س}-٢}$ + ١ لكل س ≥ ٢

⑬ ∵ ص = $\text{س}^{٢}$ + ٨ س + ٧ = $(\text{س}+٤)^{٢}$ − ٩

حيث س ≥ −٤ ، ص ≥ −٩ وبتبديل المتغيرين

∴ س = $\text{ص}^{٢}$ + ٨ ص + ٧ حيث ص ≥ −٤

، س ≥ −٩

∴ س = $\text{ص}^{٢}$ + ٨ ص + ١٦ − ٩

∴ س = $(\text{ص}+٤)^{٢}$ − ٩

∴ $(\text{ص}+٤)^{٢}$ = س + ٩

∴ ص + ٤ = $\sqrt{\text{س}+٩}$

∴ ص = $\sqrt{\text{س}+٩}$ − ٤

∴ د^{-1}(س) = $\sqrt{\text{س}+٩}$ − ٤ لكل س ≥ −٩

⑭ ∵ ص = $\sqrt{٩-\text{س}^{٢}}$ حيث −٣ ≤ س ≤ ٠

، ٠ ≤ ص ≤ ٣ وبتبديل المتغيرين

∴ س = $\sqrt{٩-\text{ص}^{٢}}$ ، −٣ ≤ ص ≤ ٠

، ٠ ≤ س ≤ ٣

∴ $\text{س}^{٢}$ = ٩ − $\text{ص}^{٢}$

∴ $\text{ص}^{٢}$ = ٩ − $\text{س}^{٢}$

∴ ص = −$\sqrt{٩-\text{س}^{٢}}$

∴ د^{-1}(س) = −$\sqrt{٩-\text{س}^{٢}}$

لكل ٠ ≤ س ≤ ٣

⑮ ∵ ص = $\sqrt{٩-\text{س}^{٢}}$ حيث ٠ ≤ س ≤ ٣

، ٠ ≤ ص ≤ ٣ وبتبديل المتغيرين

∴ س = $\sqrt{٩-\text{ص}^{٢}}$ ، ٠ ≤ ص ≤ ٣

، ٠ ≤ س ≤ ٣

∴ $\text{س}^{٢}$ = ٩ − $\text{ص}^{٢}$

∴ $\text{ص}^{٢}$ = ٩ − $\text{س}^{٢}$

∴ ص = $\sqrt{٩-\text{س}^{٢}}$

∴ د^{-1}(س) = $\sqrt{٩-\text{س}^{٢}}$ لكل ٠ ≤ س ≤ ٣

⑯ ∵ ص = ١ / (س^٢ + ٢) ، س ∈ ح^+

، ص ∈]٠ ، ١/٢[

وبتبديل المتغيرين

∴ س = ١ / (ص^٢ + ٢) ، ص ∈ ح^+

، س ∈]٠ ، ١/٢[

∴ ص^٢ + ٢ = ١/س ∴ ص^٢ = ١/س − ٢

∴ ص = √(١/س − ٢)

∴ د^{-١} (س) = √(١/س − ٢) ، س ∈]٠ ، ١/٢[

٢

① لها دالة عكسية ② ليس لها دالة عكسية

③ ليس لها دالة عكسية ④ ليس لها دالة عكسية

٣

① ∵ (د ∘ ر) (س) = د (ر (س))

= د ((س + ٣)/٢) = ٢ ((س + ٣)/٢) − ٣

= س + ٣ − ٣ = س

، (ر ∘ د) (س) = ر (د (س))

= ر (٢ س − ٣) = ((٢ س − ٣) + ٣)/٢ = س

∴ د ، ر كل منهما دالة عكسية للأخرى.

② ∵ (د ∘ ر) (س) = د (ر (س))

= د (√(س − ٤)) = (√(س − ٤))^٢ + ٤

= س − ٤ + ٤ = س

، ∵ (ر ∘ د) (س) = ر (د (س))

= ر (س^٢ + ٤) = √(س^٢ + ٤ − ٤)

= √(س^٢) = |س|

، ∵ س ≥ ٠ ∴ (ر ∘ د) (س) = س

∴ د ، ر كل منهما دالة عكسية للأخرى.

③ ر (س) = (٥ س − ٢)/س

∴ ر (س) = ٥ − ٢/س

∴ (د ∘ ر) (س) = د (ر (س))

= د (٥ − ٢/س) = −٢ / (٥ − ٢/س − ٥) = س

، (ر ∘ د) (س) = ر (د (س))

= ر (−٢/(س − ٥)) = ٥ − ٢ / (−٢/(س − ٥))

= ٥ + س − ٥ = س

∴ د ، ر كل منهما دالة عكسية للأخرى.

④ (د ∘ ر) (س) = د (ر (س))

= د (س^٣/٤) = ∛(٤ × س^٣/٤) = س

، (ر ∘ د) (س) = ر (د (س))

= ر (∛(٤ س))

= (∛(٤ س))^٣ / ٤

= ٤ س / ٤ = س

∴ د ، ر كل منهما دالة عكسية للأخرى.

٤

① ∵ ص = ٥ س بتبديل المتغيرين.

∴ س = ٥ ص

∴ ص = ١/٥ س

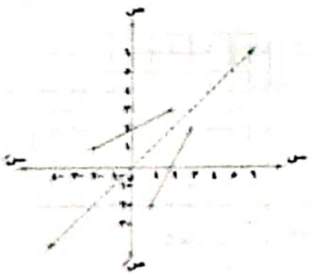
∴ د^{-١} (س) = ١/٥ س

② د^{-١} (ب) + ٢ د^{-١} (جـ) = ٣ + ٢ × ٤ = ١١

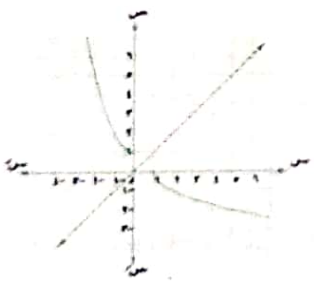
٥

①

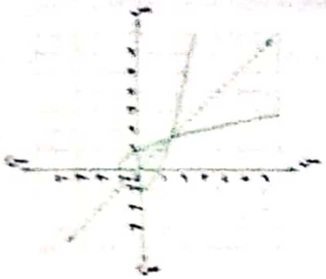
②



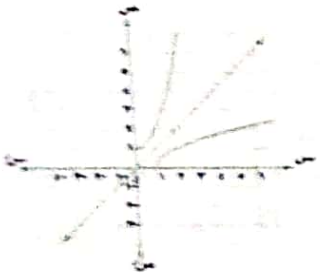
③



④



⑤



⑥

٦

① ∵ د (س) = ٢ س

∴ ص = ٢ س

بتبديل المتغيرين ∴ س = ٢ ص

∴ ص = ١/٢ س

∴ د^{-١} (س) = ١/٢ س ≠ د (س)

∴ د معكوسها ليس نفسها.

② ∵ د (س) = − س ∴ ص = − س

بتبديل المتغيرين

∴ س = − ص

∴ ص = − س

∴ $د^{-1}$ (س) = − س = د (س)

∴ د معكوسها هو نفسها.

③ ∵ د (س) = $\frac{٢}{س}$ ∴ ص = $\frac{٢}{س}$

بتبديل المتغيرين ∴ س = $\frac{٢}{ص}$

∴ ص = $\frac{٢}{س}$

∴ $د^{-1}$ (س) = $\frac{٢}{س}$ = د (س)

∴ د معكوسها هو نفسها.

④ ∵ د (س) = ٧ − س ∴ ص = ٧ − س

بتبديل المتغيرين

∴ س = ٧ − ص

∴ ص = ٧ − س

∴ $د^{-1}$ (س) = ٧ − س = د (س)

∴ د معكوسها هو نفسها.

⑤ ∵ د (س) = $\frac{١}{س - ٢}$ + ٥

∴ ص = $\frac{١}{س - ٢}$ + ٥ بتبديل المتغيرين

∴ س = $\frac{١}{ص - ٢}$ + ٥

∴ س − ٥ = $\frac{١}{ص - ٢}$

∴ ص − ٢ = $\frac{١}{س - ٥}$

∴ ص = $\frac{١}{س - ٥}$ + ٢

∴ $د^{-1}$ (س) = $\frac{١}{س - ٥}$ + ٢ ≠ د (س)

∴ د معكوسها ليس نفسها.

⑥ ∵ د (س) = $\frac{١}{س - ك}$ + ك

∴ ص = $\frac{١}{س - ك}$ + ك

بتبديل المتغيرين

∴ س = $\frac{١}{ص - ك}$ + ك

∴ س − ك = $\frac{١}{ص - ك}$

∴ ص − ك = $\frac{١}{س - ك}$

∴ ص = $\frac{١}{س - ك}$ + ك

∴ $د^{-1}$ (س) = $\frac{١}{س - ك}$ + ك = د (س)

∴ د معكوسها هو نفسها.

٧

إجابة رنا هى الصواب لأن :

$د^{-1}$ (س) ≠ $\frac{١}{د (س)}$ كما فى إجابة وائل

٨

① ∵ د (س) = $س^{٢}$

∴ د ليست أحادية على مجالها = ح

وتكون أحادية إذا كانت س ∈ [٠ ، ∞[

أو س ∈]−∞ ، ٠]

∴ المجال الذى يكون فيه للدالة د دالة عكسية

= [٠ ، ∞[أو]−∞ ، ٠]

② ∵ د (س) = $س^{٣}$

∴ د دالة أحادية على مجالها ح

∴ المجال الذى يكون فيه للدالة د دالة عكسية = ح

③ ∵ د (س) = $\frac{١}{٢}$ س

∴ د دالة أحادية على مجالها ح

∴ المجال الذى يكون فيه للدالة د دالة عكسية = ح

٩

∵ ص = $\frac{س - ١}{س + ٥}$ بتبديل المتغيرين

∴ س = $\frac{ص - ١}{ص + ٥}$

∴ س ص + ٥ س = ص − ١

∴ س ص − ص = −٥ س − ١

∴ ص (س − ١) = −٥ س − ١

∴ ص = $\frac{-٥ س - ١}{س - ١}$

∴ $د^{-1}$ (س) = $\frac{-٥ س - ١}{س - ١}$

١٠

∵ د (س) = ٢ س + أ ∴ ص = ٢ س + أ

وبتبديل المتغيرين ∴ س = ٢ ص + أ

∴ ص = $\frac{س - أ}{٢}$ = $\frac{١}{٢}$س − $\frac{أ}{٢}$

∴ $د^{-1}$ (س) = $\frac{١}{٢}$س − $\frac{أ}{٢}$

∵ $د^{-1}$ (س) = ر (س)

∴ $\frac{١}{٢}$س − $\frac{أ}{٢}$ = ب س + ٢

∴ ب = $\frac{١}{٢}$ ، − $\frac{أ}{٢}$ = ٢ ∴ أ = −٤

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

① (أ) ② (جـ) ③ (أ) ④ (أ)

⑤ (جـ) ⑥ (د) ⑦ (ب) ⑧ (أ)

إرشادات الحل :

① ∵ $د^{-1}$ (٩) = ٣

∴ النقطة (٣ ، ٩) ∈ منحنى الدالة

، ∵ $د^{-1}$ (٥) = ٢

∴ النقطة (٢ ، ٥) ∈ منحنى الدالة

، ∵ د (س) = أ س + ب

∴ ٣ أ + ب = ٩ (١)

، ٢ أ + ب = ٥ (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢) :

∴ أ = ٤ ، ب = −٣

∴ أ × ب = ٤ × −٣ = −١٢

② ∵ ر (س) = س − ٢

∴ $ر^{-1}$ (س) = س + ٢

، ∵ ر (د (س)) = ر ($س^{٢}$) = $س^{٢}$ − ٢

، ∵ ر (د (س)) = $ر^{-1}$ (س)

∴ $س^{٢}$ − ٢ = س + ٢

∴ $س^{٢}$ − س − ٦ = ٠

∴ (س + ٢) (س − ٣) = ٠

∴ س = −٢ أو س = ٣

∴ م.ح = {٣ ، −٢}

③ نضع د (س) = ٣ ونوجد قيمة س

∴ س = $\frac{د (س) + ١}{٢ - د (س)}$ = $\frac{٣ + ١}{٢ - ٣}$ = −٤

∴ د (−٤) = ٣ ∴ $د^{-1}$ (٣) = −٤

④ ∵ المجال ح − {١} ∴ ب = ١

∴ د (س) = $\frac{أ س + ٣}{س - ١}$ = أ + $\frac{٣ + أ}{س - ١}$

من قاعدة الدالة نجد أن نقطة تماثل المنحنى هى (١ ، أ)

ومن المجال والمجال المقابل نجد أن نقطة تماثل المنحنى هى (١ ، ٣)

∴ أ = ٣

∴ د (س) = $\frac{٣ س + ٣}{س - ١}$ وبتبديل المتغيرين

∴ س = $\frac{٣ ص + ٣}{ص - ١}$

∴ س ص − س = ٣ ص + ٣

(س − ٣) ص = س + ٣ ∴ ص = $\frac{س + ٣}{س - ٣}$

∴ $د^{-1}$ (س) = $\frac{س + ٣}{س - ٣}$

∴ $د^{-1}$ (٢) = −٥

⑤ ∵ د(س) = $\sqrt{\text{س} - ٥}$ وبتبديل المتغيرين

∴ س = $\sqrt{\text{ص} - ٥}$

∴ ص = س^{٢} + ٥

∴ د$^{-١}$ (س) = س^{٢} + ٥

∴ (ر ∘ د$^{-١}$) (س) = ر (د$^{-١}$ (س))

= ر (س^{٢} + ٥)

= ٢ (س^{٢} + ٥) − ٧

= ٢ س^{٢} + ٣

⑥ ∵ د(س) = ٣ س − ٤ وبتبديل المتغيرين

∴ س = ٣ ص − ٤

∴ ص = $\frac{\text{س} + ٤}{٣}$

∴ د$^{-١}$ (س) = $\frac{\text{س} + ٤}{٣}$

∴ د$^{-١}$ (س + ٢) = $\frac{\text{س} + ٢ + ٤}{٣}$ = $\frac{\text{س} + ٦}{٣}$

⑦ ∵ د(س) = س^{٣} + ٣ س^{٢} + ٣ س + ١

= (س^{٣} + ١) + (٣ س^{٢} + ٣ س)

= (س + ١) (س^{٢} − س + ١) + ٣ س (س + ١)

= (س + ١) (س^{٢} − س + ١ + ٣ س)

= (س + ١) (س^{٢} + ٢ س + ١)

= (س + ١) (س + ١)^{٢} = (س + ١)^{٣}

وبتبديل المتغيرين

∴ س = (ص + ١)^{٣}

∴ ص = $\sqrt[٣]{\text{س}}$ − ١

∴ د$^{-١}$ (س) = $\sqrt[٣]{\text{س}}$ − ١

⑧ ∵ منحنى د$^{-١}$ يمر بالنقطتين (−٢ ، ٠) ، (−٣ ، −٢)

∴ د$^{-١}$ (−٢) = ٠ ∴ د (٠) = −٢

، د$^{-١}$ (−٣) = −٢ ∴ د (−٢) = −٣

∴ (د ∘ د) (صفر) = د (د (صفر)) = د (−٢) = −٣

إجابات تمارين 10

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

① (ب)	② (ب)	③ (جـ)	④ (ب)
⑤ (د)	⑥ (د)	⑦ (د)	⑧ (أ)
⑨ (أ)	⑩ (جـ)	⑪ (أ)	⑫ (ب)
⑬ (د)	⑭ (جـ)	⑮ (أ)	⑯ (جـ)
⑰ (جـ)	⑱ (ب)	⑲ (ب)	⑳ (ب)
㉑ (ب)	㉒ (د)	㉓ (ب)	㉔ (ب)
㉕ (ب)	㉖ (د)	㉗ (أ)	㉘ (جـ)
㉙ (أ)	㉚ (ب)	㉛ (جـ)	㉜ (جـ)
㉝ (ب)	㉞ (جـ)	㉟ (أ)	㊱ (ب)
㊲ (أ)	㊳ (جـ)	㊴ (أ)	㊵ (أ)
㊶ (د)	㊷ (ب)	㊸ (أ)	㊹ (جـ)
㊺ (د)			

ثانيا الأسئلة المقالية

1

① ٢^{٧} = ١٢٨ ② $\left(\frac{٢}{٥}\right)^{٢}$ = $\frac{٤}{٢٥}$

③ (٢)$^{\frac{٥}{٢}}$ = ٤ $\sqrt{٢}$

2

① لو$_{٥}$ ١ = صفر ② لو$_{١٠}$ ٠,٠٠٠١ = −٤

③ لو$_{٥}$ $\frac{١}{١٢٥}$ = −٣

3

① بفرض : لو$_{٢}$ ١٦ = س

∴ ٢$^{\text{س}}$ = ١٦ ∴ ٢$^{\text{س}}$ = ٢^{٤}

∴ س = ٤ ∴ لو$_{٢}$ ١٦ = ٤

② بفرض : لو$_{٨}$ ١ = س

∴ ٨$^{\text{س}}$ = ١ = ٨^{٠} ∴ س = صفر

∴ لو$_{٨}$ ١ = صفر

③ بفرض : لو ٠,٠٠٠٠١ = س

∴ ١٠$^{\text{س}}$ = ٠,٠٠٠٠١ ∴ ١٠$^{\text{س}}$ = $\frac{١}{١٠٠٠٠٠}$

∴ ١٠$^{\text{س}}$ = ١٠$^{-٥}$ ∴ س = −٥

∴ لو ٠,٠٠٠٠١ = −٥

④ بفرض : لو$_{\frac{١}{٢}}$ ١٢٨ = س

∴ $\left(\frac{١}{٢}\right)^{\text{س}}$ = ١٢٨ = ٢^{٧}

∴ $\left(\frac{١}{٢}\right)^{\text{س}}$ = $\left(\frac{١}{٢}\right)^{-٧}$ ∴ س = −٧

∴ لو$_{\frac{١}{٢}}$ ١٢٨ = −٧

⑤ بفرض : لو$_{٢}$ $\frac{١}{٨}$ = س ∴ ٢$^{\text{س}}$ = $\frac{١}{٨}$

∴ ٢$^{\text{س}}$ = ٢$^{-٣}$ ∴ س = −٣

∴ لو$_{٢}$ $\frac{١}{٨}$ = −٣

⑥ بفرض : لو$_{\sqrt{٢}}$ ٨ $\sqrt{٢}$ = س

∴ $(\sqrt{٢})^{\text{س}}$ = ٨ $\sqrt{٢}$ = $(\sqrt{٢})^{٧}$

∴ س = ٧ ∴ لو$_{\sqrt{٢}}$ ٨ $\sqrt{٢}$ = ٧

⑦ بفرض : لو$_{٣}$ $\sqrt[٤]{٢٧}$ = س

∴ ٣$^{\text{س}}$ = $\sqrt[٤]{٢٧}$ ∴ ٣$^{\text{س}}$ = (٣)$^{\frac{٣}{٤}}$

∴ س = $\frac{٣}{٤}$ ∴ لو$_{٣}$ $\sqrt[٤]{٢٧}$ = $\frac{٣}{٤}$

⑧ بفرض : لو$_{٢}$ جا ٤٥° = لو$_{٢}$ $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ = س

∴ ٢$^{\text{س}}$ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ∴ ٢$^{\text{س}}$ = ٢$^{-\frac{١}{٢}}$

∴ س = −$\frac{١}{٢}$ ∴ لو$_{٢}$ جا ٤٥° = −$\frac{١}{٢}$

4

① ٢^{٧} = س ∴ س = ١٢٨

② ٥$^{-٢}$ = س ∴ س = $\frac{١}{٢٥}$

③ ٣^{٤} = س^{٢} ∴ ٨١ = س^{٢} ∴ س = ± ٩

④ (٨١)$^{\frac{٣}{٤}}$ = س ∴ س = ٢٧

⑤ ٢$^{-٥}$ = س$^{-١}$ ∴ $\frac{١}{٣٢}$ = $\frac{١}{\text{س}}$ ∴ س = ٣٢

⑥ ٢ = لو$_{٣}$ س ∴ س = ٣^{٢} = ٩

⑦ (٣)^{٠} = ٢ س − ٥ ∴ ١ = ٢ س − ٥

∴ س = ٣

⑧ ٨$^{\frac{٢}{٣}}$ = $\sqrt[٣]{\text{س}^{٢} + ٤٨}$ ∴ ٨^{٢} = س^{٢} + ٤٨

∴ س^{٢} = ١٦ ∴ س = ± ٤

⑨ لو$_{٢}$ (س^{٢} − ٢ س) = ٣

∴ ٢^{٣} = س^{٢} − ٢ س

∴ س^{٢} − ٢ س − ٨ = ٠

∴ (س − ٤) (س + ٢) = ٠

∴ س = ٤ أو س = −٢

⑩ ٥ = | ٢ س + ١ |

∴ ٢ س + ١ = ٥ أو ٢ س + ١ = −٥

∴ س = ٢ أو س = −٣

⑪ ٢^{٤} = س (س + ٦)

∴ س^{٢} + ٦ س − ١٦ = ٠

∴ (س − ٢) (س + ٨) = ٠

∴ س = ٢ أو س = −٨

⑫ ٣ = س^{٢} − ٢ س

∴ س^{٢} − ٢ س − ٣ = ٠

∴ (س − ٣) (س + ١) = ٠

∴ س = ٣ أو س = −١

⑬ (لو$_{٣}$ س − ٤) (لو$_{٣}$ س − ٥) = ٠

∴ لو$_{٣}$ س = ٤ ومنها س = ٣^{٤} = ٨١

أو لو$_{٣}$ س = ٥ ومنها س = ٣^{٥} = ٢٤٣

(١٤) ٢^س − ٢^(س−٢) = ٢٤

∴ ٢^(س−٢) (٢^٢ − ١) = ٨   ∴ ٢^(س−٢) = ١

∴ س − ٢ = ٠   ∴ س = ٢

(١٥) ٢^(لو٤ (س + ١,٢٥)) = ٢^−١

∴ لو٤ (س + ١,٢٥) = −١

∴ ٤^−١ = س + ١,٢٥   ∴ س = −١

(١٦) لو١٠ س − ٢ = ± ٢

∴ لو١٠ س − ٢ = ٢ ومنها لو١٠ س = ٤

∴ س = ١٠^٤ أو لو١٠ س − ٢ = −٢

ومنها لو١٠ س = ٠   ∴ س = ١

٥

(١) س^٣ = ١٢٥ = ٥^٣   ∴ س = ٥

∴ مجموعة الحل = {٥}

(٢) س^٣ = ٢   ∴ س = ∛٢

∴ مجموعة الحل = { ∛٢ }

(٣) س^−٣ = ٢   ∴ س^٣ = ١/٢

∴ س = ١/∛٢   (ويرفض الحل السالب)

∴ مجموعة الحل = { ١/∛٢ }

(٤) س^(−٣/٤) = ١/١٠٠٠

∴ س = (١٠^−٣)^(−٤/٣) = ١٠٠٠٠

∴ مجموعة الحل = {١٠٠٠٠}

(٥) (−س)^٤ = ٨١ = ٣^٤

∴ س = −٣   (ويرفض الحل الموجب)

∴ مجموعة الحل = {−٣}

(٦) (س − ١)^٣ = ٢٧ = ٣^٣   ∴ س − ١ = ٣

∴ س = ٤   ∴ مجموعة الحل = {٤}

(٧) (س − ١)^٢ = ٧ − س

∴ س^٢ − ٢ س + ١ = ٧ − س

∴ س^٢ − س − ٦ = ٠

∴ (س + ٢) (س − ٣) = ٠

∴ س = −٢ (مرفوض) أو س = ٣

∴ مجموعة الحل = {٣}

(٨) (٢/س)^−٢ = ٦٤   ∴ (س/٢)^٢ = ٤^٢ ... [illegible]

∴ س/٢ = ٤   ∴ س = ٨

∴ مجموعة الحل = {٨}

(٩) س^٦ = ٥ س   ∴ س^٦ − ٥ س = ٠

∴ س (س − ٥) = ٠   ∴ س = ٠ (مرفوض)

أو س = ٥

∴ مجموعة الحل = {٥}

(١٠) س^(٥س) = س^٩   ∴ ٥ س = ٩

∴ س = ٩/٥ مع ملاحظة أن س ∈ ح^+ − {١}

∴ مجموعة الحل = { ٩/٥ }

(١١) لو٣ لو٣ ٢٧ = ٩^١ = ١   ∴ لو٣ ٢٧ = ٣

∴ س^٣ = ٢٧ = ٣^٣   ∴ س = ٣

∴ مجموعة الحل = {٣}

(١٢) س = س^٢ − ١٢

∴ س^٢ − س − ١٢ = ٠

∴ (س − ٤) (س + ٣) = ٠

∴ س = ٤ أو س = −٣ (مرفوض)

∴ مجموعة الحل = {٤}

(١٣) س − ٢ = √(س − ٢) + ٠ [illegible]

∴ √(س − ٢) = س − ٢ وبتربيع الطرفين

∴ س − ٢ = س^٢ − ٤ س + ٤

∴ س^٢ − ٥ س + ٦ = ٠

∴ (س − ٢) (س − ٣) = ٠

∴ س = ٢ أو س = ٣

∴ مجموعة الحل = {٢ ، ٣}

(١٤) (لو٣ س)^٢ − ٨ لو٣ س + ١٥ = ٠

∴ (لو٣ س − ٥) (لو٣ س − ٣) = ٠

∴ لو٣ س = ٥ أو لو٣ س = ٣

∴ س = ٣^٥ = ٢٤٣ أو س = ٣^٣ = ٢٧

∴ مجموعة الحل = {٢٤٣ ، ٢٧}

(١٥) بفرض أن : لو٣ (س − ٢) = ك

∴ س − ٢ = ٣^ك   (١)

، لو٣ (س − ٢) = ص [illegible]

∴ س − ٢ = ٢٧ = ٣^... [illegible]   (٢)

، من (١) ، (٢) ينتج أن : ٣ ص = ك [illegible]

∴ ص + ٣ ص = ٤   ∴ ص = ١

∴ ك = ٣

أي أن : لو٣ (س − ٢) = ٣

∴ ٣^٣ = س − ٢   ∴ س = ٢٩

∴ مجموعة الحل = {٢٩}

٦

(١) ٤^(س) = ٨ √٢ [illegible]   ∴ ٢^(٢س) = ٢^(٧/٢)

∴ ٢ س = ٧/٢   ∴ س = ٧/٤

(٢) (√٥)^(س) = ١٢٥ √٥ = (√٥)^٧ [illegible]

∴ س = ٧ [illegible]   ∴ س = ± ... [illegible]

(٣) [illegible]

(١) لو٥ (٢^(س−٣) − ٤) = ٤ − س [illegible]

∴ ٢^(س−٣) − ٥^(٤−س) [illegible]

[illegible]

(٢) ٤^٢ = ١٢ + لو٥ (س − ١) [illegible]

∴ لو٥ (س − ١) = ٢   ∴ ٥^٢ = س − ١

∴ س = ٢٦ [illegible]

(٣) [illegible]

∴ (س − ٣)^٢ = ٠   ∴ س = ٣

٧

(١) [illegible]   (٢) [illegible]   (٣) [illegible]

٨

(١) [illegible]   (٢) [illegible]   (٣) [illegible]

٩

(١) [illegible]

وبالتعويض في المعادلة الأولى

[illegible]

∴ مجموعة الحل = [illegible]

(٢) [illegible]

١٠

∵ لو$_{١٦}$ ٤٩ = أ ∴ (١٦)^{أ} = ٤٩

∴ (٤^{٢})^{أ} = ٧^{٢} ∴ (٤^{أ})^{٢} = ٧^{٢}

∴ ٤^{أ} = ٧

، ∵ لو$_{٧}$ ٢,٥ = ب ∴ ٧^{ب} = ٢,٥

∴ ٤$^{أب+١}$ = ٤^{أب} × ٤ = (٤^{أ})^{ب} × ٤ = ٧^{ب} × ٤

= ٢,٥ × ٤ = ١٠

١١

① ٢س + ١ > ٠ ∴ س > -$\frac{١}{٢}$

∴ مجال الدالة =]-$\frac{١}{٢}$ ، ∞[

② س > ٠ ∴ مجال الدالة =]٠ ، ∞[

③ الدالة معرفة لجميع قيم س التي تحقق أن
{ س > ٠ ، س ≠ ١ }

أي أن : مجال الدالة =]٠ ، ∞[- {١}

④ الدالة معرفة لجميع قيم س التي تحقق أن
{ س > ٠ ، س - ٢ > ٠ ، س - ٢ ≠ ١ } أي أن : { س > ٠ ، س > ٢ ، س ≠ ٣ }

أي أن : مجال الدالة =]٢ ، ∞[- {٣}

⑤ الدالة معرفة لجميع قيم س التي تحقق أن
{ س > ٠ ، ٢ - س > ٠ ، ٢ - س ≠ ١ } أي أن : { س > ٠ ، س < ٢ ، س ≠ ١ }

أي أن : مجال الدالة =]٠ ، ٢[- {١}

⑥ الدالة معرفة لجميع قيم س التي تحقق
{ س - ٢ > ٠ ، ٥ - س > ٠ ، ٥ - س ≠ ١ } أي أن : { س > ٢ ، س < ٥ ، س ≠ ٤ }

أي أن : مجال الدالة =]٢ ، ٥[- {٤}

⑦ الدالة معرفة لجميع قيم س التي تحقق
{ س^{٢} > ٠ ، س - ٢ > ٠ ، س - ٢ ≠ ١ } أي أن : { س^{٢} > ٠ ، س > ٢ ، س ≠ ٤ }

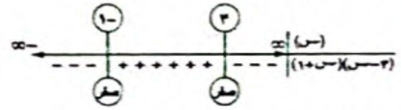
أي أن : مجال الدالة =]٢ ، ∞[- {٤}

⑧ الدالة معرفة لجميع قيم س التي تحقق
{ ٢س + ١ > ٠ ، س + ٢ > ٠ ، س + ٢ ≠ ١ } أي أن : { س > -$\frac{١}{٢}$ ، س > -٢ ، س ≠ -١ }

أي أن : مجال الدالة =]-$\frac{١}{٢}$ ، ∞[

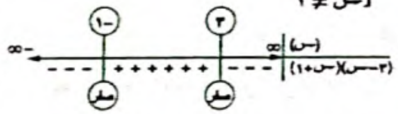
⑨ الدالة معرفة لجميع قيم س التي تحقق

(٣ - س) (س + ١) > ٠



أي أن : مجال الدالة =]-١ ، ٣[

⑩ الدالة معرفة لجميع قيم س التي تحقق
{ (٣ - س) (س + ١) > ٠ ، س > ٠ ، س ≠ ١ }



أي أن : مجال الدالة =]٠ ، ٣[- {١}

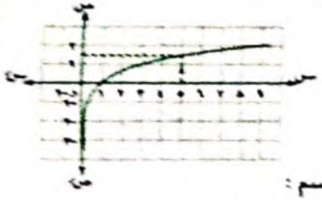
١٢

∵ منحنى الدالة يمر بالنقطة (٨١ ، ٤)

∴ ٤ = لو$_{أ}$ ٨١ ∴ أ^{٤} = ٨١

∴ أ = ٣ (ويرفض الحل السالب)

س	$\frac{١}{٩}$	$\frac{١}{٣}$	١	٣	٩
د (س)	-٢	-١	٠	١	٢



من الرسم :

المجال = ح$^{+}$ ، المدى = ح

والدالة تزايدية على مجالها

، نقطة التقاطع مع محور السينات (١ ، ٠)

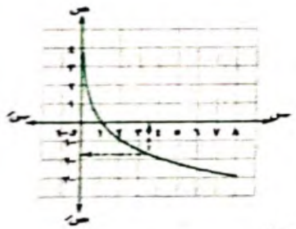
، لو$_{٣}$ ٥ ≃ ١,٥

١٣

∵ منحنى الدالة يمر بالنقطة ($\frac{١}{٨}$ ، ٣)

∴ ٣ = لو$_{أ}$ $\frac{١}{٨}$ ∴ أ^{٣} = $\frac{١}{٨}$ ∴ أ = $\frac{١}{٢}$

س	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٢}$	١	٢	٤
د (س)	٢	١	٠	-١	-٢



من الرسم :

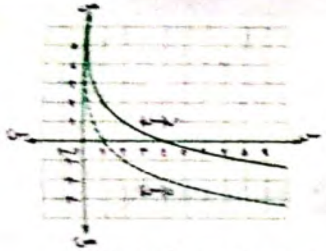
المدى = ح ، الدالة تناقصية على مجالها

، نقطة التقاطع مع محور السينات = (١ ، ٠)

، لو$_{\frac{١}{٢}}$ ٣$\frac{١}{٢}$ ≃ -١,٨

١٤

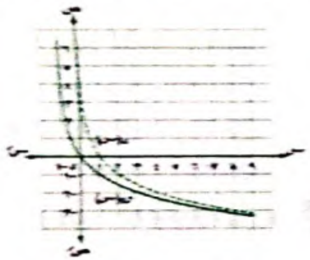
① منحنى الدالة ر هو نفس منحنى الدالة د بإزاحة رأسية قدرها ٢ وحدة في اتجاه و ص



من الرسم : المجال =]٠ ، ∞[

، المدى = ح ، الدالة تناقصية على مجالها.

② منحنى الدالة ع هو نفس منحنى الدالة د بإزاحة أفقية قدرها وحدة واحدة في اتجاه و س

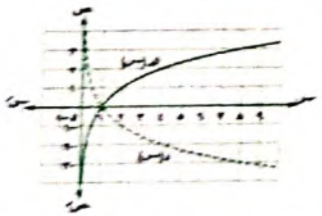


من الرسم : المجال =]-١ ، ∞[

، المدى = ح

، الدالة تناقصية على مجالها.

③ منحنى الدالة هـ هو نفس منحنى الدالة د بالانعكاس في محور السينات



من الرسم : المجال =]٠ ، ∞[، المدى = ح

، الدالة تزايدية على مجالها.

⑫ (٣ − ٥ س) لو ٨ − (٤ + س) لو ٧ = لو ٢

∴ س (−٥ لو ٨ − لو ٧) = لو ٢ − ٣ لو ٨ + ٤ لو ٧

∴ س = (لو ٢ − ٣ لو ٨ + ٤ لو ٧) / (−٥ لو ٨ − لو ٧) ≃ −٠,١٨

⑬ لو (٤^(س + ١)) = س − ٢

∴ ٤^(س + ١) = ٥^(س − ٢)

∴ (س + ١) لو ٤ = (س − ٢) لو ٥

∴ س لو ٤ + لو ٤ = س لو ٥ − ٢ لو ٥

∴ س (لو ٤ − لو ٥) = − لو ٤ − ٢ لو ٥

∴ س = (لو ٤ + ٢ لو ٥) / (لو ٥ − لو ٤) ≃ ٢٠,٦٤

٤

① لو_٣ ١٥ = لو_٣ ٥ + لو_٣ ٣ = ١,٤٦٥ + ١ = ٢,٤٦٥

② لو_٣ ١٣٥ = لو_٣ ٢٧ + لو_٣ ٥ = ٣ لو_٣ ٣ + لو_٣ ٥

= ٣ + ١,٤٦٥ = ٤,٤٦٥

③ لو_٣ ٥/٩ = لو_٣ ٥ − لو_٣ ٩ = لو_٣ ٥ − ٢ لو_٣ ٣

= ١,٤٦٥ − ٢ = −٠,٥٣٥

٥

① لو ٦ = لو ٢ + لو ٣ = س + ص

② لو_١٨ ١٢ = لو ١٢ / لو ١٨ = (لو ٤ + لو ٣) / (لو ٢ + لو ٩)

= (٢ لو ٢ + لو ٣) / (لو ٢ + ٢ لو ٣) = (٢ س + ص) / (س + ٢ ص)

٦

① (خطأ) والتصحيح : لو_س س^س = س

لكل س ∈ ع^+ − {١}

② (خطأ) والتصحيح : لو س^ن = ن لو س لكل س ∈ ع^+

③ (خطأ) والتصحيح : لو_م س ص = لو_م س + لو_م ص

④ (خطأ) والتصحيح : لو_م س ص = لو_م س + لو_م ص

⑤ (صحيحة) ⑥ (صحيحة) ⑦ (صحيحة)

⑧ (خطأ) والتصحيح : لو_م س^٤ = ٤ لو_م |س|

٧

① لو_م (س + ٦) = لو_م س^٢ ∴ س + ٦ = س^٢

∴ س^٢ − س − ٦ = ٠

∴ (س + ٢) (س − ٣) = ٠

∴ س = −٢ (مرفوض) أ، س = ٣

∴ م.ح = {٣}

② لو_م س (س + ٦) = ٣

∴ ٤^٣ = س^٢ + ٦ س

∴ س^٢ + ٦ س − ٦٤ = ٠

∴ س = −٣ + √٧٣

أ، س = −٣ − √٧٣ (مرفوض)

∴ م.ح = {−٣ + √٧٣}

③ لو_م س^٢ = ٢ ∴ ٢ لو_م س = ٢

∴ لو_م س = ١ ∴ س = ٣

∴ مجموعة الحل = {٣}

④ لو_م (س − ١) (س + ١) = لو_م ٨

∴ س^٢ − ١ = ٨

∴ س^٢ = ٩ ∴ س = ٣

أ، س = −٣ (مرفوض) ∴ م.ح = {٣}

⑤ لو (س + ٨)/(س − ١) = ١ ∴ (س + ٨)/(س − ١) = ١٠

∴ ١٠ س − ١٠ = س + ٨

∴ ٩ س = ١٨ ∴ س = ٢

∴ م.ح = {٢}

⑥ لو_م س = لو_م ٤ − لو_م (س − ٣)

∴ لو_م س = لو_م ٤/(س − ٣) ∴ س = ٤/(س − ٣)

∴ س^٢ − ٣ س − ٤ = ٠

∴ (س + ١) (س − ٤) = ٠

∴ س = −١ (مرفوض) أ، س = ٤

∴ م.ح = {٤}

⑦ لو_م ٢ س^٢ = لو_م ١٨ ∴ ٢ س^٢ = ١٨

∴ س^٢ = ٩ ∴ س = ± ٣

∴ مجموعة الحل = {٣ ، −٣}

⑧ لو_م (٧ س^٢ − ٤) = لو_م (س^٢ × ٣)

∴ ٧ س^٢ − ٤ = ٣ س^٢ ∴ ٤ س^٢ = ٤

∴ س = ١ أ، س = −١ (مرفوض)

∴ مجموعة الحل = {١}

⑨ لو_م (س + ٢)^٥/(س − ١)^٥ = لو_م ٢^٥ ∴ (س + ٢)/(س − ١) = ٢

∴ س + ٢ = ٢ س − ٢ ∴ س = ٤

∴ مجموعة الحل = {٤}

⑩ لو (٨ − س) (س − ٦) = ٠

∴ ١٤ س − س^٢ − ٤٨ = ١

∴ س^٢ − ١٤ س + ٤٩ = ٠

∴ (س − ٧)^٢ = ٠ ∴ س = ٧

∴ م.ح = {٧}

⑪ لو (س + ٢) (س − ٢) = لو ١٠ − لو ٢

∴ لو (س^٢ − ٤) = لو ١٠/٢ = لو ٥

∴ س^٢ − ٤ = ٥ ∴ س^٢ = ٩

∴ س = ٣ (والسالب مرفوض)

∴ مجموعة الحل = {٣}

⑫ لو ٧ × لو ٣^٦ = لو ٧^٢ × لو س^٣

∴ ٦ لو ٧ لو ٣ = ٦ لو ٧ لو س

∴ لو ٣ = لو س ∴ س = ٣

∴ مجموعة الحل = {٣}

⑬ لو_٢ (س^٢ + ٦ س + ٩)/(س − ١) = لو_٢ ٢^٤ = ٤

∴ (س^٢ + ٦ س + ٩)/(س − ١) = ٢^٤ = ١٦

∴ س^٢ − ١٠ س + ٢٥ = ٠

∴ (س − ٥)^٢ = صفر

∴ س = ٥ ∴ مجموعة الحل = {٥}

⑭ لو س = ((لو ٣)^٢ − ٣ لو ٣)/(لو ٣ − لو ١٠٠٠) = لو ٣ (لو ٣ − ٣)/(لو ٣ − ٣) = لو ٣

∴ س = ٣ ∴ مجموعة الحل = {٣}

⑮ (لو س)^٢ − لو س^٢ − ٣ = ٠

∴ (لو س)^٢ − ٢ لو س − ٣ = ٠

∴ (لو س + ١) (لو س − ٣) = ٠

∴ لو س = −١ أ، لو س = ٣

∴ س = ٠,١ أ، س = ١٠٠٠

∴ م.ح = {٠,١ ، ١٠٠٠}

⑯ (لو س)^٢ + ٢ لو س + ١ = (لو ٥)^٢

∴ (لو س + ١)^٢ = (لو ٥)^٢

∴ لو س + ١ = ± لو ٥

∴ لو س = لو ٥ − ١ = لو ٥ − لو ١٠ = لو ١/٢

∴ س = ١/٢

أ، لو س = − لو ٥ − ١ = − لو ٥ − لو ١٠

= − لو ٥٠ = لو (٥٠)^(−١)

∴ س = ١/٥٠

∴ مجموعة الحل = {١/٢ ، ١/٥٠}

⑰ لو_س (١٤ × ٤)/٢٧ = ٣ لو_س س + لو_س ٧

= لو_س (س^٣ × ٧)

∴ ٧ س^٣ = ٥٦/٢٧ ∴ س^٣ = ٨/٢٧

∴ س = ٢/٣

∴ مجموعة الحل = {٢/٣}

⑱ لو (√(٣ س − ١) × √(س − ٢)) = لو ٢٠ − لو ١٠

∴ لو √((٣ س − ١)(س − ٢)) = لو ٢

∴ √((٣ س − ١)(س − ٢)) = ٢

∴ (٣ س − ١) (س − ٢) = ٢^٢

∴ ٣ س^٢ – ٧ س – ٦ = ٠

∴ (٣ س + ٢) (س – ٣) = ٠

∴ س = – $\frac{٢}{٣}$ (مرفوض) أ، س = ٣

∴ مجموعة الحل = {٣}

٨

(١) $\frac{\text{لو س}}{\text{لو ٢}} = \frac{\text{لو ٩}}{\text{لو ٤}}$ ∴ $\frac{\text{لو س}}{\text{لو ٢}} = \frac{\text{٢ لو ٣}}{\text{٢ لو ٢}}$

∴ لو س = لو ٣ ∴ س = ٣

∴ م.ح = {٣}

(٢) بأخذ لوغاريتم للطرفين

∴ لو ٣^{لو س} = لو ٢^{لو ٣}

∴ لو س لو ٣ = لو ٣ لو ٢ ∴ لو س = لو ٢

∴ س = ٢ ∴ م.ح = {٢}

(٣) بأخذ لوغاريتم للطرفين

∴ لو س^{لو س} = لو ١٠

∴ لو س لو س = ١ ∴ (لو س)^٢ = ١

∴ لو س = ١ أ، لو س = –١

∴ س = ١٠ أ، س = ٠٫١

∴ م.ح = {١٠ ، ٠٫١}

(٤) $\frac{\text{لو س}}{\text{لو ٣}} = \frac{\text{لو ٣}}{\text{لو س}}$ ∴ (لو س)^٢ = (لو ٣)^٢

∴ لو س = لو ٣ ومنها س = ٣

أ، لو س = – لو ٣ = لو ٣^{-١}

ومنها س = $\frac{١}{٣}$ ∴ م.ح = {٣ ، $\frac{١}{٣}$}

(٥) (س)^{٢ لو_س س} = ٩ لو ١٠ ∴ س^٢ = ٩

∴ س = ٣ أ، س = –٣ (مرفوض)

∴ مجموعة الحل = {٣}

(٦) ٤^{لو س} × ٥^{لو س} = ٨٠٠٠

∴ ٢٠^{لو س} = ٨٠٠٠

∴ ٢٠^{لو س} = ٢٠^٣

∴ لو س = ٣ ∴ س = ١٠٠٠

∴ مجموعة الحل = {١٠٠٠}

(٧) ٢^{(لو س)^٢} × ٢^٦ = ٢^{٥ لو س}

∴ (لو س)^٢ + ٦ = ٥ لو س

∴ (لو س)^٢ – ٥ لو س + ٦ = ٠

∴ (لو س – ٢) (لو س – ٣) = ٠

∴ لو س = ٢ ومنها س = ١٠٠

أ، لو س = ٣ ومنها س = ١٠٠٠

∴ مجموعة الحل = {١٠٠ ، ١٠٠٠}

(٨) بالضرب × ٢ لو س

∴ ٢ (لو س)^٢ – ٣ لو س – ٢ = ٠

∴ (٢ لو س + ١) (لو س – ٢) = ٠

∴ لو س = –$\frac{١}{٢}$ ومنها س = $\frac{١}{\sqrt{١٠}}$

أ، لو س = ٢ ومنها س = ١٠٠

∴ مجموعة الحل = {$\frac{١}{\sqrt{١٠}}$ ، ١٠٠}

(٩) بفرض أن لو_٢ س = ك ∴ لو_س ٢ = $\frac{١}{ك}$

∴ ك + $\frac{١}{ك}$ = ٢ ∴ ك^٢ – ٢ ك + ١ = ٠

∴ (ك – ١)^٢ = ٠ ∴ ك = ١

∴ لو_٢ س = ١ ∴ س = ٢

∴ م.ح = {٢}

(١٠) بفرض أن لو س = ك ∴ لو_س ١٠ = $\frac{١}{ك}$

∴ لو س – ٢ لو_س ١٠ = ١

∴ ك – $\frac{٢}{ك}$ = ١ ∴ ك^٢ – ك – ٢ = ٠

∴ (ك + ١) (ك – ٢) = ٠

∴ ك = –١ أ، ك = ٢

∴ لو س = –١ أ، لو س = ٢

∴ س = ١٠^{-١} = $\frac{١}{١٠}$ أ، س = ١٠^٢ = ١٠٠

∴ م.ح = {$\frac{١}{١٠}$ ، ١٠٠}

(١١) لو $\frac{س}{٢}$ × لو $\left(\frac{س}{٢}\right)^{-١}$ = –١

∴ – (لو $\frac{س}{٢}$)^٢ = –١ ∴ (لو $\frac{س}{٢}$)^٢ = ١

∴ لو $\frac{س}{٢}$ = ١ ومنها $\frac{س}{٢}$ = ١٠

∴ س = ٢٠

أ، لو $\frac{س}{٢}$ = –١ ومنها $\frac{س}{٢}$ = $\frac{١}{١٠}$

∴ س = ٠٫٢

∴ مجموعة الحل = {٢٠ ، ٠٫٢}

(١٢) (لو س)^٣ = ٩ لو س

∴ (لو س)^٣ – ٩ لو س = ٠

∴ لو س ((لو س)^٢ – ٩) = ٠

∴ لو س (لو س – ٣) (لو س + ٣) = ٠

∴ لو س = ٠ ومنها س = ١

أ، لو س = ٣ ومنها س = ١٠٠٠

أ، لو س = –٣ ومنها س = ٠٫٠٠١

∴ مجموعة الحل = {١ ، ١٠٠٠ ، ٠٫٠٠١}

(١٣) بأخذ اللوغاريتم للطرفين

∴ لو س لو س = لو (١٠٠ س)

∴ (لو س)^٢ = لو ١٠٠ + لو س

∴ (لو س)^٢ – لو س – ٢ = ٠

∴ (لو س – ٢) (لو س + ١) = ٠

∴ لو س = ٢ أ، لو س = –١

∴ س = ١٠٠ أ، س = $\frac{١}{١٠}$

∴ م.ح = {١٠٠ ، $\frac{١}{١٠}$}

(١٤) (لو س + ٢) (لو س – لو ١٠٠) = ٥

∴ (لو س + ٢) (لو س – ٢) = ٥

∴ (لو س)^٢ – ٤ = ٥ ∴ (لو س)^٢ = ٩

∴ لو س = ٣ ومنها س = ١٠٠٠

أ، لو س = –٣ ومنها س = ٠٫٠٠١

∴ مجموعة الحل = {١٠٠٠ ، ٠٫٠٠١}

(١٥) $\frac{\text{لو س}}{\text{لو ٣}} + \frac{\text{لو س}^٢}{\text{لو ٩}}$ + ٣ = ٠

∴ $\frac{\text{لو س}}{\text{لو ٣}} + \frac{\text{٢ لو س}}{\text{٢ لو ٣}}$ = –٣

∴ $\frac{\text{٢ لو س}}{\text{لو ٣}}$ = –٣ ∴ لو س = –$\frac{٣}{٢}$ لو ٣

∴ لو س = لو ٣^{-٣/٢} = لو $\frac{١}{٣\sqrt{٣}}$

∴ س = $\frac{١}{٣\sqrt{٣}}$

∴ مجموعة الحل = {$\frac{١}{٣\sqrt{٣}}$}

(١٦) $\frac{\text{لو س}}{\text{لو ٣}} = \frac{\text{لو (س + ٦)}}{\text{لو ٩}}$

∴ $\frac{\text{لو س}}{\text{لو ٣}} = \frac{\text{لو (س + ٦)}}{\text{٢ لو ٣}}$

∴ ٢ لو س = لو (س + ٦)

∴ س^٢ = س + ٦ ∴ س^٢ – س – ٦ = ٠

∴ (س – ٣) (س + ٢) = ٠

∴ س = ٣ أ، س = –٢ (مرفوض)

∴ مجموعة الحل = {٣}

(١٧) $\frac{\text{لو س}}{\text{لو ٢}} + \frac{\text{لو س}}{\text{لو ٤}}$ = –$\frac{٣}{٢}$

∴ $\frac{\text{لو س}}{\text{لو ٢}} + \frac{\text{لو س}}{\text{٢ لو ٢}}$ = –$\frac{٣}{٢}$

∴ $\frac{\text{٣ لو س}}{\text{٢ لو ٢}}$ = –$\frac{٣}{٢}$ ∴ $\frac{\text{لو س}}{\text{لو ٢}}$ = –١

∴ لو س = لو ٢^{-١} ∴ س = $\frac{١}{٢}$

∴ م.ح = {$\frac{١}{٢}$}

⑱ ∵ $\sqrt{\text{لو}_{٢}\,\text{س}}$ = لو٢ $\sqrt{\text{س}}$ بالتربيع

∴ لو٢ س = لو٢ $\sqrt{\text{س}}$ × لو٢ $\sqrt{\text{س}}$

= لو٢ $\text{س}^{\frac{١}{٢}}$ × لو٢ $\text{س}^{\frac{١}{٢}}$

∴ لو٢ س = $\frac{١}{٤}$ (لو٢ س)^{٢}

∴ (لو٢ س)^{٢} − ٤ لو٢ س = ٠

∴ لو٢ س (لو٢ س − ٤) = ٠

∴ لو٢ س = ٠ ، أ، لو٢ س = ٤

∴ س = ٢^{٠} = ١ ، أ، س = ٢^{٤} = ١٦

∴ م.ح = {١ ، ١٦}

⑲ بالتربيع للطرفين

∴ س$^{\text{لو}\sqrt{\text{س}}}$ = ١٠٠ بأخذ اللوغاريتم للطرفين

∴ لو $\sqrt{\text{س}}$ لو س = ٢

∴ $\frac{١}{٢}$ (لو س)^{٢} = ٢ ∴ (لو س)^{٢} = ٤

∴ لو س = ٢ ، أ، لو س = −٢

∴ س = ١٠٠ ، أ، س = $\frac{١}{١٠٠}$

∴ م.ح = {١٠٠ ، $\frac{١}{١٠٠}$}

⑳ $\sqrt{\text{لو}\left(٩١ + ٣\sqrt{\frac{\text{س}}{٢}}\right)} = \sqrt{٢}$

∴ لو $\left(٩١ + ٣\sqrt{\frac{\text{س}}{٢}}\right)$ = ٢

∴ ٩١ + ٣ $\sqrt{\frac{\text{س}}{٢}}$ = ١٠^{٢} = ١٠٠

∴ ٣ $\sqrt{\frac{\text{س}}{٢}}$ = ٩ = ٣^{٢} ∴ $\sqrt{\frac{\text{س}}{٢}}$ = ٢

∴ $\frac{\text{س}}{٢}$ = ٤ ∴ س = ٨

∴ مجموعة الحل = {٨}

㉑ لو ١ − لو (٢$^{\text{س}}$ + س − ١) = س (لو ٥ − لو ١٠)

∴ − لو (٢$^{\text{س}}$ + س − ١) = س لو $\frac{١}{٢}$

∴ − لو (٢$^{\text{س}}$ + س − ١) = − س لو ٢

∴ لو (٢$^{\text{س}}$ + س − ١) = لو ٢$^{\text{س}}$

∴ ٢$^{\text{س}}$ + س − ١ = ٢$^{\text{س}}$

∴ س − ١ = ٠ ∴ س = ١

∴ م.ح = {١}

٩

① من هندسة الشكل

$\frac{\text{لو س}}{\text{لو ٦}} = \frac{\text{لو ٤٩}}{\text{لو ٧}}$ ∴ $\frac{\text{لو س}}{\text{لو ٦}} = \frac{\text{٢ لو ٧}}{\text{لو ٧}}$

∴ ٢ لو ٦ = لو س ∴ س = ٣٦

② م ء = لو٨١ ٢٤٣ = لو٨١ (٨١)$^{\frac{٥}{٤}}$ = $\frac{٥}{٤}$ لو٨١ ٨١ = $\frac{٥}{٤}$

، ∵ م ء = $\frac{١}{٣}$ أ ء

∴ أ ء = $\frac{١٥}{٤}$ ، أ ء = $\frac{١}{٢}$ ب حـ

∴ ب حـ = ٢ × $\frac{١٥}{٤}$ = ٧,٥ سم

③ ق(∠ أ) = ٩٠° ، $\overline{\text{أ ء}} \perp \overline{\text{حـ ب}}$

∴ (أ حـ)^{٢} = حـ ء × حـ ب

∴ (٥ $\sqrt{٣}$)^{٢} = لوس ٢٧ × (لوس ٢٧ + لوس ٣)

∴ ٧٥ = لوس ٢٧ × لوس ٨١

∴ ٧٥ = ٣ لوس ٣ × ٤ لوس ٣

∴ ٧٥ = ١٢ (لوس ٣)^{٢}

∴ (لوس ٣)^{٢} = $\frac{٧٥}{١٢}$ = $\frac{٢٥}{٤}$

∴ لوس ٣ = $\frac{٥}{٢}$ ومنها س$^{\frac{٥}{٢}}$ = ٣

∴ س = ٣$^{\frac{٢}{٥}}$ ≃ ١,٦

أ، لوس ٣ = $\frac{-٥}{٢}$ ومنها س$^{-\frac{٥}{٢}}$ = ٣

∴ س = $\left(\frac{١}{٣}\right)^{\frac{٢}{٥}}$ ≃ ٠,٦

④ ∵ $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ ينصف ∠ أ ∴ $\frac{\text{حـ أ}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{حـ ء}}{\text{ء ب}}$

∴ $\frac{\text{لو}_{٢}\ ٥}{\text{لو}_{٤}\ \text{س}} = \frac{\text{لو ب}}{\text{لو ب}^{٢}}$ ∴ $\frac{\text{لو}_{٢}\ ٥}{\text{لو}_{٤}\ \text{س}} = \frac{\text{لو ب}}{\text{٢ لو ب}}$

∴ ٢ لو٢ ٥ × لو٤ س ∴ لو٢ ٢٥ = لو٤ س

∴ $\frac{\text{لو ٢٥}}{\text{لو ٢}} = \frac{\text{لو س}}{\text{لو ٤}}$ ∴ $\frac{\text{لو ٢٥}}{\text{لو ٢}} = \frac{\text{لو س}}{\text{٢ لو ٢}}$

∴ لو س = ٢ لو ٢٥ = لو ٦٢٥

∴ س = ٦٢٥

١٠

① ∵ لو ص^{٣} = ٣ − لو ١٢٥

∴ لو ص^{٣} = لو ١٠٠٠ − لو ١٢٥ = لو $\frac{١٠٠٠}{١٢٥}$

∴ ص^{٣} = ٨ ∴ ص = ٢

، ∵ لو س ص = ١ − لو ٥ وبالتعويض عن ص = ٢

∴ لو ٢ س = ١ − لو ٥ = لو ١٠ − لو ٥ = لو ٢

∴ ٢ س = ٢ ∴ س = ١

∴ مجموعة الحل = {(١ ، ٢)}

② ∵ لو٣ (س ص) + ٢ = ٢ + لو٣ ٩

∴ لو٣ (س ص) = لو٣ ٩ ∴ س ص = ٩

، ∵ س = ١٠ − ص

∴ (١٠ − ص) ص = ٩

∴ ص^{٢} − ١٠ ص + ٩ = ٠

∴ (ص − ٩) (ص − ١) = ٠

∴ ص = ٩ ومنها س = ١ أ، ص = ١ ومنها س = ٩

∴ مجموعة الحل = {(١ ، ٩) ، (٩ ، ١)}

③ ∵ ٣ لو س + ٢ لو ص = ١١ (١)

، ٢ لو س − ٣ لو ص = ٣ (٢)

وبضرب (١) × ٣ ، (٢) × ٢ والجمع

∴ ١٣ لو س = ٣٩ ∴ لو س = ٣

∴ س = ١٠٠٠ وبالتعويض فى (١)

∴ ٣ لو ١٠٠٠ + ٢ لو ص = ١١

∴ ٩ + ٢ لو ص = ١١ ∴ لو ص = ١

∴ ص = ١٠

∴ مجموعة الحل = {(١٠٠٠ ، ١٠)}

١١

① الطرف الأيمن = لو٣ $\frac{\text{س}^{٥} \times \text{ص}^{٤}}{\text{س}^{٣}\,\text{ص}^{٢}}$ = لو٣ س^{٢} ص^{٢}

= لو٣ (س ص)^{٢} = ٢ لو٣ س ص

= ٢ لو٣ ٩ $\sqrt{٣}$ = ٢ لو٣ ٣$^{\frac{٥}{٢}}$ = ٥

② ∵ $\frac{١}{٢}$ لو أ = $\frac{١}{٥}$ لو ب = لو حـ ∴ حـ = أ$^{\frac{١}{٢}}$

∴ أ = حـ^{٢} ، حـ = ب$^{\frac{١}{٥}}$ ∴ ب = حـ^{٥}

∴ أ ب = حـ^{٢} × حـ^{٥} = حـ^{٨}

③ ∵ لو $\frac{\text{س} + \text{ص}}{٣}$ = $\frac{١}{٢}$ لو (س ص) = لو (س ص)$^{\frac{١}{٢}}$

∴ $\frac{\text{س} + \text{ص}}{٣}$ = (س ص)$^{\frac{١}{٢}}$ وبتربيع الطرفين

∴ س^{٢} + ص^{٢} + ٢ س ص = ٩ س ص

∴ س^{٢} + ص^{٢} = ٧ س ص

وبالقسمة على س ص : ∴ $\frac{\text{س}}{\text{ص}} + \frac{\text{ص}}{\text{س}}$ = ٧

④ ∵ ٣$^{\text{لو}_{أ}\,\text{س}}$ = أ وبأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس أ

∴ لوأ س لوأ ٣ = ١

∴ لوأ س معكوس ضربى للعدد لوأ ٣

، عندما أ = ٩ ∴ لو٩ س لو٩ ٣ = ١

∴ لو٩ س لو٩ ٩$^{\frac{١}{٢}}$ = ١ ∴ $\frac{١}{٢}$ لو٩ س = ١

∴ لو٩ س = ٢

⑤ لوأ٢ ب^{٢} = $\frac{\text{لو ب}^{٢}}{\text{لو أ}^{٢}} = \frac{\text{٢ لو ب}}{\text{٢ لو أ}} = \frac{\text{لو ب}}{\text{لو أ}}$ = لوأ ب

∴ لوأ ب^{٢} + لوأ٢ ب^{٤} = ٢ لوأ ب + لوأ ب^{٢}

= ٢ لوأ ب + ٢ لوأ ب = ٤ لوأ ب

⑥ لو $\frac{\text{س}^{٣} \times \text{ص}^{٤}}{\text{س ص}^{٢}}$ = ٢ لو ٦

∴ لو س^{٢} ص^{٢} = لو ٣٦

∴ س^{٢} ص^{٢} = ٣٦

∴ س ص = ٦ ∴ س = $\frac{٦}{\text{ص}}$

(٧) الطرف الأيمن = ٢ لو (س + ص)

= لو (س + ص)^{٢}

= لو (س^{٢} + ٢ س ص + ص^{٢})

= لو (١٠ س ص)

= لو ١٠ + لو س + لو ص

= ١ + لو س + لو ص

(٨) لو (س + ص) = $\frac{١}{٢}$ لو (س ص) + لو ٢

∴ لو (س + ص) − لو ٢ = $\frac{١}{٢}$ لو (س ص)

∴ لو $\frac{\text{س + ص}}{٢}$ = لو (س ص)$^{\frac{١}{٢}}$

∴ $\frac{\text{س + ص}}{٢}$ = س$^{\frac{١}{٢}}$ ص$^{\frac{١}{٢}}$ بالتربيع

∴ س^{٢} + ص^{٢} + ٢ س ص = ٤ س ص

∴ س^{٢} − ٢ س ص + ص^{٢} = ٠

∴ (س − ص)^{٢} = ٠ ∴ س − ص = ٠

∴ س = ص

(٩) ∵ لو س ص^{٣} = ١ ∴ س ص^{٣} = ١٠

∴ س = $\frac{١٠}{\text{ص}^{٣}}$ (١)

، ∵ لو س^{٢} ص = ١ ∴ س^{٢} ص = ١٠

ومن معادلة (١) :

∴ $\frac{١٠٠}{\text{ص}^{٦}}$ × ص = ١٠ ∴ $\frac{١٠}{\text{ص}^{٥}}$ = ١

∴ ص^{٥} = ١٠ ∴ ص = ١٠$^{\frac{١}{٥}}$

ومن (١) : س = ١٠$^{\frac{٢}{٥}}$

∴ لو س ص = لو (١٠$^{\frac{١}{٥}}$ × ١٠$^{\frac{٢}{٥}}$)

= لو ١٠$^{\frac{٣}{٥}}$ = $\frac{٣}{٥}$ لو ١٠ = $\frac{٣}{٥}$

(١٠) الطرف الأيسر = $\frac{١}{\text{لو}_{\text{س}}\text{ ص}}$ = $\frac{١}{\frac{\text{لو ص}}{\text{لو س}}}$ = $\frac{\text{لو س}}{\text{لو ص}}$

= لو$_{\text{ص}}$ س

لو$_{٣}$ س + ٣ لو$_{\text{س}}$ ٣ = ٤

بفرض أن لو$_{٣}$ س = ك

∴ ك + $\frac{٣}{\text{ك}}$ = ٤ ∴ ك^{٢} + ٣ = ٤ ك

∴ ك^{٢} − ٤ ك + ٣ = ٠

∴ (ك − ١) (ك − ٣) = ٠

∴ ك = ١ أ، ك = ٣

∴ لو$_{٣}$ س = ١ أ، لو$_{٣}$ س = ٣

∴ س = ٣ أ، س = ٢٧

∴ م.ح = {٣ ، ٢٧}

(١١) ∵ لو$_{\text{س}}$ ص = $\frac{١}{\text{لو}_{\text{ص}}\text{ س}}$

، ∵ $\frac{٤}{\text{لو}_{\text{س}}\text{ ص}}$ + $\frac{٧}{\text{لو}_{\text{ع}}\text{ ص}}$ = ٣ لو$_{\text{ص}}$ ع

∴ ٤ لو$_{\text{ص}}$ س + ٧ لو$_{\text{ص}}$ ع = ٣ لو$_{\text{ص}}$ ع

∴ س^{٤} × ع^{٧} = ع^{٣}

∴ س^{٤} ع^{٤} = ١ ∴ س ع = ١

(١٢) ∵ ص = أ$^{\text{لو}_{\text{م}}\text{ س}}$

وبأخذ اللوغاريتم للأساس أ للطرفين

∴ لو$_{\text{م}}$ ص = لو$_{\text{م}}$ س لو$_{\text{م}}$ أ

∴ لو$_{\text{م}}$ ص = لو$_{\text{م}}$ س ∴ ص = س

∴ ٣$^{\frac{١}{٢}\text{لو}_{٣}٤٩}$ = ٣$^{\text{لو}_{٣}\sqrt{٤٩}}$ = ٣$^{\text{لو}_{٣}٧}$ = ٧

(١٣) لو$_{\text{م}^{\text{ص}}}$ أ$^{\text{س}}$ = $\frac{\text{لو أ}^{\text{س}}}{\text{لو أ}^{\text{ص}}}$ = $\frac{\text{س لو أ}}{\text{ص لو أ}}$ = $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$

∴ لو$_{\sqrt{٥}}$ ١٢٥ = لو$_{(٥)^{\frac{١}{٢}}}$ (٥)^{٣} = $\frac{٣}{\frac{١}{٢}}$ = ٩

، لو$_{٨}$ $\sqrt{٢}$ = لو$_{(٢)^{٣}}$ (٢)$^{\frac{١}{٢}}$ = $\frac{\frac{١}{٢}}{٣}$ = $\frac{١}{٦}$

∴ لو$_{\sqrt{٥}}$ ١٢٥ × لو$_{٨}$ $\sqrt{٢}$ = ٩ × $\frac{١}{٦}$ = $\frac{٣}{٢}$

(١٤) بوضع لو$_{\text{ب}}$ أ = س ∴ ب$^{\text{س}}$ = أ

∴ س لو ب = لو أ ∴ س = $\frac{\text{لو أ}}{\text{لو ب}}$

∴ لو$_{\text{ب}}$ أ = $\frac{\text{لو أ}}{\text{لو ب}}$

الطرف الأيمن = $\frac{١}{\text{لو}_{\text{م}}\text{ أ + لو}_{\text{م}}\text{ ب}}$ + $\frac{١}{\text{لو}_{\text{ب}}\text{ أ + لو}_{\text{ب}}\text{ ب}}$

= $\frac{١}{١ + \frac{\text{لو ب}}{\text{لو أ}}}$ + $\frac{١}{\frac{\text{لو أ}}{\text{لو ب}} + ١}$

= $\frac{\text{لو أ}}{\text{لو أ + لو ب}}$ + $\frac{\text{لو ب}}{\text{لو أ + لو ب}}$

= $\frac{\text{لو أ + لو ب}}{\text{لو أ + لو ب}}$ = ١

(١٥) لو$_{\text{ه}}$ $\frac{\text{أ × ب × ٤}}{(\text{أ + ب})^{٢}}$ = ٠ ∴ $\frac{\text{٤ أ ب}}{(\text{أ + ب})^{٢}}$ = ١

∴ (أ + ب)^{٢} = ٤ أ ب

∴ أ^{٢} + ٢ أ ب + ب^{٢} = ٤ أ ب

∴ أ^{٢} − ٢ أ ب + ب^{٢} = ٠

∴ (أ − ب)^{٢} = ٠ ∴ أ − ب = ٠

(١٦) س$^{٢\text{ لو س}}$ × س^{٣} = ١٠^{٥}

∴ لو (س$^{٢\text{ لو س}}$ × س^{٣}) = ٥ لو ١٠

∴ لو س$^{٢\text{ لو س}}$ + لو س^{٣} = ٥

∴ ٢ لو س لو س + ٣ لو س = ٥

∴ ٢ (لو س)^{٢} + ٣ لو س − ٥ = ٠

∴ (٢ لو س + ٥) (لو س − ١) = ٠

∴ لو س = −$\frac{٥}{٢}$ ومنها س = ١٠$^{-\frac{٥}{٢}}$ = $\frac{١}{١٠٠\sqrt{١٠}}$

أ، لو س = ١ ومنها س = ١٠

(١٧) ص − $\frac{١}{\text{ص}}$ = ١ ∴ ص^{٢} − ص − ١ = ٠

∴ ص = $\frac{١ \pm \sqrt{١ - ٤ × ١ × (-١)}}{٢ × ١}$ = $\frac{١ \pm \sqrt{٥}}{٢}$

∴ أ$^{\text{س}}$ = $\frac{١ \pm \sqrt{٥}}{٢}$ ∴ س لو$_{\text{م}}$ أ = لو$_{\text{م}}$ $\frac{١ \pm \sqrt{٥}}{٢}$

∴ س = لو$_{\text{م}}$ $\frac{١ + \sqrt{٥}}{٢}$ (ويرفض الحل الآخر)

(١٨) د (س + ١) + د (س − ١) = د (٣)

∴ لو (س + ١)^{٢} + لو (س − ١)^{٢} = لو ٣^{٢}

∴ لو (س + ١)^{٢} (س − ١)^{٢} = لو ٩

∴ (س^{٢} − ١)^{٢} = ٩

∴ س^{٢} − ١ = ٣

أ، س^{٢} − ١ = −٣ (مرفوض)

∴ س^{٢} = ٤ ∴ س = ± ٢

∴ م.ح = {٢ ، −٢}

(١٩) د (−س) = لو ($\sqrt{(-\text{س})^{٢} + ١}$ − (−س))

= لو ($\sqrt{\text{س}^{٢} + ١}$ + س)

بالضرب في المرافق

= لو [($\sqrt{\text{س}^{٢} + ١}$ + س) × $\frac{(\sqrt{\text{س}^{٢} + ١} - \text{س})}{\sqrt{\text{س}^{٢} + ١} - \text{س}}$]

= لو ($\frac{\text{س}^{٢} + ١ - \text{س}^{٢}}{\sqrt{\text{س}^{٢} + ١} - \text{س}}$)

= لو ($\frac{١}{\sqrt{\text{س}^{٢} + ١} - \text{س}}$)

= لو ($\sqrt{\text{س}^{٢} + ١}$ − س)$^{-١}$

= − لو ($\sqrt{\text{س}^{٢} + ١}$ − س) = − د (س)

∴ د (−س) = − د (س)

∴ الدالة فردية

(٢٠) لو ٤^{٤٧} = ٢٨,٣

∴ ٢٨ < لو ٤^{٤٧} < ٢٩

∴ لو ١٠^{٢٨} < لو ٤^{٤٧} < لو ١٠^{٢٩}

∴ ١٠^{٢٨} < ٤^{٤٧} < ١٠^{٢٩}

∴ عدد أرقام العدد ٤^{٤٧} = ٢٩ رقمًا

ثالثا مسائل تقيس مهارات التفكير

١

① (أ) ② (د) ③ (جـ) ④ (د)
⑤ (ب) ⑥ (جـ) ⑦ (جـ) ⑧ (جـ)
⑨ (أ) ⑩ (د) ⑪ (د) ⑫ (د)
⑬ (جـ) ⑭ (جـ) ⑮ (جـ)

إرشادات لحل رقم ١

① ∵ لو س = ع + لو ص

∴ لو س − لو ص = ع ∴ لو $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ = ع

∴ $\frac{\text{س}}{\text{ص}} = (١٠)^{\text{ع}}$ ∴ س = ص × $(١٠)^{\text{ع}}$

② المقدار = $\frac{١}{\text{لو}_{\text{ب}}\text{ب} + \text{لو}_{\text{ب}}\text{أ} + \text{لو}_{\text{ب}}\text{حـ}}$

$+ \frac{١}{\text{لو}_{\text{حـ}}\text{حـ} + \text{لو}_{\text{حـ}}\text{أ} + \text{لو}_{\text{حـ}}\text{ب}}$

$+ \frac{١}{\text{لو}_{\text{أ}}\text{أ} + \text{لو}_{\text{أ}}\text{ب} + \text{لو}_{\text{أ}}\text{حـ}}$

$= \frac{١}{\text{لو}_{\text{ب}}\text{أ ب حـ}} + \frac{١}{\text{لو}_{\text{حـ}}\text{أ ب حـ}} + \frac{١}{\text{لو}_{\text{أ}}\text{أ ب حـ}}$

= $\text{لو}_{\text{أ ب حـ}}$ ب + $\text{لو}_{\text{أ ب حـ}}$ حـ + $\text{لو}_{\text{أ ب حـ}}$ أ

= $\text{لو}_{\text{أ ب حـ}}$ أ ب حـ = ١

③ ∵ $(٢٥)^{\text{س}} - ١٢ \times (٥)^{\text{س}} + ٢٧ = ٠$

∴ $(٥^{\text{س}} - ٩)(٥^{\text{س}} - ٣) = ٠$

∴ $٥^{\text{س}} - ٩ = ٠$ ومنها $٥^{\text{س}} = ٩$

∴ س = $\text{لو}_{٥}$ ٩

أ، $٥^{\text{س}} - ٣ = ٠$ ومنها $٥^{\text{س}} = ٣$

∴ س = $\text{لو}_{٥}$ ٣

∴ مجموع الجذرين = $\text{لو}_{٥}$ ٩ + $\text{لو}_{٥}$ ٣ = $\text{لو}_{٥}$ ٢٧

④ بوضع $٣^{\text{لو س}}$ = ص (بأخذ لوغاريتم الطرفين)

∴ لو س لو ٣ = لو ص

أى لو ٣ لو س = لو ص ∴ لو $\text{س}^{\text{لو ٣}}$ = لو ص

∴ $\text{س}^{\text{لو ٣}}$ = ص أى أن $٣^{\text{لو س}} = \text{س}^{\text{لو ٣}}$

⑤ ∵ $\text{لو}_{\text{حـ}}\ \text{لو}_{\text{ب}}\ \text{لو}_{\text{أ}}\ \text{أ}^{\text{ب}^{\text{حـ}}}$

= $\text{لو}_{\text{حـ}}\ \text{لو}_{\text{ب}}$ ($\text{ب}^{\text{حـ}}\ \text{لو}_{\text{أ}}$ أ) = $\text{لو}_{\text{حـ}}\ \text{لو}_{\text{ب}}\ \text{ب}^{\text{حـ}}$

= $\text{لو}_{\text{حـ}}$ (حـ $\text{لو}_{\text{ب}}$ ب) = $\text{لو}_{\text{حـ}}$ حـ = ١

⑥ ∵ $\text{ب}^{\text{س}} - ٢\ \text{ب}^{-\text{س}} = ١$

∴ $\text{ب}^{٢\text{س}} - \text{ب}^{\text{س}} - ٢ = ٠$

∴ $(\text{ب}^{\text{س}} + ١)(\text{ب}^{\text{س}} - ٢) = ٠$

∴ $\text{ب}^{\text{س}} = -١$ (مرفوض) أ، $\text{ب}^{\text{س}} = ٢$

ومنها س = $\text{لو}_{\text{ب}}$ ٢

⑦ ∵ $\frac{١}{\text{لو}_{٢}\text{س}} + \frac{١}{\text{لو}_{٤}\text{س}} + \frac{١}{\text{لو}_{٨}\text{س}} + \frac{١}{\text{لو}_{١٦}\text{س}} = ٥$

∴ $\text{لو}_{\text{س}}$ ٢ + $\text{لو}_{\text{س}}$ ٤ + $\text{لو}_{\text{س}}$ ٨ + $\text{لو}_{\text{س}}$ ١٦ = ٥

∴ $\text{لو}_{\text{س}}$ (٢ × ٤ × ٨ × ١٦) = ٥

∴ $\text{لو}_{\text{س}}$ ١٠٢٤ = ٥

∴ $\text{س}^{٥} = ١٠٢٤ = (٤)^{٥}$ ∴ س = ٤

⑧ ∵ لو ١ = صفر ، لو ١٠ = ١

، ∴ لو أ ∈]٠ ، ١[∴ أ ∈]١ ، ١٠[

⑨ برسم منحنى الدالة د (أ) = $\text{لو}_{٣}$ أ

نجد أن إذا كانت أ ∈]٠ ، ٩]

فإن : $\text{لو}_{٣}$ أ ∈]− ∞ ، ٢]

⑩ ∵ $٢^{\text{لو}_{٢}(\text{س} + ٤)} + ٣^{\text{لو}_{٣}(\text{س} + ٥)} = (٢٥)^{\text{لو}_{٥}٧}$

∴ (س + ٤) + (س + ٥) = $٥^{٢\ \text{لو}_{٥}٧}$

= $٥^{\text{لو}_{٥}٤٩}$ = ٤٩

∴ ٢ س + ٩ = ٤٩ ∴ ٢ س = ٤٠

∴ س = ٢٠ ∴ م.ح = {٢٠}

⑪ ∵ $\text{لو}_{\text{ص}}$ س = $\text{لو}_{\text{س}}$ ص

∴ $\text{لو}_{\text{ص}}$ س = $\frac{١}{\text{لو}_{\text{ص}}\text{س}}$ ∴ $(\text{لو}_{\text{ص}}\text{س})^{٢} = ١$

∴ $\text{لو}_{\text{ص}}$ س = ± ١

∴ س = ص أ، س = $\text{ص}^{-١} = \frac{١}{\text{ص}}$

∴ الإجابتين أ ، ب صحيحتين

∴ الإجابة رقم (د)

⑫ ∵ $٣^{\text{أ}} = ٥^{\text{ب}}$ ∴ أ لو ٣ = ب لو ٥

∴ $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{لو ٥}}{\text{لو ٣}} = \text{لو}_{٣}$ ٥

، ∵ $٣^{\text{أ}} = ٧^{\text{حـ}}$ ∴ أ لو ٣ = حـ لو ٧

∴ $\frac{\text{أ}}{\text{حـ}} = \frac{\text{لو ٧}}{\text{لو ٣}} = \text{لو}_{٣}$ ٧

∴ $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} + \frac{\text{أ}}{\text{حـ}}$ = $\text{لو}_{٣}$ ٥ + $\text{لو}_{٣}$ ٧ = $\text{لو}_{٣}$ ٣٥

⑬ ∵ $\text{لو}_{٢}$ س + $\text{لو}_{٤}$ س + $\text{لو}_{٨}$ س = ١١

∴ $\frac{\text{لو س}}{\text{لو ٢}} + \frac{\text{لو س}}{\text{لو ٤}} + \frac{\text{لو س}}{\text{لو ٨}} = ١١$

∴ $\frac{\text{لو س}}{\text{لو ٢}} + \frac{\text{لو س}}{\text{٢ لو ٢}} + \frac{\text{لو س}}{\text{٣ لو ٢}} = ١١$

∴ $\frac{\text{٦ لو س + ٣ لو س + ٢ لو س}}{\text{٦ لو ٢}} = ١١$

∴ ١١ لو س = ١١ × ٦ لو ٢

∴ لو س = ٦ لو ٢ = لو $٢^{٦}$ = لو ٦٤

∴ س = ٦٤

⑭ ∵ $\text{لو}_{٢}$ ٣ × $\text{لو}_{٣}$ ٤ × $\text{لو}_{٤}$ ٥ × ... × $\text{لو}_{\text{ن}}$ (ن + ١) = ١٠

∴ $\frac{\text{لو ٣}}{\text{لو ٢}} \times \frac{\text{لو ٤}}{\text{لو ٣}} \times \frac{\text{لو ٥}}{\text{لو ٤}} \times ... \times \frac{\text{لو (ن + ١)}}{\text{لو ن}} = ١٠$

∴ لو (ن + ١) = ١٠ لو ٢

∴ لو (ن + ١) = لو $٢^{١٠}$

∴ ن + ١ = ١٠٢٤ ∴ ن = ١٠٢٣

⑮ ∵ د (س) = لو $٢^{\text{س}}$ ∴ د (س) = س لو ٢

∴ د (س) دالة خطية يمثلها خط مستقيم ميله = لو ٢

∴ الإجابة رقم (جـ)

٢

① المقدار = $\text{لو}_{٣} \left(\frac{١}{٣} \times \frac{٣}{٩} \times \frac{٩}{٢٧} \times ..... \times \frac{٢٧}{٨١}\right)$

= $\text{لو}_{٣} \left(\frac{١}{٨١}\right) = \text{لو}_{٣}\ ٣^{-٤} = -٤$

② المقدار = لو ظا ١° + لو ظا ٢° + ... + لو ظا ٤٥° + ...

+ لو ظا ٨٨° + لو ظا ٨٩°

= لو (ظا ١° ظا ٢° ... ظا ٤٥° ... ظا ٨٨° ظا ٨٩°)

= لو (ظا ١° ظا ٢° ... ظا ٤٥° ... ظتا ٢° ظتا ١°)

= لو ظا ٤٥° = لو ١ = صفر

③ المقدار = لو ظا ١° × لو ظا ٢° × ... لو ظا ٤٥°

× ... × لو ظا ٦٣°

= لو ظا ١° × لو ظا ٢° × ... × لو ١ × ... × لو ظا ٦٣°

= صفر

---

٣ ∵ $\text{لو}_{\text{ب}^{٢}}\text{س}^{٢} = \frac{\text{لو س}^{٢}}{\text{لو ب}^{٢}} = \frac{\text{٢ لو س}}{\text{٢ لو ب}} = \frac{\text{لو س}}{\text{لو ب}}$

= $\text{لو}_{\text{ب}}$ س

، ∵ $\text{لو}_{\text{ب}^{٣}}\text{س}^{٣} = \frac{\text{لو س}^{٣}}{\text{لو ب}^{٣}} = \frac{\text{٣ لو س}}{\text{٣ لو ب}} = \frac{\text{لو س}}{\text{لو ب}}$

= $\text{لو}_{\text{ب}}$ س وهكذا

$\text{لو}_{\text{ب}^{\text{ن}}}\text{س}^{\text{ن}} = \frac{\text{لو س}^{\text{ن}}}{\text{لو ب}^{\text{ن}}} = \frac{\text{ن لو س}}{\text{ن لو ب}} = \frac{\text{لو س}}{\text{لو ب}}$

= $\text{لو}_{\text{ب}}$ س

∴ $\text{لو}_{\text{ب}}$ س + $\text{لو}_{\text{ب}^{٢}}\text{س}^{٢}$ + $\text{لو}_{\text{ب}^{٣}}\text{س}^{٣}$ + ...

+ $\text{لو}_{\text{ب}^{\text{ن}}}\text{س}^{\text{ن}}$

= $\text{لو}_{\text{ب}}$ س + $\text{لو}_{\text{ب}}$ س + $\text{لو}_{\text{ب}}$ س + ... + $\text{لو}_{\text{ب}}$ س

= ن $\text{لو}_{\text{ب}}$ س = $\text{لو}_{\text{ب}}\text{س}^{\text{ن}}$

ارشادات التطبيقات الحياتية على الوحدة الثانية

١

الزيادة فى طول نصف القطر

$= \left(\frac{٣ \times ٣٦\ \pi}{٤\ \pi}\right)^{\frac{١}{٣}} - \left(\frac{٣ \times \frac{٣٢}{٣}\ \pi}{٤\ \pi}\right)^{\frac{١}{٣}}$

$= (٢٧)^{\frac{١}{٣}} - (٨)^{\frac{١}{٣}}$ = ١ وحدة طول.

٢

① حـ$_{١٠}$ (مجموع العشرة أعداد الأولى)

= ٢ (٢^{١٠} − ١) = ٢^{١١} − ٢ = ٢٠٤٦

② حـ$_{ن}$ = ١٣١٠٧٠

∴ ٢ (٢^{ن} − ١) = ١٣١٠٧٠

∴ ٢^{ن} − ١ = ٦٥٥٣٥ ∴ ٢^{ن} = ٦٥٥٣٦

∴ ٢^{ن} = ٢^{١٦} ∴ ن = ١٦

∴ عدد الحدود = ١٦ حدًا

٣

① د (٠) = ٧٠ − ٤ لو$_{٢}$ ١ = ٧٠ درجة

② د (٧) = ٧٠ − ٤ لو$_{٢}$ ٨ = ٥٨ درجة

٤

① د (٠) = ٨٥ − ٢٥ لو ١ = ٨٥ ٪

② د (٣) = ٨٥ − ٢٥ لو ٤ ≃ ٦٩,٩٥ ٪

③ د (١٢) = ٨٥ − ٢٥ لو ١٣ ≃ ٥٧,١٥ ٪

٥

① د (٣٦٠٠) = $\frac{١٠}{١٠٠}$ × ٣٦٠٠ = ٣٦٠ جنيهًا.

② د (٨٠٠٠) = $\frac{١٠}{١٠٠}$ × ٨٠٠٠ + ١٠٠ لو (٨٠٠٠ − ٤٩٩٩)

= ١١٤٧,٧٢٦٦ جنيهًا.

٦

① الرقم الهيدروچينى = − لو ١٠$^{-٣}$

= ٣ لو ١٠ = ٣

② عندما يكون الرقم الهيدروچينى = ٩

∴ ٩ = − لو (H^{+}) ∴ لو (H^{+}) = −٩

∴ H^{+} = ١٠$^{-٩}$

أى أن تركيز الهيدروچين = ١٠$^{-٩}$

٧

① أ هو عدد السكان الابتدائى ، ن عدد السنوات

∴ عدد السكان بعد ن سنة = أ (١ + $\frac{٧}{١٠٠}$)^{ن}

= أ (١,٠٧)^{ن}

∴ عدد السكان بعد عام = أ (١,٠٧)

② عندما يتضاعف عدد السكان :

∴ ٢ أ = أ (١,٠٧)^{ن} ∴ ٢ = (١,٠٧)^{ن}

بأخذ اللوغاريتم للطرفين

∴ ن لو ١,٠٧ = لو٢ ∴ ن ≃ ١٠ سنوات.

٨

ع = ١٠^{٥} (١,٣)$^{ن - ٢٠١٠}$

① عام ٢٠١٥ يكون عدد السكان

ع = ١٠^{٥} (١,٣)$^{٢٠١٥ - ٢٠١٠}$ = ٣٧١٢٩٣ نسمة.

② عندما يصبح عدد السكان ١,٤ مليون نسمة

∴ ١,٤ × ١٠^{٦} = ١٠^{٥} (١,٣)$^{ن - ٢٠١٠}$

∴ (١,٣)$^{ن - ٢٠١٠}$ = ١٤

بأخذ اللوغاريتم للطرفين

∴ (ن − ٢٠١٠) لو ١,٣ = لو ١٤

∴ ن − ٢٠١٠ ≃ ١٠ ∴ ن ≃ ٢٠٢٠

٩

① ∵ د = لو $\frac{ش}{ش_{.}}$

∴ د = لو $\frac{١,٥ × ١٠^{٦} ش_{.}}{ش_{.}}$ = لو (١,٥ × ١٠^{٦})

≃ ٦,٢

أى أن الزلزال درجته على مقياس ريختر = ٦,٢

② عندما تكون درجة الزلزال (د) = ٨

∴ ٨ = لو $\frac{ش}{ش_{.}}$ ∴ $\frac{ش}{ش_{.}}$ = ١٠^{٨}

∴ ش = ١٠^{٨} ش$_{.}$

أى أن شدة الزلزال تعادل ١٠^{٨} مرة قدر الشدة الابتدائية.

١٠

∵ ك = ك$_{.}$ (٠,٩)^{ن}

∴ $\frac{٤٠}{١٠٠}$ ك$_{.}$ = ك$_{.}$ (٠,٩)^{ن}

∴ ٠,٤ = (٠,٩)^{ن} بأخذ اللوغاريتم للطرفين

∴ ن لو ٠,٩ = لو ٠,٤

∴ ن = $\frac{لو ٠,٤}{لو ٠,٩}$ ≃ ٩ سنوات.

١١

بفرض أن الكفاءة الابتدائية للآلة أ

∴ أ = أ$_{.}$ (١ − $\frac{٥}{١٠٠}$)^{ن}

عندما تتوقف الآلة عن التشغيل

∴ $\frac{٦٠}{١٠٠}$ أ$_{.}$ = أ$_{.}$ (٠,٩٥)^{ن}

∴ ٠,٦ = (٠,٩٥)^{ن} بأخذ اللوغاريتم للطرفين

∴ ن لو ٠,٩٥ = لو ٠,٦

∴ ن = ١٠ سنوات

إجابات تمارين

التفاضل وحساب المثلثات

إجابات الوحدة الثالثة

إجابات تمارين 12

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

① (جـ) ② (أ) ③ (د) ④ (جـ)

⑤ أولًا: (أ) ثانيًا: (جـ) ثالثًا: (د) رابعًا: (د)

⑥ أولًا: (أ) ثانيًا: (ب) ثالثًا: (د) رابعًا: (ب) خامسًا: (د) سادسًا: (ب) سابعًا: (أ)

⑦ أولًا: (جـ) ثانيًا: (د) ثالثًا: (د) رابعًا: (جـ) خامسًا: (د) سادسًا: (ب) سابعًا: (ب) ثامنًا: (ب) تاسعًا: (جـ) عاشرًا: (د)

ثانيًا الأسئلة المقالية

1

س	١,٩	١,٩٩	١,٩٩٩	←	٢	→	٢,٠٠١	٢,٠١	٢,١
د(س)	١٣,٥	١٣,٩٥	١٣,٩٩٥	←	١٤	→	١٤,٠٠٥	١٤,٠٥	١٤,٥

∴ نهـا (س ← ٢) د(س) = ١٤

2

① بيانيًا:

∴ نهـا (س ← ٣) (١ − ٢س) = −٥

عدديًا:

س	٢,٩	٢,٩٩	٢,٩٩٩	←	٣	→	٣,٠٠١	٣,٠١	٣,١
د(س)	٤,٨−	٤,٩٨−	٤,٩٩٨−	←	٥−	→	٥,٠٠٢−	٥,٠٢−	٥,٢−

∴ نهـا (س ← ٣) (١ − ٢س) = −٥

② بيانيًا:

∴ نهـا (س ← ٠) (س² − ٢)

= −٢

عدديًا:

س	٠,١−	٠,٠١−	٠,٠٠١−	←	٠	→	٠,٠٠١	٠,٠١	٠,١
د(س)	١,٩٩−	١,٩٩٩٩−	١,٩٩٩٩٩٩−	←	٢−	→	١,٩٩٩٩٩٩−	١,٩٩٩٩−	١,٩٩−

∴ نهـا (س ← ٠) (س² − ٢) = −٢

3

① غير معرفة. ② ٣ ③ ٢ ④ غير موجودة.

4

① ١ ② ٢ ③ ١ ④ غير موجودة.

5

① ٢ ② ١ ③ ١ ④ ١ ⑤ ١,٥ ⑥ ١,٥

6

① ١ ② −١ ③ ٣ ④ غير موجودة.

7

① ٢ ② ١ ③ ١ ④ ١

8

① غير معرفة. ② ∞ ③ ∞ ④ ∞

9

① غير معرفة. ② ∞ ③ −∞ ④ غير موجودة.

10

① ١ ② ١ ③ ٤ ④ غير موجودة ⑤ غير معرفة. ⑥ ٢ ⑦ ٣ ⑧ ٣

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

① (جـ) ② (جـ) ③ (د) ④ (أ) ⑤ (ب) ⑥ (أ) ⑦ (جـ)

إرشادات الحل:

① لاحظ أن كلًا من الأشكال (أ) ، (ب) ، (د) تحتوي على قفزة عند س = ٣ وبالتالي لا توجد للدالة نهاية عند س = ٣

أما شكل (جـ) يحتوي على فجوة عند س = ٣ وبالتالي توجد للدالة نهاية عند س = ٣

② عندما س ← ٠

∴ طول الوتر $\overline{أب}$ ← طول القطر (٢ نق)

أي أن ص ← ١٠

③ عندما θ ← $\frac{\pi}{٢}$

∴ ص ← $\sqrt{(١٠)^٢ + (١٠)^٢}$

أي أن ص ← ١٠ $\sqrt{٢}$

④ ∵ المنحنى يقطع محور السينات عند س = ٣

∴ المنحنى يمر بالنقطة (٣ ، ٠)

، ∵ الدالة كثيرة حدود

∴ نهـا (س ← ٣) د(س) = صفر

⑤ ∵ المنحنى يقطع محور الصادات عند ص = ٢

∴ المنحنى يمر بالنقطة (٠ ، ٢)

، ∵ الدالة كثيرة حدود

∴ نهـا (س ← ٠) د(س) = ٢

⑥ ∵ نهـا د(س) [illegible]

= نهـا [illegible] + نهـا [illegible]

∴ [illegible] ∴ [illegible]

⑦ ∵ نهـا [illegible]

= نهـا [illegible] + نهـا [illegible]

∴ نهـا [illegible]

∴ [illegible]

[illegible]

∴ [illegible]

إجابات تمارين 13

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

① [illegible] ② [illegible] ③ [illegible] ④ [illegible] ⑤ [illegible] ⑥ [illegible] ⑦ [illegible] ⑧ [illegible] ⑨ [illegible] ⑩ [illegible] ⑪ [illegible] ⑫ [illegible] ⑬ [illegible] ⑭ [illegible] ⑮ [illegible] ⑯ [illegible] ⑰ [illegible] ⑱ [illegible] ⑲ [illegible] ⑳ [illegible] ㉑ [illegible] ㉒ [illegible] ㉓ [illegible] ㉔ [illegible] ㉕ [illegible] ㉖ [illegible] ㉗ [illegible] ㉘ [illegible] ㉙ [illegible] ㉚ [illegible] ㉛ [illegible] ㉜ [illegible] ㉝ [illegible] ㉞ [illegible] ㉟ [illegible] ㊱ [illegible] ㊲ [illegible] ㊳ [illegible]

ثانيًا الأسئلة المقالية

1

① نهـا (س ← ٤) $\frac{(س − ٤)(س + ٤)}{(س − ٤)}$ = نهـا (س ← ٤) (س + ٤)

= ٨

② نهـا (س ← ٣) $\frac{(س − ٣)(س − ٤)}{(س − ٣)}$ = نهـا (س ← ٣) (س − ٤)

= −١

③ $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{س^٢}{س^٢ (٣س - ٢)} = \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{١}{٣س - ٢}$

$= \frac{-١}{٢}$

④ $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \frac{٥ (س - ٢)}{٤ (س - ٢)} = \frac{٥}{٤}$

⑤ $\underset{س \leftarrow ٤}{\text{نهـا}} \frac{٤ (س - ٤)(س + ٤)}{(س - ٤)}$

$= \underset{س \leftarrow ٤}{\text{نهـا}} ٤ (س + ٤) = ٣٢$

⑥ $\underset{س \leftarrow ٤}{\text{نهـا}} \frac{٢ (س - ٤)}{(س - ٤)(س + ٣)}$

$= \underset{س \leftarrow ٤}{\text{نهـا}} \frac{٢}{س + ٣} = \frac{٢}{٧}$

⑦ $\underset{س \leftarrow -٣}{\text{نهـا}} \frac{(س + ٣)(س + ١)}{(س - ٣)(س + ٣)}$

$= \underset{س \leftarrow -٣}{\text{نهـا}} \frac{س + ١}{س - ٣} = \frac{-٢}{-٦} = \frac{١}{٣}$

⑧ $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \frac{س (س - ٢)}{(س - ٢)(س + ١)}$

$= \underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \frac{س}{س + ١} = \frac{٢}{٣}$

⑨ $\underset{س \leftarrow -١}{\text{نهـا}} \frac{(س - ٤)(س + ١)}{(س - ٢)(س + ١)}$

$= \underset{س \leftarrow -١}{\text{نهـا}} \frac{س - ٤}{س - ٢} = \frac{٥}{٣}$

⑩ $\underset{س \leftarrow \frac{١}{٢}}{\text{نهـا}} \frac{(٢س - ١)(س - ٢)}{(٢س - ١)}$

$= \underset{س \leftarrow \frac{١}{٢}}{\text{نهـا}} (س - ٢) = -\frac{٣}{٢}$

⑪ $\underset{س \leftarrow ٩}{\text{نهـا}} \frac{-(س - ٩)}{(س - ٩)(س + ٩)}$

$= \underset{س \leftarrow ٩}{\text{نهـا}} \frac{-١}{س + ٩} = \frac{-١}{١٨}$

⑫ $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{(٣س + ٤)(س - ١)}{(س - ١)(س + ١)}$

$= \underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{٣س + ٤}{س + ١} = \frac{٧}{٢}$

⑬ $\underset{س \leftarrow \frac{٣}{٤}}{\text{نهـا}} \frac{(٤س - ٣)(٤س + ٣)}{٢ (٤س - ٣)}$

$= \underset{س \leftarrow \frac{٣}{٤}}{\text{نهـا}} \frac{٤س + ٣}{٢} = ٣$

⑭ $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}} \frac{(٢س + ١)(س - ٣)}{(٢س + ٣)(س - ٣)}$

$= \underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}} \frac{٢س + ١}{٢س + ٣} = \frac{٧}{٩}$

⑮ $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}} \frac{(س - ٣)(س + ٥)}{٥ (س - ٣)(س + ٣)}$

$= \underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}} \frac{س + ٥}{٥ (س + ٣)} = \frac{٤}{١٥}$

⑯ $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \frac{(س - ٢)(س^٢ + ٢س + ٤)}{٣ (س - ٢)(س + ٢)}$

$= \underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \frac{س^٢ + ٢س + ٤}{٣ (س + ٢)} = \frac{١٢}{١٢} = ١$

٢

① $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{(س + ٢ - ٢)(س + ٢ + ٢)}{س (س + ١)}$

$= \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{س + ٤}{س + ١} = ٤$

② $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{٤س^٢ - ٤س}{٥س}$

$= \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{٤س (س - ١)}{٥س}$

$= \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{٤ (س - ١)}{٥} = \frac{-٤}{٥}$

③ $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \frac{(س - ٣ - ١)(س - ٣ + ١)}{(س - ٢)(٢س + ١)}$

$= \underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \frac{س - ٤}{٢س + ١} = \frac{-٢}{٥}$

④ $\underset{س \leftarrow -٢}{\text{نهـا}} \frac{(س + ٢ + ١)[(س + ٢)^٢ - (س + ٢) + ١]}{٢س (س + ٢)}$

$= \underset{س \leftarrow -٢}{\text{نهـا}} \frac{(س + ٢)^٢ - (س + ٢) + ١}{٢س} = \frac{-١}{٢}$

⑤ $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \frac{(س^٢ - ٤)(س^٢ + ٥)}{س - ٢}$

$= \underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \frac{(س - ٢)(س + ٢)(س^٢ + ٥)}{(س - ٢)}$

$= \underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} (س + ٢)(س^٢ + ٥) = ٣٦$

⑥ $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \frac{(س - ٢)^٢ (س + ٢)^٢}{(س - ٢)}$

$= \underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} (س - ٢)(س + ٢)^٢ = \text{صفر}$

⑦ $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{٢ (س - ١)}{(س - ١)^٥ + ٢ (س - ١)}$

$= \underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{٢ (س - ١)}{(س - ١) [(س - ١)^٤ + ٢]}$

$= \underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{٢}{(س - ١)^٤ + ٢} = ١$

⑧ $\underset{س \leftarrow -٢}{\text{نهـا}} \frac{(س + ٢)}{(س + ٢)(س - ٢)(س^٢ + ٤)}$

$= \underset{س \leftarrow -٢}{\text{نهـا}} \frac{١}{(س - ٢)(س^٢ + ٤)}$

$= -\frac{١}{٣٢}$

⑨ $\underset{س \leftarrow ٩}{\text{نهـا}} \frac{(\sqrt{س} - ٣)(\sqrt{س} + ٤)}{(\sqrt{س} - ٣)(\sqrt{س} + ٣)}$

$= \underset{س \leftarrow ٩}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{س} + ٤}{\sqrt{س} + ٣} = \frac{٧}{٦}$

⑩ $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{١}{س} \times \frac{٢ - (س + ٢)}{٢ (س + ٢)}$

$= \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{-س}{٢س (س + ٢)}$

$= \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{-١}{٢ (س + ٢)} = \frac{-١}{٤}$

⑪ $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \frac{س^٢ (س - ٢) - ٦ (س - ٢)}{(س - ٢)(س + ٣)}$

$= \underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \frac{(س - ٢)(س^٢ - ٦)}{(س - ٢)(س + ٣)}$

$= \underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \frac{س^٢ - ٦}{س + ٣} = \frac{-٢}{٥}$

⑫ $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \frac{٥}{س} + \underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}} \frac{س (س - ٣)}{س - ٣}$

$= \frac{٥}{٢} + ٣ = \frac{١١}{٢}$

⑬ $\underset{س \leftarrow -١}{\text{نهـا}} \frac{س^٢ - ٣س - ٤}{س^٢ - ١}$

$= \underset{س \leftarrow -١}{\text{نهـا}} \frac{(س + ١)(س - ٤)}{(س + ١)(س - ١)}$

$= \underset{س \leftarrow -١}{\text{نهـا}} \frac{س - ٤}{س - ١} = \frac{٥}{٢}$

⑭ $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \left(\frac{١}{س - ١} - \frac{٣}{(س - ١)(س^٢ + س + ١)} \right)$

$= \underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \left(\frac{س^٢ + س + ١ - ٣}{(س - ١)(س^٢ + س + ١)} \right)$

$= \underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{(س - ١)(س + ٢)}{(س - ١)(س^٢ + س + ١)}$

$= \underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{س + ٢}{س^٢ + س + ١} = ١$

٣

• باستخدام القسمة المطولة أو القسمة التركيبية فى المسائل التالية نقسم كلاً من البسط والمقام على العامل الصفرى فنجد أن :

① $\underset{س \leftarrow ٤}{\text{نهـا}} \frac{(س - ٤)(س^٢ + ٤س + ١)}{س - ٤}$

$= \underset{س \leftarrow ٤}{\text{نهـا}} (س^٢ + ٤س + ١) = ٣٣$

② $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{(س - ١)(س^٢ + س - ١)}{(س - ١)(س + ٣)}$

$= \underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{س^٢ + س - ١}{س + ٣} = \frac{١}{٤}$

③ $$\underset{س \to ٤}{\text{نهـا}} \frac{س(س-٤)(س^٢+٤س-٥)}{(س-٤)}$$
$$= \underset{س \to ٤}{\text{نهـا}}\ س(س^٢+٤س-٥) = ١٠٨$$

④ $$\underset{س \to -٢}{\text{نهـا}} \frac{(س+٢)(٢س^٢-س+٢)}{(س+٢)(س^٢-٢س+٤)}$$
$$= \underset{س \to -٢}{\text{نهـا}} \frac{(٢س^٢-س+٢)}{س^٢-٢س+٤} = \frac{١٢}{١٢} = ١$$

⑤ $$\underset{س \to -٢}{\text{نهـا}} \frac{(س+٢)^٢}{(س-٣)(س+٢)^٢}$$
$$= \underset{س \to -٢}{\text{نهـا}} \frac{١}{س-٣} = \frac{-١}{٥}$$

⑥ $$\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{(س-١)^٢(س-٣)}{س(س-١)^٢}$$
$$= \underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{س-٣}{س} = -٢$$

٤

① $$\underset{س \to ٩}{\text{نهـا}} \frac{(\sqrt{س}-٣)(\sqrt{س}+٣)}{(س-٩)(\sqrt{س}+٣)}$$
$$= \underset{س \to ٩}{\text{نهـا}} \frac{س-٩}{(س-٩)(\sqrt{س}+٣)}$$
$$= \underset{س \to ٩}{\text{نهـا}} \frac{١}{\sqrt{س}+٣} = \frac{١}{٦}$$

② $$\underset{س \to ٥}{\text{نهـا}} \frac{(\sqrt{س-١}-٢)(\sqrt{س-١}+٢)}{(س-٥)(\sqrt{س-١}+٢)}$$
$$= \underset{س \to ٥}{\text{نهـا}} \frac{س-١-٤}{(س-٥)(\sqrt{س-١}+٢)}$$
$$= \underset{س \to ٥}{\text{نهـا}} \frac{١}{\sqrt{س-١}+٢} = \frac{١}{٤}$$

③ $$\underset{س \to -١}{\text{نهـا}} \frac{س+١}{\sqrt{س+٥}-٢} \times \frac{\sqrt{س+٥}+٢}{\sqrt{س+٥}+٢}$$
$$= \underset{س \to -١}{\text{نهـا}} \frac{(س+١)(\sqrt{س+٥}+٢)}{س+٥-٤}$$
$$= \underset{س \to -١}{\text{نهـا}} \left(\sqrt{س+٥}+٢\right) = ٤$$

④ $$\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{(\sqrt{٣-٢س}-\sqrt{٣})(\sqrt{٣-٢س}+\sqrt{٣})}{س(\sqrt{٣-٢س}+\sqrt{٣})}$$
$$= \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٣-٢س-٣}{س\left[\sqrt{٣-٢س}+\sqrt{٣}\right]}$$
$$= \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{-٢}{\sqrt{٣-٢س}+\sqrt{٣}} = \frac{-١}{\sqrt{٣}}$$

⑤ $$\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{(\sqrt{٢س+٩}-٣)(\sqrt{٢س+٩}+٣)}{س(س+١)(\sqrt{٢س+٩}+٣)}$$
$$= \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٢س+٩-٩}{س(س+١)(\sqrt{٢س+٩}+٣)}$$
$$= \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٢}{(س+١)(\sqrt{٢س+٩}+٣)} = \frac{١}{٣}$$

⑥ $$\underset{س \to ٥}{\text{نهـا}} \frac{س(س-٥)}{(\sqrt{س+٤}-٣)} \times \frac{(\sqrt{س+٤}+٣)}{(\sqrt{س+٤}+٣)}$$
$$= \underset{س \to ٥}{\text{نهـا}} \frac{س(س-٥)(\sqrt{س+٤}+٣)}{س+٤-٩}$$
$$= \underset{س \to ٥}{\text{نهـا}}\ س\left(\sqrt{س+٤}+٣\right) = ٣٠$$

⑦ $$\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{(س-٢)(س+٢)(\sqrt{٥س-٦}+٢)}{(\sqrt{٥س-٦}-٢)(\sqrt{٥س-٦}+٢)}$$
$$= \underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{(س-٢)(س+٢)(\sqrt{٥س-٦}+٢)}{٥س-٦-٤}$$
$$= \underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{(س-٢)(س+٢)(\sqrt{٥س-٦}+٢)}{٥(س-٢)}$$
$$= \underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{(س+٢)(\sqrt{٥س-٦}+٢)}{٥} = ٦$$

⑧ $$\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{(\sqrt{١+س}-\sqrt{١-س})(\sqrt{١+س}+\sqrt{١-س})}{٢س(\sqrt{١+س}+\sqrt{١-س})}$$
$$= \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{١+س-١+س}{٢س(\sqrt{١+س}+\sqrt{١-س})}$$
$$= \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{١}{\sqrt{١+س}+\sqrt{١-س}} = \frac{١}{٢}$$

⑨ $$\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{(س-١)(\sqrt{٣س-٢}+\sqrt{س})}{(\sqrt{٣س-٢}-\sqrt{س})(\sqrt{٣س-٢}+\sqrt{س})}$$
$$= \underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{(س-١)(\sqrt{٣س-٢}+\sqrt{س})}{٣س-٢-س}$$
$$= \underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{(س-١)(\sqrt{٣س-٢}+\sqrt{س})}{٢(س-١)}$$
$$= \underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{٣س-٢}+\sqrt{س}}{٢} = ١$$

⑩ $$\underset{س \to -١}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{س^٢+٨}-٣}{س+١} \times \frac{\sqrt{س^٢+٨}+٣}{\sqrt{س^٢+٨}+٣}$$
$$= \underset{س \to -١}{\text{نهـا}} \frac{س^٢+٨-٩}{(س+١)(\sqrt{س^٢+٨}+٣)}$$
$$= \underset{س \to -١}{\text{نهـا}} \frac{(س-١)(س+١)}{(س+١)(\sqrt{س^٢+٨}+٣)}$$
$$= \underset{س \to -١}{\text{نهـا}} \frac{س-١}{\sqrt{س^٢+٨}+٣} = \frac{-١}{٣}$$

⑪ $$\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{(١-س)(٢+\sqrt{س^٢+٣})}{(٢-\sqrt{س^٢+٣})(٢+\sqrt{س^٢+٣})}$$
$$= \underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{(١-س)(٢+\sqrt{س^٢+٣})}{٤-س^٢-٣}$$
$$= \underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{(١-س)(٢+\sqrt{س^٢+٣})}{(١-س)(١+س)}$$
$$= \underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{٢+\sqrt{س^٢+٣}}{١+س} = ٢$$

⑫ $$\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \frac{(\sqrt{س+١}-٢)(\sqrt{س+١}+٢)(\sqrt{س-٢}+١)}{(\sqrt{س-٢}-١)(\sqrt{س+١}+٢)(\sqrt{س-٢}+١)}$$
$$= \underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \frac{(س+١-٤)(\sqrt{س-٢}+١)}{(س-٢-١)(\sqrt{س+١}+٢)}$$
$$= \underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{س-٢}+١}{\sqrt{س+١}+٢} = \frac{١}{٢}$$

⑬ $$\underset{س \to ٤}{\text{نهـا}} \frac{(\sqrt{٢٤-٥س}-٢)(\sqrt{٢٤-٥س}+٢)(٣+\sqrt{س+٥})}{(\sqrt{س+٥}-٣)(\sqrt{س+٥}+٣)(\sqrt{٢٤-٥س}+٢)}$$
$$= \underset{س \to ٤}{\text{نهـا}} \frac{(٢٤-٥س-٤)(٣+\sqrt{س+٥})}{(٩-س-٥)(\sqrt{٢٤-٥س}+٢)}$$
$$= \underset{س \to ٤}{\text{نهـا}} \frac{٥(٤-س)(٣+\sqrt{س+٥})}{(٤-س)(\sqrt{٢٤-٥س}+٢)}$$
$$= \underset{س \to ٤}{\text{نهـا}} \frac{٥(٣+\sqrt{س+٥})}{\sqrt{٢٤-٥س}+٢} = \frac{٥\times٦}{٤} = ٧{,}٥$$

⑭ $$\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \frac{(س-٣)(س+\sqrt{س+٦})}{(س-\sqrt{س+٦})(س+\sqrt{س+٦})}$$
$$= \underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \frac{(س-٣)(س+\sqrt{س+٦})}{س^٢-س-٦}$$
$$= \underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \frac{(س-٣)(س+\sqrt{س+٦})}{(س-٣)(س+٢)}$$
$$= \underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \frac{س+\sqrt{س+٦}}{س+٢} = \frac{٦}{٥}$$

$$\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{د(س)-٥}{س-٢} = ١ \quad \text{(لها وجود)}$$
$$\therefore د(٢)-٥ = ٠ \qquad \therefore د(٢) = ٥$$
$$\therefore \underset{س \to ٢}{\text{نهـا}}\ د(س) = د(٢) = ٥$$

$$\because \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{د(س)}{س^٢} = ٥$$
$$\therefore د(س) = س^٢\left(ر(س)\right)$$

① $$\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}}\ د(س) = \text{صفر}$$

② $$\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{د(س)}{س} = \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{س^٢\left(ر(س)\right)}{س}$$
$$= \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}}\ س\left(ر(س)\right)$$
$$= \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}}\ س \times \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}}\ ر(س) = ٠ \times ٥ = ٠$$

٧ $\underset{\text{س} \to -1}{\text{نهــا}} \frac{(\text{س} + 1)(\text{س} - \text{أ})}{(\text{س} + 1)} = 4$

$\therefore \underset{\text{س} \to -1}{\text{نهــا}} (\text{س} - \text{أ}) = 4$

$\therefore -1 - \text{أ} = 4 \qquad \therefore \text{أ} = -5$

---

٨ $\because \underset{\text{س} \to 1}{\text{نهــا}} \frac{\text{س}^2 + \text{أ س} + \text{ب}}{\text{س} - 1}$ موجودة وتساوى ٥

، $\because$ المقام = صفر عند س = ١

$\therefore$ البسط = صفر عند س = ١

$\therefore 1 + \text{أ} + \text{ب} = 0 \qquad \therefore \text{ب} = -\text{أ} - 1$

$\therefore \underset{\text{س} \to 1}{\text{نهــا}} \frac{\text{س}^2 + \text{أ س} - \text{أ} - 1}{\text{س} - 1} = 5$

$\therefore \underset{\text{س} \to 1}{\text{نهــا}} \frac{(\text{س}^2 - 1) + (\text{أ س} - \text{أ})}{\text{س} - 1} = 5$

$\therefore \underset{\text{س} \to 1}{\text{نهــا}} \frac{(\text{س} - 1)(\text{س} + 1) + \text{أ}(\text{س} - 1)}{(\text{س} - 1)} = 5$

$\therefore \underset{\text{س} \to 1}{\text{نهــا}} \frac{(\text{س} - 1)(\text{س} + 1 + \text{أ})}{(\text{س} - 1)} = 5$

$\therefore 2 + \text{أ} = 5 \qquad \therefore \text{أ} = 3$ ومنها ب $= -4$

---

٩ $\underset{\text{س} \to 100}{\text{نهــا}} (0.2\,\text{س}^2 + 40\,\text{س} + 150)$

$=$ ٦١٥٠ جنيهاً

ثالثا مسائل تقيس مهارات التفكير

١

① (أ) ② (د) ③ (د) ④ (أ)

إرشادات لحل رقم ١

① $\because \text{س}\left(\text{د}(\text{س}) + 1\right) = \text{د}(\text{س}) + \text{س}^2$

$\therefore \text{س د}(\text{س}) + \text{س} = \text{د}(\text{س}) + \text{س}^2$

$\therefore \text{س د}(\text{س}) - \text{د}(\text{س}) = \text{س}^2 - \text{س}$

$\therefore (\text{س} - 1)\,\text{د}(\text{س}) = \text{س}(\text{س} - 1)$

$\therefore \text{د}(\text{س}) = \frac{\text{س}(\text{س} - 1)}{(\text{س} - 1)} = \text{س}$

حيث س $\neq 1 \qquad \therefore \underset{\text{س} \to 1}{\text{نهــا}} \text{د}(\text{س}) = 1$

② $\because \underset{\text{س} \to 0}{\text{نهــا}} \frac{\sqrt{\text{م س} + \text{ك}} - 3}{\text{س}}$

موجودة وتساوى ٢

، $\because$ المقام = صفر عند س = ٠

$\therefore$ البسط = ٠ عندما س = ٠

$\therefore \sqrt{\text{ك}} = 3 \qquad \therefore \text{ك} = 9$

، $\because \underset{\text{س} \to 0}{\text{نهــا}} \frac{\sqrt{\text{م س} + 9} - 3}{\text{س}} = 2$

$\therefore \underset{\text{س} \to 0}{\text{نهــا}} \frac{\left(\sqrt{\text{م س} + 9} - 3\right)}{\text{س}} \times \frac{\left(\sqrt{\text{م س} + 9} + 3\right)}{\left(\sqrt{\text{م س} + 9} + 3\right)} = 2$

$\underset{\text{س} \to 0}{\text{نهــا}} \frac{\text{م س} + 9 - 9}{\text{س}\left(\sqrt{\text{م س} + 9} + 3\right)} = 2$

$\therefore \underset{\text{س} \to 0}{\text{نهــا}} \frac{\text{م}}{\sqrt{\text{م س} + 9} + 3} = 2$

$\therefore \frac{\text{م}}{6} = 2 \qquad \therefore \text{م} = 12$

$\therefore \frac{\text{م}}{\text{ك}} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$

③ $\because 2 \underset{\text{س} \to \text{م}}{\text{نهــا}} \text{د}(\text{س})$

$- 5 \underset{\text{س} \to \text{م}}{\text{نهــا}} \text{هـ}(\text{س}) = 10 \qquad (1)$

، $\underset{\text{س} \to \text{م}}{\text{نهــا}} \text{د}(\text{س}) + \underset{\text{س} \to \text{م}}{\text{نهــا}} \text{هـ}(\text{س}) = 6 \qquad (2)$

وبضرب المعادلة (٢) × ٥

$\therefore 5 \underset{\text{س} \to \text{م}}{\text{نهــا}} \text{د}(\text{س})$

$+ 5 \underset{\text{س} \to \text{م}}{\text{نهــا}} \text{هـ}(\text{س}) = 30 \qquad (3)$

بحل (١) ، (٣) :

$\therefore 7 \underset{\text{س} \to \text{م}}{\text{نهــا}} \text{د}(\text{س}) = 40$

$\therefore \underset{\text{س} \to \text{م}}{\text{نهــا}} \text{د}(\text{س}) = \frac{40}{7}$

وبالتعويض فى (٢) :

$\therefore \underset{\text{س} \to \text{م}}{\text{نهــا}} \text{هـ}(\text{س}) = 6 - \frac{40}{7} = \frac{2}{7}$

$\therefore \underset{\text{س} \to \text{م}}{\text{نهــا}} \frac{\text{د}(\text{س})}{\text{هـ}(\text{س})} = \frac{\underset{\text{س} \to \text{م}}{\text{نهــا}} \text{د}(\text{س})}{\underset{\text{س} \to \text{م}}{\text{نهــا}} \text{هـ}(\text{س})} = \frac{\frac{40}{7}}{\frac{2}{7}}$

$= 20$

④ $\underset{\text{س} \to 2}{\text{نهــا}} \frac{2\,\text{س}^2 - \text{ن}(\text{س})}{\text{س} - 2}$

$= \underset{\text{س} \to 2}{\text{نهــا}} \frac{2\,\text{س}^2 - \text{ن}(\text{س}) + 8 - 8}{\text{س} - 2}$

$= \underset{\text{س} \to 2}{\text{نهــا}} \frac{2\,\text{س}^2 - 8}{\text{س} - 2} - \underset{\text{س} \to 2}{\text{نهــا}} \frac{\text{ن}(\text{س}) - 8}{\text{س} - 2}$

$= \underset{\text{س} \to 2}{\text{نهــا}} \frac{2(\text{س} - 2)(\text{س} + 2)}{(\text{س} - 2)}$

$- \underset{\text{س} \to 2}{\text{نهــا}} \frac{\text{ن}(\text{س}) - 8}{\text{س} - 2}$

$= \underset{\text{س} \to 2}{\text{نهــا}} 2(\text{س} + 2) - \underset{\text{س} \to 2}{\text{نهــا}} \frac{\text{ن}(\text{س}) - 8}{\text{س} - 2}$

$= 8 - 7 = 1$

٢

① $\underset{\text{س} \to 0}{\text{نهــا}} \left[\frac{(\text{س} - 5)(\text{س} + 1)}{(\text{س} - 5)(\text{س} - 1)}\right]^2$

$= \underset{\text{س} \to 0}{\text{نهــا}} \left[\frac{\text{س} + 1}{\text{س} - 1}\right]^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$

② $\underset{\text{س} \to 1}{\text{نهــا}} \sqrt{\frac{(\text{س} - 1)(\text{س} + 3)}{\text{س}(\text{س} - 1)}}$

$= \underset{\text{س} \to 1}{\text{نهــا}} \sqrt{\frac{\text{س} + 3}{\text{س}}} = \sqrt{4} = 2$

③ $\underset{\text{س} \to \sqrt{2}}{\text{نهــا}} \frac{\left(\text{س} - \sqrt{2}\right)\left(\text{س} + \sqrt{2}\right)}{\left(\text{س} - \sqrt{2}\right)\left(\text{س} + 2\sqrt{2}\right)}$

$= \underset{\text{س} \to \sqrt{2}}{\text{نهــا}} \frac{\text{س} + \sqrt{2}}{\text{س} + 2\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{2}{3}$

④ بالضرب بسطاً ومقاماً فى $(-\text{س}^3)$

$\underset{\text{س} \to 1}{\text{نهــا}} \frac{7\,\text{س}^3 - 2\,\text{س}^2 - 5}{4\,\text{س}^3 - 3\,\text{س} - 1}$

$= \underset{\text{س} \to 1}{\text{نهــا}} \frac{(\text{س} - 1)(7\,\text{س}^2 + 5\,\text{س} + 5)}{(\text{س} - 1)(4\,\text{س}^2 + 4\,\text{س} + 1)}$

$= \underset{\text{س} \to 1}{\text{نهــا}} \frac{7\,\text{س}^2 + 5\,\text{س} + 5}{4\,\text{س}^2 + 4\,\text{س} + 1} = \frac{17}{9}$

⑤ $\underset{\text{ظا س} \to 0}{\text{نهــا}} \frac{(\text{ظا س} - 3)(\text{ظا س} + 1)}{(\text{ظا س} - 3)(\text{ظا س} - 1)}$

$= \underset{\text{ظا س} \to 0}{\text{نهــا}} \frac{\text{ظا س} + 1}{\text{ظا س} - 1} = [illegible]$

⑥ $\underset{\text{س} \to 0}{\text{نهــا}} \frac{(\text{جا س} - 1)(\text{جا س} - 4)}{-(\text{جا س} + 1)(\text{جا س} - 1)}$

$= \underset{\text{س} \to 0}{\text{نهــا}} \frac{\text{جا س} - 4}{-(\text{جا س} + 1)} = [illegible]$

⑦ $\underset{\text{س} \to 8}{\text{نهــا}} \frac{\text{س} - 8}{\text{س}^2 - 64}$

$= \underset{\text{س} \to 8}{\text{نهــا}} \frac{\text{س} - 8}{(\text{س} - 8)(\text{س} + 8)}$

$= \underset{\text{س} \to 8}{\text{نهــا}} \frac{1}{\text{س} + 8} = \frac{1}{16}$

⑧ $\underset{\text{س} \to 1}{\text{نهــا}} \frac{\text{س}^2 + 3 - 4 - 2(\text{س}^2 - \text{س})}{(\text{س}^2 - \text{س})\left(\sqrt{\text{س}^2 + 3} - 2\right)}$

$= \underset{\text{س} \to 1}{\text{نهــا}} \frac{-(\text{س} - 1)^2}{\text{س}(\text{س} - 1)\left(\sqrt{\text{س}^2 + 3} - 2\right)}$

$= \underset{\text{س} \to 1}{\text{نهــا}} \frac{-(\text{س} - 1)}{\text{س}\left(\sqrt{\text{س}^2 + 3} - 2\right)} \times \frac{\sqrt{\text{س}^2 + 3} + 2}{\sqrt{\text{س}^2 + 3} + 2}$

$= \underset{\text{س} \to 1}{\text{نهــا}} \frac{-(\text{س} - 1)\left(\sqrt{\text{س}^2 + 3} + 2\right)}{\text{س}(\text{س}^2 - 1)}$

$= \underset{\text{س} \to 1}{\text{نهــا}} \frac{-\left(\sqrt{\text{س}^2 + 3} + 2\right)}{\text{س}(\text{س} + 1)} = \frac{-4}{2} = -2$

إجابات تمارين 14

أولاً: أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (د)	(٢) (د)	(٣) (د)	(٤) (أ)
(٥) (أ)	(٦) (د)	(٧) (أ)	(٨) (جـ)
(٩) (ب)	(١٠) (ب)	(١١) (ب)	(١٢) (جـ)
(١٣) (د)	(١٤) (جـ)	(١٥) (جـ)	(١٦) (جـ)
(١٧) (د)	(١٨) (د)	(١٩) (جـ)	(٢٠) (د)
(٢١) (ب)	(٢٢) (ب)	(٢٣) (ب)	(٢٤) (أ)
(٢٥) (ب)	(٢٦) (أ)	(٢٧) (ب)	(٢٨) (د)
(٢٩) (أ)	(٣٠) (أ)	(٣١) (ب)	(٣٢) (ب)

ثانياً: الأسئلة المقالية

١

① $\lim_{\text{س}\to 2} \frac{\text{س}^3 - 2^3}{\text{س} - 2} = 3(2)^2 = 12$

② $\lim_{\text{س}\to -5} \frac{\text{س}^4 - (-5)^4}{\text{س} - (-5)} = \frac{4}{1}(-5)^{4-1}$

$= -500$

③ $\lim_{\text{س}\to \text{أ}} \frac{\text{س}^5 - \text{أ}^5}{\text{س} - \text{أ}} = 5\text{أ}^4$

④ $\lim_{\text{س}\to -3} \frac{\text{س}^4 - (-3)^4}{\text{س}^5 - (-3)^5} = \frac{4}{5}(-3)^{4-5} = \frac{-4}{15}$

⑤ $\lim_{\text{س}\to 2} \frac{\text{س}^6 - (2)^6}{\text{س}^7 - (2)^7} = \frac{6}{7}(2)^{6-7} = \frac{3}{7}$

⑥ $\lim_{\text{س}\to 2} \frac{2(\text{س}^6 - 64)}{\text{س}^2 - 4}$

$= 2 \lim_{\text{س}\to 2} \frac{\text{س}^6 - (2)^6}{\text{س}^2 - (2)^2}$

$= 2 \times \frac{6}{2}(2)^{6-2} = 96$

⑦ $\lim_{\text{س}\to -2} \frac{\text{س}^6 - 64}{3(\text{س} + 2)}$

$= \frac{1}{3} \lim_{\text{س}\to -2} \frac{\text{س}^6 - (-2)^6}{\text{س} - (-2)}$

$= \frac{1}{3} \times 6 \times (-2)^5 = -64$

⑧ $\lim_{\text{س}\to -1} \frac{\text{س}(\text{س}^9 + 1)}{\text{س}(\text{س}^6 - 1)}$

$= \lim_{\text{س}\to -1} \frac{\text{س}^9 - (-1)^9}{\text{س}^6 - (-1)^6} = \frac{9}{6}(-1)^3 = -\frac{3}{2}$

⑨ $-1 \times \lim_{\text{س}\to 1} \frac{\text{س}^9 - (1)^9}{\text{س}^7 - (1)^7}$

$= -1 \times \frac{9}{7}(1)^{9-7} = \frac{-9}{7}$

⑩ $\lim_{2\text{س}\to -1} \frac{(2\text{س})^5 - (-1)^5}{(2\text{س})^6 - (-1)^6} = \frac{5}{6}(-1)^{-1}$

$= -\frac{5}{6}$

⑪ $\lim_{3\text{س}\to -2} \frac{(3\text{س})^5 - (-2)^5}{(3\text{س})^3 - (-2)^3}$

$= \frac{5}{3}(-2)^{5-3} = \frac{20}{3}$

⑫ $\lim_{2\text{س}\to 3} \frac{\text{س}(16\text{س}^4 - 81)}{\text{س}^2(2\text{س} - 3)}$

$= \lim_{\text{س}\to \frac{3}{2}} \frac{1}{\text{س}} \times \lim_{2\text{س}\to 3} \frac{(2\text{س})^4 - (3)^4}{2\text{س} - 3}$

$= \frac{2}{3} \times 4(3)^3 = 72$

٢

① $\lim_{\text{س}\to 2} \frac{\text{س}^{-7} - (2)^{-7}}{\text{س} - 2} = -7(2)^{-8} = \frac{-7}{256}$

② $\lim_{\text{س}\to -1} \frac{\text{س}^{-4} - (-1)^{-4}}{\text{س}^{-18} - (-1)^{-18}} = \frac{-4}{-18}(-1)^{14} = \frac{2}{9}$

③ $\lim_{\text{س}\to \sqrt{2}} \frac{\text{س}^7 - (\sqrt{2})^7}{\text{س}^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{7}{2}(\sqrt{2})^5$

$= 14\sqrt{2}$

④ $\lim_{\text{س}\to -\sqrt{2}} \frac{\text{س}^8 - (-\sqrt{2})^8}{\text{س}^5 - (-\sqrt{2})^5} = \frac{8}{5}(-\sqrt{2})^3$

$= \frac{-16\sqrt{2}}{5}$

⑤ $\lim_{\sqrt{2}\text{س}\to -3} \frac{(\sqrt{2}\text{س})^6 - (-3)^6}{\sqrt{2}\text{س} - (-3)} = 6(-3)^5$

$= -1458$

⑥ $\lim_{\text{جا س}\to \frac{1}{2}} \frac{\text{جا}^3\text{س} - (\frac{1}{2})^3}{\text{جا س} - (\frac{1}{2})} = 3(\frac{1}{2})^2 = \frac{3}{4}$

⑦ $\lim_{\text{س}\to 2} \frac{\text{س}^{-5} - (2)^{-5}}{\text{س}^{-7} - (2)^{-7}} = \frac{-5}{-7}(2)^2 = \frac{20}{7}$

⑧ $8 \times \lim_{\text{س}\to -2} \frac{\text{س}^{-3} - (-\frac{1}{8})}{\text{س}^{-8} - \frac{1}{256}}$

$= 8 \times \lim_{\text{س}\to -2} \frac{\text{س}^{-3} - (-2)^{-3}}{\text{س}^{-8} - (-2)^{-8}}$

$= 8 \times \frac{-3}{-8}(-2)^5 = -96$

⑨ $\lim_{\text{س}\to 2} \frac{\text{س}^{-8} - (2)^{-8}}{\text{س} - 2} = \frac{-8}{1} \times (2)^{-8-1}$

$= \frac{-1}{64}$

⑩ $\lim_{\text{س}\to 4} \frac{\text{س}^{\frac{7}{2}} - 4^{\frac{7}{2}}}{\text{س}^{\frac{5}{2}} - 4^{\frac{5}{2}}} = \frac{7}{5} \times 4 = \frac{28}{5}$

⑪ $\lim_{\text{س}\to 1} \frac{\text{س}^{\frac{1}{7}} - 1^{\frac{1}{7}}}{\text{س} - 1} = \frac{1}{7}$

⑫ $\lim_{\text{س}\to 4} \frac{\text{س}^{\frac{3}{2}} - (4)^{\frac{3}{2}}}{\text{س}^2 - (4)^2} = \frac{3}{4}(4)^{-\frac{1}{2}} = \frac{3}{8}$

⑬ $\lim_{\text{س}\to 16} \frac{\text{س}^{\frac{7}{4}} - 16^{\frac{7}{4}}}{\text{س} - 16} = \frac{\frac{7}{4}}{1} \times (16)^{\frac{7}{4} - 1} = 14$

⑭ $\lim_{\text{س}\to 1} \frac{\text{س}^{\frac{6}{5}} - (1)^{\frac{6}{5}}}{\text{س}^2 - (1)^2} = \frac{3}{5}$

⑮ $\lim_{\text{س}\to 1} \frac{\text{س}^{\frac{1}{2}}[\text{س}^{10} - 1]}{\text{س}^{\frac{3}{2}}[\text{س}^4 - 1]}$

$= \lim_{\text{س}\to 1} \text{س}^{-1} \times \lim_{\text{س}\to 1} \frac{\text{س}^{10} - (1)^{10}}{\text{س}^4 - (1)^4}$

$= 1 \times \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$

⑯ $\frac{1}{2} \lim_{\text{س}\to 4} \frac{\text{س}^4 - 256}{\text{س} - 4}$

$= \frac{1}{2} \lim_{\text{س}\to 4} \frac{\text{س}^4 - 4^4}{\text{س} - 4} = \frac{1}{2} \times 4(4)^3 = 128$

⑰ $\lim_{\text{س}\to -1} \frac{\frac{1}{\text{س}^4}(\text{س}^8 - 1)}{\frac{1}{\text{س}^3}(\text{س}^6 - 1)}$

$= \lim_{\text{س}\to -1} \frac{1}{\text{س}} \times \lim_{\text{س}\to -1} \frac{\text{س}^8 - (-1)^8}{\text{س}^6 - (-1)^6}$

$= -1 \times \frac{8}{6}(-1)^2 = \frac{-4}{3}$

⑱ $\lim_{2\text{س}\to 1} \frac{\frac{5}{16}[16\text{س}^4 - 1]}{2\text{س} - 1}$

$= \frac{5}{16} \lim_{2\text{س}\to 1} \frac{(2\text{س})^4 - (1)^4}{2\text{س} - 1}$

$= \frac{5}{16} \times 4(1)^3 = \frac{5}{4}$

⑲ $\lim_{\text{س}\to 2} \frac{\text{س}^{10} - (2)^{10}}{(\text{س} - 2)(\text{س} - 1)}$

$= \lim_{\text{س}\to 2} \frac{1}{\text{س} - 1} \times \lim_{\text{س}\to 2} \frac{\text{س}^{10} - (2)^{10}}{\text{س} - 2}$

$= 1 \times 10(2)^9 = 5120$

⑳ $\lim_{\text{س}\to 1} \frac{\text{س}^{17} - (1)^{17}}{(3\text{س} + 5)(\text{س} - 1)}$

$= \lim_{\text{س}\to 1} \frac{1}{3\text{س} + 5} \times \lim_{\text{س}\to 1} \frac{\text{س}^{17} - (1)^{17}}{\text{س} - 1}$

$= \frac{1}{8} \times 17(1)^{16} = \frac{17}{8}$

٣

① $\lim_{(1+\text{س})\to 1} \frac{(1+\text{س})^{10} - (1)^{10}}{(1+\text{س})^7 - (1)^7}$

$= \frac{10}{7}(1)^3 = \frac{10}{7}$

② $\lim_{(\text{س}-\text{هـ})\to 1} \frac{(\text{س}-\text{هـ})^7 - 1^7}{(\text{س}-\text{هـ}) - 1} = 7(1)^6 = 7$

③ $\lim_{(\text{س}+3)\to 1} \frac{(\text{س}+3)^5 - (1)^5}{(\text{س}+3) - (1)} = 5(1)^4 = 5$

④ $\lim_{\text{س}\to 0} \frac{(\text{س}+2)^5 - 2^5}{\text{س}} = 5(2)^4 = 80$

⑤ $\frac{1}{6} \lim_{\text{هـ}\to 0} \frac{(3+\text{هـ})^4 - 3^4}{\text{هـ}}$

$= \frac{1}{6} \times 4(3)^3 = 18$

⑥ $٤ \underset{هـ \to ٠}{\text{نها}} \frac{(١ + ٤هـ)^{٨} - (١)^{٨}}{٤هـ}$

$= ٤ \underset{(١+٤هـ) \to ١}{\text{نها}} \frac{(١ + ٤هـ)^{٨} - (١)^{٨}}{(١ + ٤هـ) - (١)}$

$= ٤ \times ٨ (١)^{٧} = ٣٢$

⑦ $\frac{-٢}{٥} \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{(١ - ٢س)^{٥} - ١^{٥}}{-٢س}$

$= \frac{-٢}{٥} \underset{(١-٢س) \to ١}{\text{نها}} \frac{(١ - ٢س)^{٥} - ١^{٥}}{(١ - ٢س) - ١}$

$= \frac{-٢}{٥} \times ٥ (١)^{٤} = -٢$

⑧ $٢ \underset{هـ \to ٠}{\text{نها}} \frac{(س + ٢هـ)^{٥} - س^{٥}}{٢هـ}$

$= ٢ \underset{(س+٢هـ) \to س}{\text{نها}} \frac{(س + ٢هـ)^{٥} - س^{٥}}{(س + ٢هـ) - س}$

$= ٢ \times ٥ س^{٤} = ١٥ س^{٤}$

⑨ $\frac{-٢}{٥١} \underset{هـ \to ٠}{\text{نها}} \frac{(س - ٢هـ)^{١٧} - س^{١٧}}{-٢هـ}$

$= \frac{-٢}{٥١} \underset{(س-٢هـ) \to س}{\text{نها}} \frac{(س - ٢هـ)^{١٧} - س^{١٧}}{(س - ٢هـ) - س}$

$= \frac{-٢}{٥١} \times ١٧ س^{١٦} = -\frac{٢}{٣} س^{١٦}$

⑩ $٣ \underset{(٣س+٢) \to -١}{\text{نها}} \frac{(٣س + ٢)^{٩} - (-١)^{٩}}{(٣س + ٢) - (-١)}$

$= ٣ \times ٩ (-١)^{٨} = ٢٧$

⑪ $\frac{٣}{٢} \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\sqrt[٣]{١ + ٣س} - ١}{٣س}$

$= \frac{٣}{٢} \underset{(١+٣س) \to ١}{\text{نها}} \frac{(١ + ٣س)^{\frac{١}{٣}} - (١)^{\frac{١}{٣}}}{(١ + ٣س) - (١)}$

$= \frac{٣}{٢} \times \frac{١}{٣} (١)^{-\frac{٢}{٣}} = \frac{١}{٢}$

⑫ $\underset{س \to ١}{\text{نها}} \frac{\sqrt[٣]{٢٦ + س} - ٣}{٢٦ + س - ٢٧}$

$= \underset{(٢٦+س) \to ٢٧}{\text{نها}} \frac{(٢٦ + س)^{\frac{١}{٣}} - (٢٧)^{\frac{١}{٣}}}{(٢٦ + س) - (٢٧)}$

$= \frac{١}{٣} (٢٧)^{-\frac{٢}{٣}} = \frac{١}{٢٧}$

⑬ $\underset{س \to ٧}{\text{نها}} \frac{(س + ٢٥)^{\frac{١}{٥}} - (٣٢)^{\frac{١}{٥}}}{(س + ٢٥) - ٣٢}$

$= \frac{\frac{١}{٥}}{١} (٣٢)^{\frac{١}{٥} - ١} = \frac{١}{٨٠}$

⑭ $\underset{س-٤ \to -٢}{\text{نها}} \frac{(س - ٤)^{٥} - (-٢)^{٥}}{(س - ٤) - (-٢)}$

$= \left(\frac{٥}{١}\right) \times (-٢)^{٥ - ١} = ٨٠$

⑮ $\underset{س \to -٢}{\text{نها}} \frac{(س + ٣)^{٥} - ١}{(س - ٢)(س + ٢)}$

$= \underset{س \to -٢}{\text{نها}} \frac{١}{س - ٢}$

$\times \underset{(س+٣) \to ١}{\text{نها}} \frac{(س + ٣)^{٥} - ١^{٥}}{(س + ٣) - ١}$

$= -\frac{١}{٤} \times ٥ \times (١)^{٤} = -\frac{٥}{٤}$

⑯ $\underset{س \to ١}{\text{نها}} \frac{س^{١٩} - ١ + س^{٨} - ١}{س - ١}$

$= \underset{س \to ١}{\text{نها}} \frac{س^{١٩} - (١)^{١٩}}{س - ١}$

$+ \underset{س \to ١}{\text{نها}} \frac{س^{٨} - (١)^{٨}}{س - ١}$

$= ١٩ (١)^{١٨} + ٨ (١)^{٧} = ٢٧$

⑰ $\underset{س \to -١}{\text{نها}} \frac{س^{٧} + ١ + س^{٩} + ١}{س + ١}$

$= \underset{س \to -١}{\text{نها}} \frac{س^{٧} - (-١)^{٧}}{س - (-١)}$

$+ \underset{س \to -١}{\text{نها}} \frac{س^{٩} - (-١)^{٩}}{س - (-١)}$

$= ٧ (-١)^{٦} + ٩ (-١)^{٨} = ١٦$

⑱ $\underset{س \to ١}{\text{نها}} \frac{\sqrt{س} - ١ + \sqrt[٣]{س} - ١}{س - ١}$

$= \underset{س \to ١}{\text{نها}} \frac{(س)^{\frac{١}{٢}} - (١)^{\frac{١}{٢}}}{س - ١}$

$+ \underset{س \to ١}{\text{نها}} \frac{(س)^{\frac{١}{٣}} - (١)^{\frac{١}{٣}}}{س - ١}$

$= \frac{١}{٢} + \frac{١}{٣} = \frac{٥}{٦}$

⑲ $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \frac{س^{٥} - ٣٢ + س^{٢} - ٤}{س - ٢}$

$= \underset{س \to ٢}{\text{نها}} \frac{س^{٥} - ٢^{٥}}{س - ٢} + \underset{س \to ٢}{\text{نها}} \frac{س^{٢} - ٢^{٢}}{س - ٢}$

$= ٥ (٢)^{٤} + ٢ (٢)^{١} = ٨٤$

⑳ $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{(س - ٣)^{٥} - ٢^{٥}}{س (س - ٥)}$

$= \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{١}{س} \times \underset{(س-٣) \to ٢}{\text{نها}} \frac{(س - ٣)^{٥} - ٢^{٥}}{(س - ٣) - ٢}$

$= \frac{١}{٥} \times \frac{٥}{١} (٢)^{٥ - ١} = ١٦$

㉑ $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{١}{٢ (س - ٢)}$

$\times ٢ \underset{(٢س-٣) \to -٣}{\text{نها}} \frac{(٢س - ٣)^{٥} - (-٣)^{٥}}{(٢س - ٣) - (-٣)}$

$= -\frac{١}{٦} \times ٢ \times ٥ (-٣)^{٤} = -١٣٥$

---

٤ $\because \underset{س \to أ}{\text{نها}} \frac{س^{١٢} - أ^{١٢}}{س^{١٠} - أ^{١٠}} = ٣٠$

$\therefore \frac{١٢}{١٠} (أ)^{٢} = ٣٠$ $\therefore أ^{٢} = ٢٥$

$\therefore أ = \pm ٥$

---

٥ $\underset{س \to -١}{\text{نها}} \frac{س^{١٥} - (-١)^{١٥}}{س - (-١)} = ١٥ (-١)^{١٤} = ١٥$

، $\because \underset{س \to ك}{\text{نها}} \frac{س^{٥} - ك^{٥}}{س^{٣} - ك^{٣}} = \frac{٥}{٣} (ك)^{٢}$

$\therefore \frac{٥}{٣} ك^{٢} = ١٥$ $\therefore ك = \pm ٣$

---

٦ ∵ النهاية موجودة ∴ $٦٤ = ٢^{ن}$

∴ $ن = ٦$ ∴ النهاية $= \frac{٦}{١} \times ٢^{٦ - ١}$

∴ $ل = ١٩٢$

---

٧ $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \frac{د(س) - د(٢)}{س - ٢}$

$= \underset{س \to ٢}{\text{نها}} \frac{\frac{١}{س^{٤}} - \frac{١}{٢^{٤}}}{س - ٢}$

$= \underset{س \to ٢}{\text{نها}} \frac{س^{-٤} - ٢^{-٤}}{س - ٢} = -٤ (٢)^{-٥} = \frac{-١}{٨}$

٨

① $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \frac{س^{٣} - ٢^{٣}}{س^{٥} - ٢^{٥}} + \underset{س \to ٢}{\text{نها}} \frac{س^{٤} - ٢^{٤}}{س^{٧} - ٢^{٧}}$

$= \frac{٣}{٥} (٢)^{-٢} + \frac{٤}{٧} (٢)^{-٣} = \frac{٣١}{١٤٠}$

② $\underset{س \to ٣}{\text{نها}} \left(\frac{س - ٢}{س^{٢} - ٤} \times \frac{س^{٥} - ٢٤٣}{س - ٣} \right)$

$= \underset{س \to ٣}{\text{نها}} \frac{١}{س + ٢} \times \underset{س \to ٣}{\text{نها}} \frac{س^{٥} - ٣^{٥}}{س - ٣}$

$= \frac{١}{٥} \times ٥ \times ٣^{٤} = ٨١$

③ $\left(\underset{س \to -٣}{\text{نها}} \frac{س^{٤} - (-٣)^{٤}}{س^{٣} - (-٣)^{٣}} \right)^{٣} = \left[\frac{٤}{٣} (-٣) \right]^{٣}$

$= -٦٤$

④ $\underset{س \to ١}{\text{نها}} \frac{(س^{٢٥} - ١)^{٢}}{(س - ١)^{٢}} = \underset{س \to ١}{\text{نها}} \left(\frac{س^{٢٥} - ١}{س - ١} \right)^{٢}$

$= \left(\underset{س \to ١}{\text{نها}} \frac{س^{٢٥} - (١)^{٢٥}}{س - (١)} \right)^{٢}$

$= \left(٢٥ (١)^{٢٤} \right)^{٢} = ٦٢٥$

⑤ $\underset{س \to ١}{\text{نها}} \frac{(س^{٦} - ١)^{٢}}{(س - ١)^{٢}} = \left[\underset{س \to ١}{\text{نها}} \frac{س^{٦} - (١)^{٦}}{س - (١)} \right]^{٢}$

$= \left[٦ (١)^{٥} \right]^{٢} = ٣٦$

⑥ $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \left[\frac{(س^{٤} - ١٦)^{٣}}{(س^{٣} - ٨)^{٣}} \times \frac{س^{٤} - ١٦}{س^{٨} - ٢٥٦} \right]$

$= \underset{س \to ٢}{\text{نها}} \left(\frac{س^{٤} - ١٦}{س^{٣} - ٨} \right)^{٣} \times \underset{س \to ٢}{\text{نها}} \frac{س^{٤} - ١٦}{س^{٨} - ٢٥٦}$

$= \left(\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \frac{س^{٤} - ٢^{٤}}{س^{٣} - ٢^{٣}} \right)^{٣} \times \underset{س \to ٢}{\text{نها}} \frac{س^{٤} - ٢^{٤}}{س^{٨} - ٢^{٨}}$

$= \left[\frac{٤}{٣} (٢) \right]^{٣} \times \frac{٤}{٨} (٢)^{-٤} = \frac{١٦}{٢٧}$

⑦ $\underset{س \to ١}{\text{نها}} \frac{س^{\frac{١}{٣}} - (١)^{\frac{١}{٣}}}{س - ١}$

$\times \underset{س \to ١}{\text{نها}} \frac{س^{\frac{٢}{٥}} - (١)^{\frac{٢}{٥}}}{س - ١} = \frac{١}{٣} \times \frac{٢}{٥} = \frac{٢}{١٥}$

⑧ $\displaystyle \text{نها}_{\text{س} \to 0} \frac{(1-\text{س})^{15}\left[\left(\frac{1+\text{س}}{1-\text{س}}\right)^{15}-1\right]}{(1-\text{س})^{9}\left[\left(\frac{1+\text{س}}{1-\text{س}}\right)^{9}-1\right]}$

$\displaystyle = \text{نها}_{\text{س} \to 0} (1-\text{س})^{6}$

$\displaystyle \times\ \text{نها}_{\text{س} \to 0} \frac{\left(\frac{1+\text{س}}{1-\text{س}}\right)^{15}-1}{\left(\frac{1+\text{س}}{1-\text{س}}\right)^{9}-1}$

$\displaystyle = 1 \times \text{نها}_{\text{س} \to 0} \frac{\left(\frac{1+\text{س}}{1-\text{س}}\right)^{15}-1}{\left(\frac{1+\text{س}}{1-\text{س}}\right)^{9}-1}$

$\because \text{س} \to 0$

$\therefore \frac{1+\text{س}}{1-\text{س}} \to 1$

$\displaystyle \therefore \text{نها}_{\left(\frac{1+\text{س}}{1-\text{س}}\right) \to 1} \frac{\left(\frac{1+\text{س}}{1-\text{س}}\right)^{15}-(1)^{15}}{\left(\frac{1+\text{س}}{1-\text{س}}\right)^{9}-(1)^{9}}$

$= \frac{15}{9}(1)^{6} = \frac{5}{3}$

⑨ $\displaystyle \text{نها}_{\text{س} \to 1} \frac{\text{س}^{12}-1}{\text{س}^{2}(\text{س}-1)+(\text{س}-1)}$

$\displaystyle = \text{نها}_{\text{س} \to 1} \frac{\text{س}^{12}-1}{(\text{س}-1)(\text{س}^{2}+1)}$

$\displaystyle = \text{نها}_{\text{س} \to 1} \frac{1}{\text{س}^{2}+1} \times \text{نها}_{\text{س} \to 1} \frac{\text{س}^{12}-(1)^{12}}{\text{س}-1}$

$= \frac{1}{2} \times 12(1)^{11} = 6$

ثالثا مسائل تقيس مهارات التفكير

① $\displaystyle \text{نها}_{\text{س} \to 1} \frac{\text{س}^{\frac{1}{2}}(\text{س}-1)}{\text{س}^{\frac{1}{2}}(\text{س}^{5}-1)}$

$\displaystyle = \text{نها}_{\text{س} \to 1} \frac{\text{س}-1}{\text{س}^{5}-1^{5}} = \frac{1}{5}(1)^{-4} = \frac{1}{5}$

② $\displaystyle \frac{5}{7}\ \text{نها}_{\text{س} \to 0} \frac{(1+5\text{س})^{10}-1}{5\text{س}}$

$\displaystyle \times\ \text{نها}_{\text{س} \to 0} \frac{7\text{س}}{(1+7\text{س})^{8}-1}$

$\displaystyle = \frac{5}{7}\ \text{نها}_{(1+5\text{س}) \to 1} \frac{(1+5\text{س})^{10}-(1)^{10}}{(1+5\text{س})-(1)}$

$\displaystyle \times\ \text{نها}_{(1+7\text{س}) \to 1} \frac{(1+7\text{س})-1}{(1+7\text{س})^{8}-(1)^{8}}$

$= \frac{5}{7} \times 10(1)^{9} \times \frac{1}{8}(1)^{-7} = \frac{25}{28}$

③ $\displaystyle \text{نها}_{\text{س} \to 0} \frac{\sqrt[3]{\text{س}+8}-2}{\text{س}}$

$\displaystyle \times\ \text{نها}_{\text{س} \to 0} \frac{\text{س}}{(\text{س}+3)^{5}-243}$

$\displaystyle = \text{نها}_{(\text{س}+8) \to 8} \frac{(\text{س}+8)^{\frac{1}{3}}-(8)^{\frac{1}{3}}}{(\text{س}+8)-(8)}$

$\displaystyle \times\ \text{نها}_{(\text{س}+3) \to 3} \frac{(\text{س}+3)-(3)}{(\text{س}+3)^{5}-(3)^{5}}$

$= \frac{1}{3}(8)^{-\frac{2}{3}} \times \frac{1}{5}(3)^{-4} = \frac{1}{4860}$

④ $\displaystyle \text{نها}_{\text{س} \to 2} \frac{\sqrt[3]{2\text{س}-3}-1}{(2\text{س}-4)}$

$\displaystyle \times\ \text{نها}_{\text{س} \to 2} \frac{2\text{س}-4}{\sqrt[5]{3\text{س}-5}-1}$

$\displaystyle = \text{نها}_{(2\text{س}-3) \to 1} \frac{(2\text{س}-3)^{\frac{1}{3}}-(1)^{\frac{1}{3}}}{(2\text{س}-3)-1}$

$\displaystyle \times \frac{2}{3}\ \text{نها}_{(3\text{س}-5) \to 1} \frac{(3\text{س}-5)-1}{(3\text{س}-5)^{\frac{1}{5}}-(1)^{\frac{1}{5}}}$

$= \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times 5(1)^{\frac{4}{5}} = \frac{10}{9}$

⑤ $\displaystyle \text{نها}_{\text{س} \to 2} \frac{(\text{س}^{2}-3)^{5}-1}{(\text{س}-2)(\text{س}+2)} \times (\text{س}+2)$

$\displaystyle = \text{نها}_{(\text{س}^{2}-3) \to 1} \frac{(\text{س}^{2}-3)^{5}-(1)^{5}}{(\text{س}^{2}-3)-1}$

$\times\ \text{نها}_{\text{س} \to 2} (\text{س}+2) = 5(1)^{4} \times 4 = 20$

⑥ $\displaystyle \text{نها}_{\text{س} \to -1} \frac{(4\text{س}+5)^{6}-1+7\text{س}+7}{\text{س}+1}$

$\displaystyle = \text{نها}_{\text{س} \to -1} \frac{(4\text{س}+5)^{6}-1}{\text{س}+1}$

$\displaystyle +\ \text{نها}_{\text{س} \to -1} \frac{7\text{س}+7}{\text{س}+1}$

$\displaystyle = 4\ \text{نها}_{\text{س} \to -1} \frac{(4\text{س}+5)^{6}-1}{4\text{س}+4}$

$\displaystyle +\ \text{نها}_{\text{س} \to -1} 7\left(\frac{\text{س}+1}{\text{س}+1}\right)$

$\displaystyle = 4\ \text{نها}_{(4\text{س}+5) \to 1} \frac{(4\text{س}+5)^{6}-(1)^{6}}{(4\text{س}+5)-(1)} + 7$

$= 4 \times 6(1)^{5} + 7 = 31$

⑦ $\displaystyle \text{نها}_{\text{س} \to 1} \frac{(5\text{س}-4)^{10}-1}{\text{س}-1}$

$\displaystyle +\ \text{نها}_{\text{س} \to 1} \frac{4\text{س}-4}{\text{س}-1}$

$\displaystyle = 5\ \text{نها}_{(5\text{س}-4) \to 1} \frac{(5\text{س}-4)^{10}-(1)^{10}}{(5\text{س}-4)-1}$

$\displaystyle +\ \text{نها}_{\text{س} \to 1} \frac{4(\text{س}-1)}{(\text{س}-1)}$

$= 5 \times 10(1)^{9} + 4 = 54$

⑧ $\displaystyle \text{نها}_{\text{س} \to 0} \frac{\sqrt{\text{س}+1}-1-\sqrt[3]{\text{س}+1}+1}{\text{س}}$

$\displaystyle = \text{نها}_{\text{س} \to 0} \frac{\sqrt{\text{س}+1}-1}{\text{س}}$

$\displaystyle -\ \text{نها}_{\text{س} \to 0} \frac{\sqrt[3]{\text{س}+1}-1}{\text{س}}$

$\displaystyle = \text{نها}_{\text{س} \to 0} \frac{(\text{س}+1)^{\frac{1}{2}}-(1)^{\frac{1}{2}}}{\text{س}}$

$\displaystyle -\ \text{نها}_{\text{س} \to 0} \frac{(\text{س}+1)^{\frac{1}{3}}-(1)^{\frac{1}{3}}}{\text{س}}$

$= \frac{1}{2}(1)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}(1)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{6}$

⑨ $\displaystyle \text{نها}_{\text{س} \to 0} \frac{(\text{س}+1)^{\frac{6}{5}}-1-(\text{س}+1)^{2}+1}{\text{س}}$

$\displaystyle = \text{نها}_{\text{س} \to 0} \frac{(\text{س}+1)^{\frac{6}{5}}-(1)^{\frac{6}{5}}}{\text{س}}$

$\displaystyle -\ \text{نها}_{\text{س} \to 0} \frac{(\text{س}+1)^{2}-(1)^{2}}{\text{س}}$

$= \frac{6}{5} - 2 = -\frac{4}{5}$

⑩ $\displaystyle \text{نها}_{\text{س} \to 2} \frac{[illegible]}{\text{س}-2}$

$\displaystyle +\ \text{نها}_{\text{س} \to 2} \frac{[illegible]}{\text{س}-2}$

$\displaystyle = [illegible]\ \text{نها}_{(\text{س}-1) \to 1} \frac{(\text{س}-1)^{[illegible]}-(1)^{[illegible]}}{(\text{س}-1)-(1)}$

$\displaystyle +\ \text{نها}_{(\text{س}-1) \to 1} \frac{(\text{س}-1)^{[illegible]}-(1)^{[illegible]}}{(\text{س}-1)-(1)}$

$= [illegible]$

⑪ $\displaystyle \text{نها}_{\text{س} \to 1} \frac{\text{س}^{[illegible]}-(1)^{[illegible]}}{\text{س}-1} + \text{نها}_{\text{س} \to 1} \frac{\text{س}^{[illegible]}-(1)^{[illegible]}}{\text{س}-1}$

$\displaystyle = \text{نها}_{\text{س} \to 1} \frac{\text{س}^{[illegible]}-(1)^{[illegible]}}{\text{س}-1} = [illegible]$

⑫ $\displaystyle \text{نها}_{\text{س} \to 2} \frac{[illegible]}{\text{س}-2}$

$= [illegible]$

⑬ $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \frac{س^٥ \sqrt[3]{س + ٦} - ٢ س^٥ + ٢ س^٥ - ٦٤}{س - ٢}$

$\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \frac{س^٥ [\sqrt[3]{س + ٦} - ٢]}{س - ٢}$

$+ \underset{س \to ٢}{\text{نها}} \frac{٢ (س^٥ - ٣٢)}{س - ٢}$

$= (\underset{س \to ٢}{\text{نها}} س^٥) (\underset{(س+٦) \to ٨}{\text{نها}} \frac{(س + ٦)^{\frac{١}{٣}} - (٨)^{\frac{١}{٣}}}{(س + ٦) - (٨)})$

$+ ٢ \underset{س \to ٢}{\text{نها}} \frac{س^٥ - ٢^٥}{س - ٢}$

$٢^٥ \times \frac{١}{٣} \times (٨)^{\frac{١}{٣} - ١} + ٢ \times ٥ \times ٢^{٥ - ١}$

$= ١٦٢ \frac{٢}{٣}$

إجابات تمارين 15

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

① (د)	② (ب)	③ (د)	④ (د)
⑤ (أ)	⑥ (جـ)	⑦ (د)	⑧ (جـ)
⑨ (أ)	⑩ (جـ)	⑪ (جـ)	⑫ (جـ)
⑬ (ب)	⑭ (د)	⑮ (أ)	⑯ (د)
⑰ (أ)	⑱ (جـ)	⑲ (د)	⑳ (ب)
㉑ (ب)	㉒ (ب)	㉓ (د)	㉔ (جـ)
㉕ (جـ)	㉖ (جـ)	㉗ (ب)	㉘ (أ)
㉙ (أ)	㉚ (د)	㉛ (ب)	㉜ (ب)
㉝ (جـ)	㉞ (جـ)		

ثانيا الأسئلة المقالية

١

① بقسمة كل من البسط والمقام على س

$\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{٢ - \frac{٥}{س}}{٣ + \frac{٨}{س}} = \frac{٢}{٣}$

② بقسمة كل من البسط والمقام على $س^٢$

$\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{\frac{٢}{س} - \frac{٥}{س^٢}}{٣ + \frac{٨}{س^٢}} = \text{صفر}$

③ بقسمة كل من البسط والمقام على س

$\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{٢ س - \frac{٥}{س}}{٣ + \frac{٨}{س}} = \infty$

④ بقسمة كل من البسط والمقام على س

$\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{\frac{٤}{س} - ٢}{٣ - \frac{١}{س}} = \frac{-٢}{٣}$

⑤ بقسمة كل من البسط والمقام على $س^٢$

$\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{\frac{٥}{س^٢} - \frac{٦}{س} - ٢}{٢ + \frac{١}{س} + \frac{٤}{س^٢}} = \frac{-٢}{٢}$

⑥ عند $س \to \infty$ فإن $|س| = س$

$\therefore \underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{س^٢ - ٢}{س^٢ + ١}$

بقسمة كل من البسط والمقام على $س^٢$

$\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{١ - \frac{٢}{س^٢}}{١ + \frac{١}{س^٢}} = ١$

⑦ بقسمة كل من البسط والمقام على $س^٢$

$\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{\frac{٦}{س^٢} - ٤}{\frac{٢}{س^٢} - ٧} = \frac{-٤}{-٧} = \frac{٤}{٧}$

⑧ بقسمة كل من البسط والمقام على $س^٥$

$\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{٤ + \frac{٥}{س^٥}}{٨ + \frac{١}{س} - \frac{٢}{س^٥}} = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$

⑨ بقسمة كل من البسط والمقام على $س^٢$

$\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{\frac{٧}{س} + \frac{١}{س^٢}}{٤ - \frac{٨}{س^٢} + \frac{١}{س^٢}} = \frac{\text{صفر}}{٤} = \text{صفر}$

⑩ بقسمة كل من البسط والمقام على $س^٤$

$\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{٥ س^٢ + \frac{٢}{س^٢} - \frac{١}{س^٤}}{٦ + \frac{١٢}{س^٤}} = \frac{\infty}{٦} = \infty$

⑪ بقسمة كل من البسط والمقام على $س^{١٤}$

$\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{\frac{٥}{س^{١٤}} - \frac{٧}{س^٦} + ٢}{\frac{٧}{س^{١٤}} - ٦ + \frac{٢}{س^٨}} = -\frac{٢}{٦} = -\frac{١}{٣}$

⑫ $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} (\frac{٧}{س^٢} + \frac{٢}{س} - ٢) = -٢$

⑬ $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{\frac{٥}{س^٣} + \frac{٤}{س^٢} - ٢}{\frac{٧}{س^٣} - \frac{٢}{س^٢} + ٨} = \frac{-٢}{٨}$

⑭ عند $س \to \infty$ فإن : $|٢ س|^٣ \to (٢ س)^٣$

$\therefore \underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{٥ س^٣ - ٤ س^٢ + ٢}{٧ - س + ٨ س^٣}$

بقسمة كل من البسط والمقام على $س^٣$

$\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{٥ - \frac{٤}{س} + \frac{٢}{س^٣}}{\frac{٧}{س^٣} - \frac{١}{س^٢} + ٨} = \frac{٥}{٨}$

⑮ $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} (س^٣ + ٥ س^٢ + ١)$

$= \infty + \infty + ١ = \infty$

⑯ $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} [\sqrt{س^٢ + ٥ س + ٧} + س]$

$= \sqrt{\infty + \infty + ٧} + \infty = \infty$

⑰ $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} (٥ + س - س^٢) = ٥ + \infty - \infty$

= كمية غير معينة

$\therefore \underset{س \to \infty}{\text{نها}} س^٢ (\frac{٥}{س^٢} + \frac{١}{س} - ١)$

$= \underset{س \to \infty}{\text{نها}} س^٢ \times \underset{س \to \infty}{\text{نها}} (\frac{٥}{س^٢} + \frac{١}{س} - ١)$

$= \infty \times -١ = -\infty$

٢

① بقسمة كل من البسط والمقام على $س^٢$

$\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{(٣ + \frac{٩}{س})(٢ + \frac{٧}{س})}{(١ - \frac{١}{س})(٥ - \frac{٤}{س})} = \frac{٣ \times ٢}{١ \times ٥} = \frac{٦}{٥}$

② بقسمة كل من البسط والمقام على $س^٢$

$\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{٣ - \frac{٤}{س} + \frac{٥}{س^٢}}{(١ + \frac{٣}{س})^٢} = \frac{٣}{١} = ٣$

③ بقسمة كل من البسط والمقام على $س^٢$

$\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{٦ - \frac{٥}{س}}{(١ - \frac{٣}{س})(١ + \frac{٣}{س})} = \frac{٦}{-١} = -٦$

④ بقسمة كل من البسط والمقام على $س^٣$

$\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{٨ - \frac{١}{س^٢} + \frac{١}{س^٣}}{(١ + \frac{١}{س})(٢ - \frac{٣}{س^٢})} = \frac{٨}{٢} = ٤$

⑤ بقسمة كل من البسط والمقام على $س^٣$

$\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{١ - \frac{٤}{س^٢} + \frac{٥}{س^٣}}{(٢ - \frac{١}{س})^٣} = \frac{١}{٨}$

⑥ بقسمة كل من البسط والمقام على $س^٣$

$\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{(٢ + \frac{٣}{س})(٤ - \frac{٥}{س^٢})}{(٢ - \frac{٨}{س^٢})(٥ - \frac{٣}{س})} = \frac{٨}{١٠}$

⑦ بقسمة كل من البسط والمقام على $س^٣$

$$\lim_{س \to \infty} \frac{(٢+\frac{٣}{س})(٥-\frac{١}{س})(١-\frac{٢}{س})}{١\times(١+\frac{١}{س})(٣-\frac{١}{س})} = \frac{١٠}{٣}$$

⑧ بقسمة كل من البسط والمقام على $س = \sqrt{س^٢}$

$$\lim_{س \to \infty} \frac{(١+\frac{٣}{\sqrt{س}})(١+\frac{٧}{\sqrt{س}})}{٤-\frac{٣}{س}} = \frac{١}{٤}$$

⑨ بقسمة كل من البسط والمقام على $س^٣$

$$\lim_{س \to \infty} \frac{(٦-\frac{٥}{س})(٣-\frac{٤}{س})^٢}{(٣-\frac{٢}{س})^٣} = \frac{٦\times٩}{٢٧} = ٢$$

⑩ بقسمة كل من البسط والمقام على $س^٥$

$$\lim_{س \to \infty} \frac{(١+\frac{٢}{س})^٣(\frac{٣}{س^٢}-٢)}{٣(١+\frac{٧}{س^٢})}$$

$$= \frac{١^٣\times -٢}{٣\times ١} = \frac{-٢}{٣}$$

⑪ بقسمة كل من البسط والمقام على $س^٦ = (س^٢)^٣$

$$\lim_{س \to \infty} \frac{(٣-\frac{١}{س^٢})^٣}{١٨+\frac{١}{س^٤}+\frac{١}{س^٦}} = \frac{٢٧}{١٨} = \frac{٣}{٢}$$

٣

① بقسمة كل من البسط والمقام على $س = \sqrt{س^٢}$

$$\lim_{س \to \infty} \frac{٢+\frac{٣}{س}}{\sqrt{٩+\frac{٢٥}{س^٢}}} = \frac{٢}{٣}$$

② بقسمة كل من البسط والمقام على س

$$\lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt{٤+\frac{٣}{س^٢}}}{١} = \sqrt{٤} = ٢$$

③ بقسمة كل من البسط والمقام على $س = \sqrt{س^٢}$

$$\lim_{س \to \infty} \frac{٢+\frac{١}{س}}{\sqrt{٤+\frac{٣}{س}-\frac{٤}{س^٢}}} = \frac{٢}{٢} = ١$$

④ بقسمة كل من البسط والمقام على $س = \sqrt[٣]{س^٣}$

$$\lim_{س \to \infty} \frac{٢-\frac{٣}{س}}{\sqrt[٣]{١٢٥+\frac{٥}{س^٣}}} = \frac{٢}{٥}$$

⑤ بقسمة كل من البسط والمقام على $س = \sqrt[٣]{س^٣}$

$$\lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt[٣]{٨+\frac{٥}{س^٢}-\frac{٢}{س^٣}}}{٣+\frac{٢}{س}} = \frac{٢}{٣}$$

⑥ بقسمة كل من البسط والمقام على $س^٣ = \sqrt{س^٦}$

$$\lim_{س \to \infty} \frac{\frac{٤}{س^٣}-٣}{\sqrt{١+\frac{٩}{س^٦}}} = -٣$$

⑦ بقسمة كل من البسط والمقام على $س = \sqrt{س^٢} = \sqrt[٣]{س^٣}$

$$\lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt{٩-\frac{٣}{س}+\frac{٨}{س^٢}}}{\sqrt[٣]{\frac{٣}{س}+١٢٥+\frac{٢}{س^٣}}} = \frac{٣}{٥}$$

⑧ بقسمة كل من البسط والمقام على $\sqrt{س^٢} = \sqrt[٤]{س^٤}$

$$\lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt{١+\frac{١}{س^٢}}}{\sqrt[٤]{١+\frac{٢}{س^٤}}} = \frac{١}{١} = ١$$

⑨ بقسمة كل من البسط والمقام على $\sqrt[٣]{س^٣} = \sqrt[٥]{س^٥}$

$$\lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt[٣]{٨+\frac{١}{س^٣}}}{\sqrt[٥]{٣٢+\frac{١}{س^٤}}} = \frac{٢}{٢} = ١$$

⑩ بقسمة كل من البسط والمقام على $\sqrt[٣]{س^٣} = \sqrt[٤]{س^٤}$

$$\lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt[٣]{٨+\frac{١}{س^٣}}}{\sqrt[٤]{١-\frac{٣}{س^٤}}} = ٢$$

⑪ بقسمة كل من البسط والمقام على $\sqrt{س}$

$$\lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt{٣-\frac{٢}{س}}-\sqrt{١٢+\frac{٧}{س}}}{\sqrt{٢٧-\frac{٥}{س}}}$$

$$= \frac{\sqrt{٣}-٢\sqrt{٣}}{٣\sqrt{٣}} = \frac{-١}{٣}$$

⑫ بقسمة كل من البسط والمقام على $س = \sqrt{س^٢}$

$$\lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt{٤+\frac{٧}{س^٢}}+٣}{٢+\frac{٩}{س}} = \frac{٥}{٢}$$

⑬ بقسمة كل من البسط والمقام على

$\sqrt[٤]{س^٦} = \sqrt[٦]{س^٩} = \sqrt{س^٣}$

$$\lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt[٤]{١+\frac{٨}{س^٦}}-\sqrt[٦]{\frac{١}{س^٧}+\frac{٤}{س^٩}}}{\sqrt{١+\frac{٩}{س^٣}}} = ١$$

⑭ بقسمة كل من البسط والمقام على $س^٢ = س\sqrt{س^٢}$

$$\lim_{س \to \infty} \frac{٣-\frac{١}{س}-\frac{٧}{س^٢}}{(١+\frac{١}{س})\sqrt{٢٥+\frac{١}{س^٢}}} = \frac{٣}{٥}$$

٤

① $\lim_{س \to \infty} ٧ + \lim_{س \to \infty} \frac{٢س^٢}{(س+٣)^٢}$

$$= ٧ + \lim_{س \to \infty} \frac{٢}{(١+\frac{٣}{س})^٢} = ٧+٢ = ٩$$

② $\lim_{س \to \infty} \frac{س}{٢س+١} + \lim_{س \to \infty} \frac{٣س^٢}{(س-٣)^٢}$

$$= \lim_{س \to \infty} \frac{١}{٢+\frac{١}{س}} + \lim_{س \to \infty} \frac{٣}{(١-\frac{٣}{س})^٢}$$

$$= \frac{١}{٢} + ٣ = \frac{٧}{٢}$$

③ $\lim_{س \to \infty} \frac{٢}{٣} - \lim_{س \to \infty} \frac{٣س}{٢س+٧}$

$$= \frac{٢}{٣} - \lim_{س \to \infty} \frac{٣}{٢+\frac{٧}{س}} = \frac{٢}{٣} - \frac{٣}{٢} = \frac{-٥}{٦}$$

④ $\lim_{س \to \infty} \frac{٢س^٢-٢س^٢-س}{٢س^٢+١}$

$$= \lim_{س \to \infty} \frac{-س}{٢س^٢+١}$$

$$= \lim_{س \to \infty} \frac{\frac{-١}{س}}{٢+\frac{١}{س^٢}} = \frac{صفر}{٢} = صفر$$

⑤ $\lim_{س \to \infty} \frac{(س^٢-١)(س-٢)-(س^٢+١)(س+٢)}{س^٢-٤}$

$$= \lim_{س \to \infty} \frac{س^٣-٢س^٢-س+٢-س^٣-٢س^٢-س-٢}{س^٢-٤}$$

$$= \lim_{س \to \infty} \frac{-٤س^٢-٢س}{س^٢-٤}$$

$$= \lim_{س \to \infty} \frac{-٤-\frac{٢}{س}}{١-\frac{٤}{س^٢}} = -٤$$

⑥

$$\lim_{س \to \infty} \frac{(\sqrt{س^٢-٢}-\sqrt{س^٢+س})(\sqrt{س^٢-٢}+\sqrt{س^٢+س})}{\sqrt{س^٢-٢}+\sqrt{س^٢+س}}$$

$$= \lim_{س \to \infty} \frac{س^٢-٢-س^٢-س}{\sqrt{س^٢-٢}+\sqrt{س^٢+س}}$$

$$= \lim_{س \to \infty} \frac{-٢-س}{\sqrt{س^٢-٢}+\sqrt{س^٢+س}}$$

$$= \lim_{س \to \infty} \frac{\frac{-٢}{س}-١}{\sqrt{١-\frac{٢}{س^٢}}+\sqrt{١+\frac{١}{س}}} = -\frac{١}{٢}$$

⑦ $\lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt{4س^2+1}-\sqrt{س^2+1}}{س}$

$= \lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt{4+\frac{1}{س^2}}-\sqrt{1+\frac{1}{س^2}}}{1} = \frac{2-1}{1} = 1$

⑧

$\lim_{س \to \infty} \frac{\left(\sqrt{س^2+5س}-س\right)\left(\sqrt{س^2+5س}+س\right)}{\sqrt{س^2+5س}+س}$

$= \lim_{س \to \infty} \frac{س^2+5س-س^2}{\sqrt{س^2+5س}+س}$

$= \lim_{س \to \infty} \frac{5س}{\sqrt{س^2+5س}+س}$

$= \lim_{س \to \infty} \frac{5}{\sqrt{1+\frac{5}{س}}+1} = \frac{5}{1+1} = \frac{5}{2}$

⑨ $\lim_{س \to \infty} \frac{س\left(\sqrt{4س^2+1}-2س\right)\left(\sqrt{4س^2+1}+2س\right)}{\left(\sqrt{4س^2+1}+2س\right)}$

$= \lim_{س \to \infty} \frac{س\left(4س^2+1-4س^2\right)}{\left(\sqrt{4س^2+1}+2س\right)}$

$= \lim_{س \to \infty} \frac{1}{\sqrt{4+\frac{1}{س^2}}+2} = \frac{1}{4}$

⑩ بقسمة كل من البسط والمقام على $س^{17} = (س^5)(س^2)^6$

$= (س^7)(س^2)^5$

$\lim_{س \to \infty} \frac{\left(2-\frac{1}{س}\right)^5\left(1+\frac{3}{س^2}\right)^6}{\left(1+\frac{1}{س}\right)^7\left(1-\frac{5}{س^2}\right)^5}$

$= \frac{(2)^5(1)^6}{(1)^7(1)^5} = 32$

حل آخر :

$\lim_{س \to \infty} \frac{\left[س\left(2-\frac{1}{س}\right)\right]^5\left[س^2\left(1+\frac{3}{س^2}\right)\right]^6}{\left[س\left(1+\frac{1}{س}\right)\right]^7\left[س^2\left(1-\frac{5}{س^2}\right)\right]^5}$

$= \lim_{س \to \infty} \frac{س^5\left(2-\frac{1}{س}\right)^5 \times س^{12}\left(1+\frac{3}{س^2}\right)^6}{س^7\left(1+\frac{1}{س}\right)^7 \times س^{10}\left(1-\frac{5}{س^2}\right)^5}$

$= \lim_{س \to \infty} \frac{س^{17}\left(2-\frac{1}{س}\right)^5\left(1+\frac{3}{س^2}\right)^6}{س^{17}\left(1+\frac{1}{س}\right)^7\left(1-\frac{5}{س^2}\right)^5}$

$= \frac{(2)^5 \times (1)^6}{(1)^7 \times (1)^5} = 32$

⑪ بضرب كل من البسط والمقام فى مرافق البسط والمقام

∴ $\lim_{س \to \infty} \frac{\left(\sqrt{س+1}-\sqrt{س-1}\right)\left(\sqrt{س+1}+\sqrt{س-1}\right)\left(\sqrt{4س+1}+\sqrt{4س-1}\right)}{\left(\sqrt{4س+1}-\sqrt{4س-1}\right)\left(\sqrt{س+1}+\sqrt{س-1}\right)\left(\sqrt{4س+1}+\sqrt{4س-1}\right)}$

$= \lim_{س \to \infty} \frac{(س+1-س+1)\left(\sqrt{4س+1}+\sqrt{4س-1}\right)}{(4س+1-4س+1)\left(\sqrt{س+1}+\sqrt{س-1}\right)}$

$= \lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt{4س+1}+\sqrt{4س-1}}{\sqrt{س+1}+\sqrt{س-1}}$

وبقسمة كل من البسط والمقام على $\sqrt{س}$

∴ $\lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt{4+\frac{1}{س}}+\sqrt{4-\frac{1}{س}}}{\sqrt{1+\frac{1}{س}}+\sqrt{1-\frac{1}{س}}} = \frac{2+2}{1+1} = 2$

٥

① بقسمة كل من البسط والمقام على $س^2$

$\lim_{س \to \infty} \left(\frac{3-\frac{5}{س}+\frac{1}{س^2}}{4-\frac{7}{س^2}}\right)^{\frac{1}{س}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{صفر} = 1$

② $\lim_{س \to \infty} \frac{س+1}{\sqrt{س^2-1}} + \lim_{س \to \infty} أ^{\frac{1}{س}}$

$= \lim_{س \to \infty} \left(\frac{1+\frac{1}{س}}{\sqrt{1-\frac{1}{س^2}}}\right) + أ^{صفر} = 1 + 1 = 2$

③ $\lim_{س \to \infty} \frac{2-\frac{3}{س}}{\sqrt[3]{27-\frac{15}{س^2}+\frac{2}{س^3}}} + \lim_{س \to \infty} 8^{\frac{1}{س}}$

$= \frac{2}{3} + 1 = 1\frac{2}{3}$

④ $\lim_{س \to \infty} \frac{5}{\frac{1}{س^2}-1} - \lim_{س \to \infty} (13)^{\frac{1}{س}}$

$= -5 - 1 = -6$

٦

∵ النهاية موجودة وتساوى ٣

∴ درجة البسط = درجة المقام

∴ ن = ٢

∴ $\lim_{س \to \infty} \frac{4أس^2-4س+5}{2-9س+8س^2} = 3$

بقسمة كل من البسط والمقام على $س^2$

∴ $\lim_{س \to \infty} \frac{4أ-\frac{4}{س}+\frac{5}{س^2}}{\frac{2}{س^2}-\frac{9}{س}+8} = 3$

∴ $\frac{4أ}{8} = 3$ ∴ أ = ٦

٧

$\lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt[3]{أ+\frac{2}{س^3}}}{\sqrt{4+\frac{7}{س^2}}} = -1$ ∴ $\frac{\sqrt[3]{أ}}{2} = -1$

∴ $\sqrt[3]{أ} = -2$ ∴ أ = −٨

٨

$\lim_{س \to \infty} \frac{\left(\sqrt{أس^2+3بس+د}-2س\right)}{1} \times \frac{\left(\sqrt{أس^2+3بس+د}+2س\right)}{\left(\sqrt{أس^2+3بس+د}+2س\right)}$

$= \lim_{س \to \infty} \frac{أس^2+3بس+د-4س^2}{\sqrt{أس^2+3بس+د}+2س} = 3$

∵ اكبر درجة فى المقام هى ١ ∴ درجة البسط = ١

∴ $أس^2 - 4س^2 = 0$ ∴ أ = ٤

∴ $\lim_{س \to \infty} \frac{3بس+د}{\sqrt{أس^2+3بس+د}+2س} = 3$

(بقسمة كل من البسط والمقام على س)

∴ $\lim_{س \to \infty} \frac{3ب+\frac{د}{س}}{\left(\sqrt{أ+\frac{3ب}{س}+\frac{د}{س^2}}+2\right)} = 3$

∴ $\frac{3ب}{\sqrt{أ}+2} = 3$

∴ $3ب = 3 \times (2+2)$ ∴ ب = ٤

٩

∵ $\lim_{س \to \infty} \frac{2-أس^2}{3-بس+س^2} = 5$

∴ $\lim_{س \to \infty} \frac{\frac{2}{س^2}-أ}{\frac{3}{س^2}-\frac{ب}{س}+1} = 5$

∴ أ = −٥

، ∵ $\lim_{س \to -2} \frac{2+5س^2}{3-بس+س^2} = 2$

∴ $\frac{2+5(-2)^2}{3+2ب+(-2)^2} = 2$

∴ ٧ + ٢ب = ١١

∴ ب = ٢

١٠

$$\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^2 + 1 - (\text{أس} + \text{ب})(\text{س} + 1)}{\text{س} + 1} = 2$$

$$\therefore \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^2 - \text{أ}\text{س}^2 - (\text{أ} + \text{ب})\text{س} + 1 - \text{ب}}{\text{س} + 1} = 2$$

، ∵ النهاية موجودة وتساوى ٢

∴ درجة البسط = درجة المقام

∴ $\text{س}^2 - \text{أ}\text{س}^2 = 0$ ∴ أ = ١

، أ + ب = −٢ ∴ ب = −٣

١١

∵ النهاية تساوى ∞

∴ درجة البسط أكبر من درجة المقام

∴ أ + ١ = صفر ومنها أ = −١

، ٧ − ب = صفر ومنها ب = ٧

ثالثا مسائل تقيس مهارات التفكير

(١) بقسمة كل من البسط والمقام على س^{-2}

$$\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{1 + \frac{1}{\text{س}^2}}{\left(2 + \frac{3}{\text{س}}\right)^{-2}} = \frac{1}{2^{-2}} = 4$$

(٢) $$\underset{\frac{1}{\text{ن}}\to \text{صفر}}{\text{نهـا}} \frac{\left(\text{أ} + \frac{1}{\text{ن}}\right)^4 - \text{أ}^4}{\frac{1}{\text{ن}}}$$

$$= \underset{\text{أ}+\frac{1}{\text{ن}}\to \text{أ}}{\text{نهـا}} \frac{\left(\text{أ} + \frac{1}{\text{ن}}\right)^4 - \text{أ}^4}{\left(\text{أ} + \frac{1}{\text{ن}}\right) - \text{أ}} = 4\text{أ}^3$$

(٣) $$\underset{\frac{1}{\text{س}}\to \text{صفر}}{\text{نهـا}} \frac{\left(3 + \frac{1}{\text{س}}\right)^5 - 243}{\frac{1}{\text{س}}}$$

$$= \underset{(3+\frac{1}{\text{س}})\to 3}{\text{نهـا}} \frac{\left(3 + \frac{1}{\text{س}}\right)^5 - 3^5}{\left(3 + \frac{1}{\text{س}}\right) - 3} = 5(3)^4 = 405$$

(٤) بالضرب فى المرافق

$$\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{\left(\sqrt{\text{س}^2+2} - \text{س}\right)\left(\sqrt{2\text{س}^2+1}\right)\left(\sqrt{\text{س}^2+2} + \text{س}\right)}{\sqrt{\text{س}^2+2} + \text{س}}$$

$$= \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{\left(\text{س}^2 + 2 - \text{س}^2\right)\left(\sqrt{2\text{س}^2+1}\right)}{\sqrt{\text{س}^2+2} + \text{س}}$$

$$= \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{2\left(\sqrt{2\text{س}^2+1}\right)}{\sqrt{\text{س}^2+2} + \text{س}}$$

$$= \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{2\left(\sqrt{2 + \frac{1}{\text{س}^2}}\right)}{\sqrt{1 + \frac{2}{\text{س}^2}} + 1} = \sqrt{2}$$

(٥) $$\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \left(\frac{2}{\text{س}} - \frac{1}{\text{س}^2}\right)\sqrt{4\text{س}^2+1}$$

$$= \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{2\sqrt{4\text{س}^2+1}}{\text{س}} - \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{4\text{س}^2+1}}{\text{س}^2}$$

$$= \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{2\sqrt{4 + \frac{1}{\text{س}^2}}}{1} - \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{\frac{4}{\text{س}^2} + \frac{1}{\text{س}^4}}}{1}$$

= ٢ × ٢ − صفر = ٤

(٦) بقسمة كل من البسط والمقام على $\text{س}\sqrt{\text{س}} = \sqrt{\text{س}^3}$

$$\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{5 + \frac{16}{\sqrt{\text{س}}} - 3\sqrt{\frac{1}{\text{س}} - \frac{1}{\text{س}^2}}}{\frac{1}{\sqrt{\text{س}}} + \sqrt{4 + \frac{1}{\text{س}^2}}} = \frac{5}{2}$$

إجابات تمارين 16

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (أ)	(٢) (أ)	(٣) (أ)	(٤) (ب)
(٥) (ب)	(٦) (جـ)	(٧) (د)	(٨) (أ)
(٩) (أ)	(١٠) (ب)	(١١) (جـ)	(١٢) (جـ)
(١٣) (جـ)	(١٤) (ب)	(١٥) (ب)	(١٦) (جـ)

(١٧) (جـ)	(١٨) (أ)	(١٩) (د)	(٢٠) (د)
(٢١) (ب)	(٢٢) (د)	(٢٣) (أ)	(٢٤) (ب)
(٢٥) (جـ)	(٢٦) (ب)	(٢٧) (أ)	(٢٨) (أ)
(٢٩) (ب)	(٣٠) (ب)	(٣١) (ب)	(٣٢) (أ)
(٣٣) (جـ)	(٣٤) (جـ)	(٣٥) (أ)	(٣٦) (جـ)
(٣٧) (ب)	(٣٨) (أ)	(٣٩) (أ)	(٤٠) (أ)
(٤١) (ب)	(٤٢) (أ)	(٤٣) (د)	(٤٤) (جـ)
(٤٥) (ب)			

ثانيا الأسئلة المقالية

١

(١) $$\underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{\frac{\text{جا}2\text{س}}{\text{س}}}{\frac{\text{ظا}5\text{س}}{\text{س}}} = \frac{2}{5}$$

(٢) $$\underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{\frac{\text{جا}\frac{\text{س}}{5}}{\text{س}}}{\frac{\text{ظا}\frac{2\text{س}}{3}}{\text{س}}} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{10}$$

(٣) $$\underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}3\text{س}}{5\text{س}} - \underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}2\text{س}}{5\text{س}}$$

$$= \frac{3}{5} - \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$$

(٤) $$\underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{\frac{\text{جاس}}{\text{س}} + \frac{\text{ظاس}}{\text{س}}}{\frac{\text{جاس}}{\text{س}}} = \frac{1+1}{1} = 2$$

(٥) $$\underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{\text{جتا}3\text{س}}{\frac{\text{ظا}2\text{س}}{\text{س}}} = \frac{1}{2}$$

(٦) $$\underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{5\text{س}}{\text{جاس}} - \underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظا}2\text{س}}{\text{س}}$$

$$= 5 - 2 = 3$$

(٧) $$\underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{2 + \frac{\text{جاس}}{\text{س}}}{2 + \frac{\text{ظا}3\text{س}}{\text{س}}} = \frac{3+1}{2+3} = \frac{4}{5}$$

(٨) $$\underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{2\left(\frac{\text{جاس}}{\text{س}}\right) + 4\left(\frac{\text{ظا}2\text{س}}{\text{س}}\right)}{2 + \frac{\text{جا}3\text{س}}{\text{س}}} = \frac{2+8}{2+3} = 2$$

(٩) $$\underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{\frac{\text{جاس}}{\text{س}} - \frac{3\text{ظاس}}{\text{س}}}{5\,\text{جتاس}} = \frac{1-3}{5} = \frac{-2}{5}$$

(١٠) $$\underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{3}{5\left(\frac{\text{ظاس}}{\text{س}}\right) - 2\left(\frac{\text{جا}2\text{س}}{\text{س}}\right)} = \frac{3}{5-4} = 3$$

(١١) بقسمة البسط والمقام على س

$$\underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{1 + \text{جتاس}}{\frac{\text{جاس}}{\text{س}} \times \text{جتاس}} = \frac{1+1}{1\times 1} = 2$$

(١٢) $$\underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{\frac{\text{ظا}3\text{س}}{\text{س}} - \frac{\text{جا}4\text{س}}{\text{س}}}{\text{س} + 2} = \frac{3-4}{2} = \frac{-1}{2}$$

(١٣) $$\underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{\text{س} + \frac{\text{جا}3\text{س}}{\text{س}}}{5\,\text{جتا}2\text{س}} = \frac{0+3}{5\times 1} = \frac{3}{5}$$

(١٤) $$\underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{\frac{\text{ظا}2\text{س}}{\text{س}} + 2\,\text{جتاس}}{\frac{\text{جا}3\text{س}}{\text{س}}} = \frac{2+2}{3} = \frac{4}{3}$$

(١٥) $$\underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{2\,\text{جا}\frac{1}{7}\text{س}}{\text{س}} = \frac{2}{7}$$

(١٦) $$\underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \left[\frac{\text{جا}\frac{1}{5}\text{س}}{\text{س}} + \frac{\text{ظا}\frac{1}{5}\text{س}}{\text{س}}\right] = \frac{2}{5}$$

(١٧) $$\underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \left(\frac{3\,\text{جا}4\text{س}}{5\text{س}} + 4\,\text{جا}4\text{س}\right) = \frac{12}{5}$$

(١٨) $$\underset{(\text{س}-3)\to 0}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}3(\text{س}-3)}{2(\text{س}-3)} = \frac{3}{2}$$

(١٩) بقسمة كل من البسط والمقام على س

$$\underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{\frac{\text{جا}24\text{س}}{\text{س}} \times \text{جتا}6\text{س}}{\frac{\text{ظا}6\text{س}}{\text{س}} \times \text{جتا}24\text{س}} = \frac{24\times 1}{6\times 1} = 4$$

(٢٠) $$\text{النهاية} = \frac{\frac{1}{2}\,\text{جتا}\left(-2\times\frac{1}{2}+1\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3}$$

㉑ $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\left[\frac{\text{جا}^{٢}\text{س}}{\text{س}^{٢}}\times\text{س}\right]$

$=\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\frac{\text{جا}^{٢}\text{س}}{\text{س}^{٢}}\times\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\ \text{س}$

$= ١\times ٠ = \text{صفر}$

٢

① $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\ \frac{١}{٥}\times\frac{\text{ظا}^{٢}\ ٣\text{س}}{\text{س}^{٢}}=\frac{١}{٥}\times ٣^{٢}=\frac{٩}{٥}$

② $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\frac{\frac{\text{جا}^{٢}\ ٣\text{س}}{\text{س}^{٢}}}{\frac{\text{ظا}^{٢}\ ٢\text{س}}{\text{س}^{٢}}}=\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\frac{\left(\frac{\text{جا}\ ٣\text{س}}{\text{س}}\right)^{٢}}{\left(\frac{\text{ظا}\ ٢\text{س}}{\text{س}}\right)^{٢}}=\frac{٩}{٤}$

③ $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\frac{\frac{\text{جا}^{٢}\frac{\text{س}}{٢}}{\text{س}^{٢}}}{\frac{\text{ظا}\ ٢\text{س}}{\text{س}}}=\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\frac{\left(\frac{\text{جا}\frac{\text{س}}{٢}}{\text{س}}\right)^{٢}}{\frac{\text{ظا}\ ٢\text{س}}{\text{س}}}=\frac{١}{٨}$

④ $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\frac{\frac{\text{جا}\ ٢\text{س}}{\text{س}}}{\left(\frac{\text{جا}\text{س}}{\text{س}}\right)\left(\frac{\text{ظا}\ ٣\text{س}}{\text{س}}\right)}=\frac{٢}{٣}$

⑤ $\frac{١}{٤}\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\left(\frac{\text{ظا}\ ٢\text{س}}{\text{س}}\right)^{٣}=\frac{٨}{٤}=٢$

⑥ $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\frac{\frac{\text{ظا}\ ٢\text{س}}{\text{س}}}{\left(\frac{\text{جا}\ ٢\text{س}}{\text{س}}\right)^{٤}}=\frac{١}{٨}$

⑦ $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\frac{\frac{\text{جا}\ ٤\text{س}}{\text{س}}\times\left(\frac{\text{ظا}\ ٥\text{س}}{\text{س}}\right)^{٢}}{\frac{\text{جا}\text{س}}{\text{س}}}=\frac{٤\times ٢٥}{١}=١٠٠$

⑧ $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\frac{\frac{\text{ظا}\ ٢\text{س}}{\text{س}}}{١+\left(\frac{\text{جا}\ ٣\text{س}}{\text{س}}\right)^{٢}}=\frac{٢}{١+٩}=\frac{١}{٥}$

⑨ $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\frac{١+\left(\frac{\text{ظا}\ ٢\text{س}}{\text{س}}\right)^{٢}}{٢+\left(\frac{\text{جا}\ ٣\text{س}}{\text{س}}\right)^{٢}}=\frac{١+٤}{٢+٩}=\frac{٥}{١١}$

⑩ $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\frac{\frac{\text{ظا}\text{س}}{\text{س}}}{٤-\left(\frac{\text{جا}\ ٣\text{س}}{\text{س}}\right)^{٢}}=\frac{١}{٤-٩}=\frac{-١}{٥}$

⑪ $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\frac{٢\text{س}+\frac{\text{جا}\ ٥\text{س}}{\text{س}}}{١-\frac{\text{ظا}^{٢}\ ٣\text{س}}{\text{س}^{٢}}}=\frac{٠+٥}{١-٩}=\frac{-٥}{٨}$

⑫ $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\frac{٢+\frac{٥\ \text{ظا}\text{س}}{\text{س}}+٣\frac{\text{جا}\text{س}}{\text{س}}}{\frac{\text{جا}\ ٢\text{س}}{\text{س}}\times\text{جتا}\ ٢\text{س}}=\frac{٢+٥+٣}{٢\times ١}=٥$

⑬ $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\frac{\frac{\text{جا}\ ٢\text{س}}{\text{س}}+\frac{\text{جا}^{٢}\ ٢\text{س}}{\text{س}^{٢}}}{\frac{\text{ظا}^{٢}\ ٣\text{س}}{\text{س}^{٢}}+١}=\frac{٢+٤}{٩+١}$

$=\frac{٦}{١٠}=\frac{٣}{٥}$

⑭ $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\left(\frac{\text{ظا}\ ٣\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٢}}+\frac{\text{جا}^{٢}\ ٥\text{س}}{\text{س}^{٢}}\right)=٣+٢٥=٢٨$

⑮ $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\left(\frac{\text{جا}\ ٥\text{س}^{٢}}{٢\text{س}^{٢}}+\frac{\text{جا}^{٢}\ ٥\text{س}}{٢\text{س}^{٢}}\right)=\frac{٥}{٢}+\frac{١٢٥}{٢}=٦٥$

⑯ $\left(\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\frac{٢\text{س}+\frac{\text{جا}\ ٣\text{س}}{\text{س}}}{٢\text{س}+\frac{\text{ظا}\ ٦\text{س}}{\text{س}}}\right)^{٤}=\left(\frac{١}{٢}\right)^{٤}=\frac{١}{١٦}$

⑰ $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\left(\frac{\text{ظا}\text{س}}{\text{س}}\right)^{٢}+\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\left(\frac{\text{ظا}\ ٣\text{س}}{\text{س}}\right)^{٢}$

$+\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\left(\frac{\text{ظا}\ ٥\text{س}}{\text{س}}\right)^{٢}=١+٩+٢٥=٣٥$

⑱ $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\frac{\text{جا}\text{س}}{\text{س}}\times\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\left(\frac{\text{جا}\ ٢\text{س}}{\text{س}}\right)^{٢}$

$\times\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\left(\frac{\text{جا}\ ٤\text{س}}{\text{س}}\right)^{٢}=١\times ٤\times ٦٤=٢٥٦$

⑲ $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\frac{\frac{\text{ظا}\ ٦\text{س}}{\text{س}}-\frac{\text{جا}(-٣\text{س})}{\text{س}}}{\text{جتا}\ ٥\text{س}+\text{جتا}\ ٢\text{س}}=\frac{٦-(-٣)}{١+١}=\frac{٩}{٢}$

⑳ $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\frac{\text{جا}\text{س}\left(\sqrt{\text{س}+٢}+\sqrt{٢}\right)}{\left(\sqrt{\text{س}+٢}-\sqrt{٢}\right)\left(\sqrt{\text{س}+٢}+\sqrt{٢}\right)}$

$=\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\frac{\text{جا}\text{س}\left(\sqrt{\text{س}+٢}+\sqrt{٢}\right)}{\text{س}+٢-٢}$

$=\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\frac{\text{جا}\text{س}}{\text{س}}\times\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\left(\sqrt{\text{س}+٢}+\sqrt{٢}\right)$

$=١\times ٢\sqrt{٢}=٢\sqrt{٢}$

㉑ $\underset{(\text{س}-٣)\to ٠}{\text{نهـا}}\frac{\text{ظا}(\text{س}-٣)}{(\text{س}-٣)}$

$\times\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}}\frac{١}{\text{س}^{٢}+٣\text{س}+٩}=١\times\frac{١}{٢٧}=\frac{١}{٢٧}$

㉒ $\underset{(\text{س}-١)\to ٠}{\text{نهـا}}\frac{\text{جا}(\text{س}-١)}{(\text{س}-١)}\times\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}}\frac{١}{(\text{س}+٢)}$

$=١\times\frac{١}{٣}=\frac{١}{٣}$

٣

① $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\frac{٣(١-\text{جتا}\text{س})}{\text{س}}=٣\times ٠=٠$

② $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\left(\frac{-(١-\text{جتا}\text{س})}{\text{س}}\times\frac{\text{س}}{\text{جا}\text{س}}\right)=٠\times ١=٠$

③ $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\frac{\frac{١-\text{جتا}\text{س}}{\text{س}}+\frac{\text{جا}\text{س}}{\text{س}}}{\frac{١-\text{جتا}\text{س}}{\text{س}}-\frac{\text{جا}\text{س}}{\text{س}}}=\frac{٠+١}{٠-١}=-١$

④ $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\left(\frac{١-\text{جتا}\ ٢\text{س}}{\text{س}}+\frac{١-\text{جتا}\ ٤\text{س}}{\text{س}}\right)$

$=\underset{٢\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\ ٢\left(\frac{١-\text{جتا}\ ٢\text{س}}{٢\text{س}}\right)$

$+\underset{٤\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\ ٤\left(\frac{١-\text{جتا}\ ٤\text{س}}{٤\text{س}}\right)=٠+٠=٠$

⑤ $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\left(\frac{\text{جا}\text{س}}{\text{س}}\times\frac{١-\text{جتا}\text{س}}{\text{س}}\right)=١\times ٠=٠$

⑥ $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\frac{\text{س}(١-\text{جتا}\text{س})}{\text{جا}^{٢}\ ٣\text{س}}$

$=\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\left(\frac{\text{س}^{٢}}{\text{جا}^{٢}\ ٣\text{س}}\times\frac{١-\text{جتا}\text{س}}{\text{س}}\right)$

$=\frac{١}{٩}\times ٠=\text{صفر}$

⑦ $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\frac{\text{ظا}^{٢}\ ٣\text{س}}{٤\text{س}^{٢}}=\frac{٩}{٤}$

⑧ $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\frac{٤\text{س}^{٢}}{\text{ظا}^{٢}\frac{١}{٢}\text{س}}=\frac{٤}{\left(\frac{١}{٢}\right)^{٢}}=١٦$

⑨ $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\frac{٣(١-\text{جتا}^{٢}\ ٤\text{س})}{٨\text{س}^{٢}}=\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\frac{٣\ \text{جا}^{٢}\ ٤\text{س}}{٨\text{س}^{٢}}$

$=\frac{٣}{٨}\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\left(\frac{\text{جا}\ ٤\text{س}}{\text{س}}\right)^{٢}=\frac{٣}{٨}\times ١٦=٦$

⑩ $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\frac{\text{ظا}^{٢}\text{س}}{\text{س}^{٢}}=\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\left(\frac{\text{ظا}\text{س}}{\text{س}}\right)^{٢}=١$

⑪ $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\left(\frac{١-\text{جتا}\text{س}}{\text{س}^{٢}}\times\frac{١+\text{جتا}\text{س}}{١+\text{جتا}\text{س}}\right)$

$=\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\left(\frac{١-\text{جتا}^{٢}\text{س}}{\text{س}^{٢}}\times\frac{١}{١+\text{جتا}\text{س}}\right)$

$=\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\frac{\text{جا}^{٢}\text{س}}{\text{س}^{٢}}\times\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\frac{١}{١+\text{جتا}\text{س}}$

$=١\times\frac{١}{٢}=\frac{١}{٢}$

⑫ $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\left(\frac{٤(١-\text{جتا}\text{س})}{\text{س}^{٢}}\times\frac{\text{س}^{٢}}{\text{جا}^{٢}\ ٣\text{س}}\right)$

$=\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\left(\frac{٤\times(١-\text{جتا}\text{س})}{\text{س}^{٢}}\times\frac{١+\text{جتا}\text{س}}{١+\text{جتا}\text{س}}\times\frac{\text{س}^{٢}}{\text{جا}^{٢}\ ٣\text{س}}\right)$

$=\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\left(\frac{٤\ \text{جا}^{٢}\text{س}}{\text{س}^{٢}}\times\frac{١}{١+\text{جتا}\text{س}}\times\frac{\text{س}^{٢}}{\text{جا}^{٢}\ ٣\text{س}}\right)$

$=٤\times ١\times\frac{١}{٢}\times\frac{١}{٩}=\frac{٢}{٩}$

⑬ $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\left(\frac{١-\text{جتا}\ ٢\text{س}}{\text{س}^{٢}}\times\frac{١+\text{جتا}\ ٢\text{س}}{١+\text{جتا}\ ٢\text{س}}\times\frac{\text{س}}{\text{ظا}\ ٢\text{س}}\right)$

$=\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\left(\frac{١-\text{جتا}^{٢}\ ٢\text{س}}{\text{س}^{٢}}\times\frac{١}{١+\text{جتا}\ ٢\text{س}}\times\frac{\text{س}}{\text{ظا}\ ٢\text{س}}\right)$

$=\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\left(\frac{\text{جا}^{٢}\ ٢\text{س}}{\text{س}^{٢}}\times\frac{١}{١+\text{جتا}\ ٢\text{س}}\times\frac{\text{س}}{\text{ظا}\ ٢\text{س}}\right)$

$=٤\times\frac{١}{٢}\times\frac{١}{٢}=١$

⑭ $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{١ - \text{جتا}\,٢س}{-\text{جا}^{٢}\,٢س}$

$= \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \left(\frac{١ - \text{جتا}\,٢س}{-\text{جا}^{٢}\,٢س} \times \frac{١ + \text{جتا}\,٢س}{١ + \text{جتا}\,٢س} \right)$

$= \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \left(\frac{\text{جا}^{٢}\,٢س}{-\text{جا}^{٢}\,٢س} \times \frac{١}{١ + \text{جتا}\,٢س} \right)$

$= \frac{-٩}{٤} \times \frac{١}{٢} = \frac{-٩}{٨}$

٤

① $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}\,٥س}{\text{طا}\,٣س} = \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\frac{\text{جا}\,٥س}{س}}{\frac{\text{طا}\,٣س}{س}} = \frac{٥}{٣}$

② $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}}\, س \left(\frac{١}{\text{جا}\,٢س} - \frac{١}{\text{طا}\,٢س} \right)$

$= \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \left(\frac{س}{\text{جا}\,٢س} - \frac{س}{\text{طا}\,٢س} \right)$

$= \frac{١}{٢} - \frac{١}{٢} = \frac{١}{٦}$

③ $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٢س\,\text{طا}\,٢س}{\text{جا}^{٢}\,٣س} = \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٢\left(\frac{\text{طا}\,٢س}{س}\right)}{\left(\frac{\text{جا}\,٣س}{س}\right)^{٢}}$

$= \frac{٢ \times ٢}{٩} = \frac{٢}{٣}$

④ $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٦س^{٢}}{\text{جا}\,٢س \times \text{طا}\,س}$

$= \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \left[٦ \times \left(\frac{س}{\text{جا}\,٢س} \right) \times \left(\frac{س}{\text{طا}\,س} \right) \right]$

$= ٦ \times \frac{١}{٢} \times ١ = ٣$

⑤ $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}\,س}{\text{جا}\,٤س} = \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\frac{\text{جا}\,س}{س}}{\frac{\text{جا}\,٤س}{س}} = \frac{١}{٤}$

⑥ $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{س}{\text{جا}\,س} = ١$

⑦ $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{س\,\text{جا}\,٣س}{\text{طا}^{٢}\,٢س} = \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\frac{\text{جا}\,٣س}{س}}{\left(\frac{\text{طا}\,٢س}{س}\right)^{٢}} = \frac{٣}{٤}$

⑧ $\underset{(س - \frac{\pi}{٤}) \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{طا}\,٢\left(س - \frac{\pi}{٤}\right)}{٨\left(س - \frac{\pi}{٤}\right)} = \frac{٢}{٨} = \frac{١}{٤}$

⑨ $\underset{(س - \frac{\pi}{٤}) \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\frac{\text{جا}\,٢\left(س - \frac{\pi}{٤}\right)}{\left(س - \frac{\pi}{٤}\right)}}{\frac{\text{طا}\,٤\left(س - \frac{\pi}{٤}\right)}{\left(س - \frac{\pi}{٤}\right)}} = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$

⑩ $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}\,س}{\text{طا}\,٢س} = \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\frac{\text{جا}\,س}{س}}{\frac{\text{طا}\,٢س}{س}} = \frac{١}{٢}$

⑪ $\underset{(\pi - س) \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}\,(\pi - س)}{-(\pi - س)} = -١$

⑫ $\underset{(س + \pi) \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{طا}\,(س + \pi)}{س + \pi} = ١$

⑬ $\underset{س \to \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}} \frac{٢س - \pi}{\text{جا}\left(\frac{\pi}{٢} - س\right)}$

$= \underset{\frac{\pi}{٢} - س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{-٢\left(\frac{\pi}{٢} - س\right)}{\text{جا}\left(\frac{\pi}{٢} - س\right)} = -٢$

⑭ $\underset{(\frac{\pi}{٢} - س) \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{طا}\left(\frac{\pi}{٢} - س\right)}{٢\left(\frac{\pi}{٢} - س\right)} = \frac{١}{٢}$

⑮ $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}\,(\pi - \pi س)}{١ - س}$

$= \underset{(١ - س) \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}\,\pi(١ - س)}{١ - س} = \pi$

⑯ $\underset{(س + ١) \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{١ + س}{\text{جا}\left(\frac{\pi}{٢} + \frac{\pi}{٢}س\right)}$

$= \underset{(س + ١) \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{(١ + س)}{\text{جا}\left[\frac{\pi}{٢}(١ + س)\right]} = \frac{٢}{\pi}$

⑰ $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}}\, (١ - س)\,\text{ظتا}\left(\frac{\pi}{٢} - \frac{\pi}{٢}س\right)$

$= \underset{(١ - س) \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{(١ - س)}{\text{طا}\left(\frac{\pi}{٢}(١ - س)\right)} = \frac{٢}{\pi}$

٥

① $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}\,س}{س} = ١$

② $\underset{س \to \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}\,س}{س} = \frac{١}{\frac{\pi}{٢}} = \frac{٢}{\pi}$

③ $\underset{س \to \pi}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}\,س}{س} = \frac{\text{صفر}}{\pi} = \text{صفر}$

٦

① $\underset{س \to ٥}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}\,(س - ٥)}{(س - ٥)(س + ٥)} = \underset{س \to ٥}{\text{نهـا}} \frac{١}{س + ٥}$

$\times \underset{(س - ٥) \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}\,(س - ٥)}{س - ٥} = \frac{١}{١٠} \times ١ = \frac{١}{١٠}$

② $\underset{(س - ٥) \to ٠}{\text{نهـا}} \left[\frac{\text{جا}\,(س - ٥)}{(س - ٥)} \right]^{٣} = (١)^{٣} = ١$

③ $\underset{س \to ٥}{\text{نهـا}} \left[(س - ٥) \times \frac{\text{جا}\,(س - ٥)^{٢}}{(س - ٥)^{٢}} \right]$

$= \underset{س \to ٥}{\text{نهـا}}\, (س - ٥) \times \underset{(س - ٥)^{٢} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}\,(س - ٥)^{٢}}{(س - ٥)^{٢}}$

$= \text{صفر} \times ١ = \text{صفر}$

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١

① (د) ② (جـ) ③ (د) ④ (هـ) ⑤ (ب)

إرشادات لحل رقم ١

① يمكننا باستخدام تجريب قيم أ المعطاة استنتاج أن النهاية = ١ عندما أ = ٢

② $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}}\, س\,\text{قا}\left(\frac{\pi}{٢} + س\right) = \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}}\, (-س\,\text{قتا}\,س)$

$= \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{-س}{\text{جا}\,س} = -١$

③ $\underset{س \to \frac{\pi}{٤}}{\text{نهـا}} \frac{١ - \text{ظا}\,س}{\text{جتا}\,س - \text{جا}\,س}$ بالضرب × جتا س بسطًا ومقامًا

$= \underset{س \to \frac{\pi}{٤}}{\text{نهـا}} \frac{(\text{جتا}\,س - \text{جا}\,س)}{\text{جتا}\,س\,(\text{جتا}\,س - \text{جا}\,س)}$

$= \underset{س \to \frac{\pi}{٤}}{\text{نهـا}} \frac{١}{\text{جتا}\,س} = \sqrt{٢}$

④ $\underset{س \to \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}} \frac{\text{طا}\,(س^{٢} - ٥)}{[illegible]}$

$= \underset{س \to \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}} \frac{\text{طا}\,(س^{٢} - ٥)}{[illegible]}$

$= \underset{س \to \sqrt{\pi}}{\text{نهـا}} \frac{\text{طا}\,(س^{٢} - ٥)}{[illegible]}$

$= \underset{س \to \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}} \frac{\text{طا}\,(س^{٢} - ٥)}{[illegible]} = \frac{١}{\pi}$

⑤ بقسمة كل من البسط والمقام على س

$\therefore \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\frac{\text{جا}\,س}{س} + \frac{\text{جا}\,٢س}{س} + \frac{\text{جا}\,٣س}{س} + \ldots + \frac{\text{جا}\,ن\,س}{س}}{\frac{\text{طا}\,س}{س} + \frac{\text{طا}\,٢س}{س} + \frac{\text{طا}\,٣س}{س} + \ldots + \frac{\text{طا}\,ن\,س}{س}}$

$= ١$

٤

① بالقسمة بسطًا ومقامًا على ظا² س

$\underset{\text{ظا}\,س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٣ - ٤\,\text{ظا}\,س + ٧\,\text{ظا}^{٢}\,س}{٥\,\text{ظا}^{٢}\,س + ٣} = \frac{٧}{٥}$

② $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}\,[(س + ١)(س - ٢)]}{س + ١}$

$= \underset{(س + ١)(س - ٢) \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}\,[(س + ١)(س - ٢)]}{(س + ١)(س - ٢)}$

$\times \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}}\, (س - ٢) = ١ \times (-٢) = -٢$

③ $\because س \to \infty \quad \therefore \frac{١}{س} \to ٠$

$\therefore \underset{\frac{١}{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظا}\,\frac{٤}{س} + \text{جا}\,\frac{٣}{س}}{\frac{١}{س}}$

$= \underset{\frac{١}{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \left[\frac{\text{ظا}\,\frac{٤}{س}}{\frac{١}{س}} + \frac{\text{جا}\,\frac{٣}{س}}{\frac{١}{س}} \right] = ٤ + ٣ = ٧$

④ $\underset{\text{جا}\,س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{١}{٥} \times \left[\frac{\text{جا}\,(\text{جا}\,س)}{(\text{جا}\,س)} \right] = \frac{١}{٥}$

⑤ $\underset{\text{جا}\,س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}\,(١ - \text{جتا}\,س)}{(١ - \text{جتا}\,س)} = ١$

⑥ $\underset{س\to٠}{\text{نها}} \left(\frac{\text{ظا}(\text{ظا } ٥س)}{\text{ظا } ٥س} \times \frac{\text{ظا } ٥س}{٤س} \right)$

$= \underset{\text{ظا}٥س\to٠}{\text{نها}} \frac{\text{ظا}(\text{ظا } ٥س)}{\text{ظا } ٥س} \times \underset{س\to٠}{\text{نها}} \frac{\text{ظا } ٥س}{٤س}$

$= ١ \times \frac{٥}{٤} = \frac{٥}{٤}$

⑦ $\underset{س\to٠}{\text{نها}} \left(\frac{٢\,\text{ظا}\,س}{س} \times \frac{١}{١ + \text{ظا}^٢ س} \right) = ٢ \times \frac{١}{١ + ٠} = ٢$

⑧ $\underset{س\to\frac{\pi}{٢}}{\text{نها}} \left(\frac{\text{ظا}(\text{جتا}\,س)}{\text{جتا}\,س} \times \frac{\text{جتا}\,س}{٢س - \pi} \right)$

$= \underset{\text{جتا}س\to٠}{\text{نها}} \frac{\text{ظا}(\text{جتا}\,س)}{\text{جتا}\,س} \times \underset{\frac{\pi}{٢}-س\to٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}\left(\frac{\pi}{٢} - س\right)}{-٢\left(\frac{\pi}{٢} - س\right)}$

$= ١ \times \frac{١}{-٢} = \frac{١}{-٢}$

⑨ $\underset{س\to\frac{\pi}{٢}}{\text{نها}} \frac{(١ - \text{جا}\,س)(١ + \text{جا}\,س)}{(٢س - \pi)(١ + \text{جا}\,س)}$

$= \underset{س\to\frac{\pi}{٢}}{\text{نها}} \frac{\text{جتا}^٢ س}{-٢\left(\frac{\pi}{٢} - س\right)} \times \frac{١}{١ + \text{جا}\,س}$

$= \underset{(\frac{\pi}{٢}-س)\to٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}^٢\left(\frac{\pi}{٢} - س\right)}{-٢\left(\frac{\pi}{٢} - س\right)^٢} \times \frac{\frac{\pi}{٢} - س}{١ + \text{جا}\,س}$

$= \frac{١}{-٢} \times$ صفر $=$ صفر

⑩ $\underset{(\frac{\pi}{٢}-س)\to٠}{\text{نها}} \frac{\frac{\pi}{٢} - س}{\text{ظا}\,٢\left(\frac{\pi}{٢} - س\right)} = \frac{١}{٢}$

⑪ $\underset{س\to\frac{\pi}{٢}}{\text{نها}} \frac{\text{جا}\left(\frac{\pi}{٢} - س\right)}{-\text{جا}\left(\frac{٣\pi}{٢} - ٣س\right)}$

$= \underset{س\to\frac{\pi}{٢}}{\text{نها}} \frac{\text{جا}\left(\frac{\pi}{٢} - س\right)}{\left(\frac{\pi}{٢} - س\right)} \times \frac{\left(\frac{\pi}{٢} - س\right)}{-\text{جا}\,٣\left(\frac{\pi}{٢} - س\right)}$

$= ١ \times \frac{١}{-٣} = \frac{١}{-٣}$

إجابات تمارين 17

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

① أولًا : (ب) ثانيًا : (أ) ثالثًا : (د)

② (جـ)	③ (جـ)	④ (ب)	⑤ (ب)
⑥ (جـ)	⑦ (جـ)	⑧ (ب)	⑨ (أ)
⑩ (أ)	⑪ (جـ)	⑫ (ب)	⑬ (جـ)
⑭ (ب)	⑮ (ب)	⑯ (د)	⑰ (أ)
⑱ (د)	⑲ (ب)	⑳ (أ)	㉑ (أ)
㉒ (جـ)	㉓ (جـ)	㉔ (د)	㉕ (د)
㉖ (جـ)	㉗ (جـ)		

ثانيا الأسئلة المقالية

١

$\underset{س\to٢^-}{\text{نها}}\ \text{د}(س) = (٣)^٢ + ١ = ١٠$

$\underset{س\to٢^+}{\text{نها}}\ \text{د}(س) = ٣(٣) + ١ = ١٠$

$\because \text{د}(٢^-) = \text{د}(٢^+) = ١٠$

$\therefore \underset{س\to٢}{\text{نها}}\ \text{د}(س) = ١٠$

٢

$\text{د}(٢^-) = \underset{س\to٢^-}{\text{نها}}\ \text{د}(س) = ٢ \times ٣ - ٧ = -١$

$\text{د}(٢^+) = \underset{س\to٢^+}{\text{نها}} = \frac{(س - ٢)(س - ٤)}{(س - ٢)} = -١$

$\because \text{د}(٢^-) = \text{د}(٢^+) = -١ \quad \therefore \underset{س\to٢}{\text{نها}}\ \text{د}(س) = -١$

٣

$\text{د}(٠^-) = \underset{س\to٠^-}{\text{نها}}\ \text{د}(س) = ٢$

$\text{د}(٠^+) = \underset{س\to٠^+}{\text{نها}}\ \text{د}(س) = ١$

$\because \text{د}(٠^-) \neq \text{د}(٠^+)$

$\therefore \underset{س\to٠}{\text{نها}}\ \text{د}(س)$ غير موجودة.

٤

$\text{د}(٠^-) = \underset{س\to٠^-}{\text{نها}}\ \text{د}(س) = ١$

$\text{د}(٠^+) = \underset{س\to٠^+}{\text{نها}} \frac{٥س + \text{ظا}\,٢س}{٦س + \text{جا}\,س}$

$= \underset{س\to٠^+}{\text{نها}} \frac{٥ + \frac{\text{ظا}\,٢س}{س}}{٦ + \frac{\text{جا}\,س}{س}} = \frac{٥ + ٢}{٦ + ١} = ١$

$\because \text{د}(٠^+) = \text{د}(٠^-) = ١ \quad \therefore \underset{س\to٠}{\text{نها}}\ \text{د}(س) = ١$

٥

① $\underset{س\to٠^-}{\text{نها}}\ \text{د}(س) = ٠ - ٢ = -٢$

$\underset{س\to٠^+}{\text{نها}}\ \text{د}(س) = ٠^٢ = ٠$

$\because \text{د}(٠^-) \neq \text{د}(٠^+)$

$\therefore \underset{س\to٠}{\text{نها}}\ \text{د}(س)$ غير موجودة.

② $\text{د}(١^-) = \text{د}(١^+) = ١^٢ = ١$ (لها نفس التعريف)

$\therefore \underset{س\to١}{\text{نها}}\ \text{د}(س) = ١$

③ $\text{د}(٢^-) = \underset{س\to٢^-}{\text{نها}}\ س^٢ = ٤$

$\text{د}(٢^+) = \underset{س\to٢^+}{\text{نها}}\ ٢س = ٤$

$\because \text{د}(٢^-) = \text{د}(٢^+) = ٤ \quad \therefore \underset{س\to٢}{\text{نها}}\ \text{د}(س) = ٤$

٦

$\text{د}(٢^-) = \text{د}(٢^+) =$ صفر $\quad \therefore \underset{س\to٢}{\text{نها}}\ \text{د}(س) =$ صفر

٧

$\text{د}(٠^+) = \underset{س\to٠^+}{\text{نها}} \left(\frac{س}{\sqrt{س + ١} - ١} \times \frac{\sqrt{س + ١} + ١}{\sqrt{س + ١} + ١} \right)$

$= \underset{س\to٠^+}{\text{نها}} \frac{س\left(\sqrt{س + ١} + ١\right)}{س + ١ - ١}$

$= \underset{س\to٠^+}{\text{نها}} \left(\sqrt{س + ١} + ١\right) = ٢$

$\text{د}(٠^-) = \underset{س\to٠^-}{\text{نها}} \frac{٢س}{\text{جا}\,س} = ٢$

$\because \text{د}(٠^+) = \text{د}(٠^-) \quad \therefore \underset{س\to٠}{\text{نها}}\ \text{د}(س) = ٢$

٨

$\text{د}(٤^-) = \underset{س\to٤^-}{\text{نها}} \frac{(س - ٣)^٦ - ١}{س - ٤}$

$= \underset{س-٣\to١}{\text{نها}} \frac{(س - ٣)^٦ - ١^٦}{(س - ٣) - ١} = ٦$

$\text{د}(٤^+) = \underset{س\to٤^+}{\text{نها}} (س + ٢) = ٦$

$\because \text{د}(٤^+) = \text{د}(٤^-) \quad \therefore \underset{س\to٤}{\text{نها}}\ \text{د}(س) = ٦$

٩

$\because \underset{س\to٣}{\text{نها}}\ \text{د}(س) = ٧$

$\therefore \text{د}(٣^-) = \text{د}(٣^+) = ٧$

$\because \text{د}(٣^-) = ٤ + ٣ب = ٧ \quad \therefore ب = ١$

$\because \text{د}(٣^+) = ١٠ + أ = ٧ \quad \therefore أ = -٣$

١٠

$\because \text{د}(٠^-) = \text{د}(٠^+) = ٢ \quad \therefore \text{د}(٠^-) = أ = ٢$

١١

$\because \underset{س\to٣}{\text{نها}} |أس + ٢| = ١٤$

$\therefore |٣أ + ٢| = ١٤$

$\therefore ٣أ + ٢ = ١٤ \quad \therefore أ = ٤$

أو $٣أ + ٢ = -١٤ \quad \therefore أ = \frac{-١٦}{٣}$

١٢

① $\text{د}\left(\frac{-\pi}{٢}^-\right) = \underset{س\to(\frac{-\pi}{٢})^-}{\text{نها}} \frac{٣س}{\text{ظا}\,س} = \frac{-\pi}{-٢\sqrt{٣}} = \frac{\pi}{٢\sqrt{٣}}$

$\text{د}\left(\frac{-\pi}{٢}\right)$ غير موجودة

$\therefore \underset{س\to\frac{-\pi}{٢}}{\text{نها}}\ \text{د}(س)$ غير موجودة

② $\text{د}\left(\frac{\pi}{٢}^-\right) = ٢\,\text{جا}\,\frac{\pi}{٢} = \frac{٣}{٢}$

$\text{د}\left(\frac{\pi}{٢}^+\right)$ غير موجودة

$\underset{س\to\frac{\pi}{٢}}{\text{نها}}\ \text{د}(س)$ غير موجودة

(٣) $د(٠^-) = \lim_{س \to ٠^-} \frac{٢س}{طا\,س} = ٢$

، $د(٠^+) = ٢$

$\because د(٠^-) = د(٠^+) = ٢ \quad \therefore \lim_{س \to ٠} د(س) = ٢$

١٣

$\because د(س) = س^٢ + \frac{\sqrt{س^٢ - ٦س + ٩}}{س - ٣} = س^٢ + \frac{|س - ٣|}{س - ٣}$

$\therefore د(س) = \begin{cases} س^٢ + ١ & ، س > ٣ \\ س^٢ - ١ & ، س < ٣ \end{cases}$

$د(٣^+) = \lim_{س \to ٣^+} (س^٢ + ١) = ١٠$

$د(٣^-) = \lim_{س \to ٣^-} (س^٢ - ١) = ٨$

، $\because د(٣^+) \neq د(٣^-) \quad \therefore \lim_{س \to ٣} د(س)$ غير موجودة.

١٤

$د(س) = \frac{س^٢ + ٢|س|}{س}$

$د(س) = \begin{cases} \frac{س^٢ + ٢س}{س} & ، س > ٠ \\ \frac{س^٢ - ٢س}{س} & ، س < ٠ \end{cases}$

$= \begin{cases} \frac{س(س + ٢)}{س} & ، س > ٠ \\ \frac{س(س - ٢)}{س} & ، س < ٠ \end{cases}$

$= \begin{cases} س + ٢ & ، س > ٠ \\ س - ٢ & ، س < ٠ \end{cases}$

$د(٠^-) = ٠ - ٢ = -٢$

$د(٠^+) = ٠ + ٢ = ٢$

$\because د(٠^-) \neq د(٠^+) \quad \therefore \lim_{س \to ٠} د(س)$ غير موجودة.

١٥

$د(س) = \begin{cases} -س^٢ + ٢ & ، س < ٠ \\ ٢ & ، س > ٠ \end{cases}$

$د(٠^-) = \lim_{س \to ٠^-} (-س^٢ + ٢) = ٢$

$د(٠^+) = ٢$

$\because د(٠^-) = د(٠^+) \quad \therefore \lim_{س \to ٠} د(س) = ٢$

١٦

$د(س) = \begin{cases} \frac{(س - ١)^٢}{-(س - ١)} & ، س < ١ \\ ٦س - ٢م & ، س > ١ \end{cases}$

$= \begin{cases} -(س - ١) & ، س < ١ \\ ٦س - ٢م & ، س > ١ \end{cases}$

$\because \lim_{س \to ١} د(س)$ لها وجود عند $س = ١$

$\therefore د(١^-) = د(١^+)$

$\therefore -(١ - ١) = ٦(١) - ٢م$

$\therefore م = ٣$

١٧

$(د + ر)(س) = \begin{cases} س^٢ - ٢س + ٢ & ، س \geq ١ \\ ٢س^٢ - ٥س + ٤ & ، س < ١ \end{cases}$

$(د + ر)(١^+) = \lim_{س \to ١^+} (س^٢ - ٢س + ٢) = ١$

$(د + ر)(١^-) = \lim_{س \to ١^-} (٢س^٢ - ٥س + ٤) = ١$

$\because (د + ر)(١^+) = (د + ر)(١^-)$

$\therefore \lim_{س \to ١} [د(س) + ر(س)] = ١$

١٨

$\because$ الدالة لها نهاية عند $س = ٠$

$\therefore د(٠^+) = د(٠^-)$

$\therefore \lim_{س \to ٠^+} \frac{أس}{\sqrt{س + ٤} - ٢} = \lim_{س \to ٠^-} \frac{جا\,٢س}{أس}$

$\therefore \lim_{س \to ٠} \left(\frac{أس}{\sqrt{س + ٤} - ٢} \times \frac{\sqrt{س + ٤} + ٢}{\sqrt{س + ٤} + ٢} \right) = \frac{٢}{أ}$

$\therefore \lim_{س \to ٠} \frac{أس(\sqrt{س + ٤} + ٢)}{س} = \frac{٢}{أ}$

$\therefore ٤أ = \frac{٢}{أ} \qquad \therefore ٤أ^٢ = ٢ \qquad \therefore أ = \pm \frac{\sqrt{٢}}{٢}$

١٩

(١) $د(٥^+) = \lim_{س \to ٥^+} \sqrt{س - ٥} =$ صفر

$د(٥^-)$ غير موجودة

$\therefore \lim_{س \to ٥} د(س)$ غير موجودة

(٢) $د(٢^+)$ غير موجودة

$د(٢^-) = \lim_{س \to ٢^-} \sqrt{٢ - س} =$ صفر

$\therefore \lim_{س \to ٢} د(س)$ غير موجودة

(٣) $د(-١^+)$ غير موجودة

$د(-١^-) = \lim_{س \to (-١)^-} \sqrt{س^٢ - ١} =$ صفر

$\therefore \lim_{س \to -١} د(س)$ غير موجودة

$د(١^+) = \lim_{س \to ١^+} \sqrt{س^٢ - ١} =$ صفر

$د(١^-)$ غير موجودة

$\therefore \lim_{س \to ١} د(س)$ غير موجودة

(٤) $د(-٢^-)$ غير موجودة

$د(-٢^+) = \lim_{س \to (-٢)^+} \sqrt{٤ - س^٢} =$ صفر

$\therefore \lim_{س \to -٢} د(س)$ غير موجودة

، $د(٢^+)$ غير موجودة

، $د(٢^-) = \lim_{س \to ٢^-} \sqrt{٤ - س^٢} =$ صفر

$\therefore \lim_{س \to ٢} د(س)$ غير موجودة

٢٠

(١) $د(٠^-) = \lim_{س \to ٠^-} \frac{(س + ٢)^٦ - ٢^٦}{س(س + ٣٢)}$

$= \lim_{س \to ٠^-} \left[\frac{١}{س + ٣٢} \times \frac{(س + ٢)^٦ - ٢^٦}{س} \right]$

$= \frac{١}{٣٢} \times ٦ \times ٢^٥ = ٦$

، $د(٠^+) = \lim_{س \to ٠^+} \frac{-١٢س}{١ - (جتا\,س + جا\,س)^٢}$

$= \lim_{س \to ٠^+} \frac{-١٢س}{١ - (١ + ٢\,جا\,س\,جتا\,س)}$

$= \lim_{س \to ٠^+} \frac{١٢س}{٢\,جا\,س\,جتا\,س} = ٦$

، $\because د(٠^-) = د(٠^+) = ٦$

$\therefore \lim_{س \to ٠} د(س) = ٦$

(٢) $د(٠^-) = \lim_{س \to ٠^-}$ [illegible]

$= \lim$ [illegible]

$= \lim$ [illegible]

$= \lim$ [illegible]

= [illegible]

، $د(٠^+) = \lim$ [illegible]

$= \lim$ [illegible]

= [illegible]

، $\because د(٠^-) = د(٠^+) =$ [illegible]

$\therefore \lim_{س \to ٠} د(س) =$ [illegible]

٢١

$\because |س| = \begin{cases} س & ، س \geq ٠ \\ -س & ، س < ٠ \end{cases}$

(١) $\lim_{س \to ٠^+}$ [illegible] $= ١$

، $\lim_{س \to ٠^-}$ [illegible] $= -١$

$\therefore$ النهاية اليمنى $\neq$ النهاية اليسرى

$\therefore \lim_{س \to ٠}$ [illegible] غير موجودة

② نهـا$_{س \leftarrow ٠^+}$ $\frac{جا|س|}{س+١}$ = نهـا$_{س \leftarrow ٠^+}$ $\frac{جاس}{س+١}$ = ١

، نهـا$_{س \leftarrow ٠^-}$ $\frac{جا|س|}{س+١}$ = نهـا$_{س \leftarrow ٠^-}$ $\frac{جا(-س)}{س+١}$

= نهـا$_{س \leftarrow ٠^-}$ $\frac{جاس}{س+١}$ = ١

∵ النهاية اليمنى = النهاية اليسرى = ١

∴ نهـا$_{س \leftarrow ٠}$ $\frac{جا|س|}{س+١}$ = ١

٢٢

نهـا$_{س \leftarrow ٠^+}$ $\frac{\sqrt{قا^2 س - ١}}{س}$ = نهـا$_{س \leftarrow ٠}$ $\frac{\sqrt{ظا^2 س}}{س}$

= نهـا$_{س \leftarrow ٠}$ $\frac{|ظاس|}{س}$

، ∵ |ظاس| = { ظاس ، ظاس ≥ ٠ ؛ -ظاس ، ظاس < ٠ }

∴ نهـا$_{س \leftarrow ٠^+}$ $\frac{|ظاس|}{س}$ = نهـا$_{س \leftarrow ٠^+}$ $\frac{ظاس}{س}$ = ١

«لاحظ عندما س ← ٠$^+$ فإن ظاس ← ٠$^+$»

، نهـا$_{س \leftarrow ٠^-}$ $\frac{|ظاس|}{س}$ = نهـا$_{س \leftarrow ٠^-}$ $\frac{-ظاس}{س}$ = -١

«لاحظ عندما س ← ٠$^-$ فإن ظاس ← ٠$^-$»

، ∵ النهاية اليمنى ≠ النهاية اليسرى

∴ نهـا$_{س \leftarrow ٠}$ $\frac{\sqrt{قا^2 س - ١}}{س}$ غير موجودة

٢٣

نهـا$_{س \leftarrow ٢^+}$ (ق(س) + هـ(س))

= نهـا$_{س \leftarrow ٢^+}$ (ق(س)) + نهـا$_{س \leftarrow ٢^+}$ (هـ(س))

= ١٤ + ٤ = ١٨

، نهـا$_{س \leftarrow ٢^-}$ (ق(س) + هـ(س))

= نهـا$_{س \leftarrow ٢^-}$ (ق(س)) + نهـا$_{س \leftarrow ٢^-}$ (هـ(س))

= ١٠ + ٨ = ١٨

∴ نهـا$_{س \leftarrow ٢^+}$ (ق(س) + هـ(س))

= نهـا$_{س \leftarrow ٢^-}$ (ق(س) + هـ(س))

∴ نهـا$_{س \leftarrow ٢}$ [ق(س) + هـ(س)] = ١٨

٢٤

① ∵ نهـا$_{س \leftarrow ٢^-}$ $\frac{١}{س-٢}$ = $\frac{١}{٠^-}$ = -∞

، نهـا$_{س \leftarrow ٢^+}$ $\frac{١}{س-٢}$ = $\frac{١}{٠^+}$ = ∞

∴ نهـا$_{س \leftarrow ٢}$ $\frac{١}{س-٢}$ غير موجودة

② ∵ نهـا$_{س \leftarrow ٢^-}$ د(س) = $\frac{١}{٠^+}$ = ∞

نهـا$_{س \leftarrow ٢^+}$ د(س) = $\frac{١}{٠^+}$ = ∞

∴ نهـا$_{س \leftarrow ٢}$ د(س) = ∞

③ ∵ نهـا$_{س \leftarrow ١^-}$ $\frac{١}{س-١}$ = $\frac{١}{٠^-}$ = -∞

نهـا$_{س \leftarrow ١^+}$ (س - ٢) = -١

∴ نهـا$_{س \leftarrow ١}$ د(س) غير موجودة.

٢٥

د(س) = { ١ + $\frac{س(س+٢)}{-(س+٢)}$ ، -٣ < س < -٢ ؛ ١ + $\frac{س(س+٢)}{س+٢}$ ، -٢ < س < ٠ ؛ ٢س + ١ ، ٠ < س < ٢ }

= { ١ - س ، -٣ < س < -٢ ؛ ١ + س ، -٢ < س < ٠ ؛ ٢س + ١ ، ٠ < س < ٢ }

① نهـا د(س) غير موجودة

نهـا د(س) = ٤

∴ نهـا د(س) غير موجودة

② نهـا د(س) = ١ - (-٢) = ٣

نهـا د(س) = ١ + (-٢) = -١

∴ نهـا د(س) غير موجودة

③ نهـا د(س) = ١

نهـا د(س) = ١

∴ نهـا د(س) = ١

④ نهـا د(س) = ٢(٣) + ١ = ٧

، نهـا د(س) غير موجودة

∴ نهـا د(س) غير موجودة

٢٦

د(٢$^+$) = نهـا $\frac{[illegible]}{[illegible]}$

= [illegible]

= $\frac{٢}{٣}$ × $\frac{١}{٢}$ × ٤ = $\frac{١٠}{٩}$ [illegible]

، ∵ الدالة لها نهاية عند س = ٢

∴ د(٢$^+$) = د(٢$^-$)

∴ $\frac{١٠}{٩}$ = ٢ك ∴ ك = $\frac{٥}{٩}$

٢٧

∵ الدالة لها نهاية عند س = ٣

[illegible]

أسئلة تقيس مهارات التفكير

[illegible]

إرشادات الحل:

① ∵ د(س) = س^2

∴ د(د(س)) = (س^2)^2 = س^4

∴ نهـا د(د(س)) = نهـا س^4

= ٢^4 = ١٦

② ∵ نهـا (س ← ٢) د (س) = ٧

∴ المنحنى إما يمر بالنقطة (٣ ، ٧) أو عنده ثغرة عند هذه النقطة.

، ∵ د دالة فردية.

∴ المنحنى إما يمر بالنقطة (−٣ ، −٧) أو عنده ثغرة عند هذه النقطة.

∴ نهـا (س ← −٢) د (س) = −٧

③ ∵ نهـا (س ← ٢) د (س) = ٥

∴ المنحنى إما يمر بالنقطة (٢ ، ٥) أو عنده ثغرة عند هذه النقطة.

، ∵ د دالة زوجية.

∴ المنحنى إما يمر بالنقطة (−٢ ، ٥) أو عنده ثغرة عند هذه النقطة.

∴ نهـا (س ← −٢) د (س) = ٥

④ ∵ د دالة كثيرة حدود ، نهـا (س ← ٢) د (س) = ٣

∴ منحنى الدالة يمر بالنقطة (٢ ، ٣)

∴ منحنى $د^{-1}$ يمر بالنقطة (٣ ، ٢)

∴ نهـا (س ← ٣) $د^{-1}$ (س) = ٢

⑤ ∵ منحنى د (س + ١) هو نفس منحنى د (س) بإزاحة أفقية مقدارها وحدة واحدة فى اتجاه و س←

، ∵ نهـا د (س) = ٥ عند س ← ٢

∴ نهـا د (س + ١) = ٥ عندما س ← ١

اى أن : نهـا (س ← ١) د (س + ١) = ٥

⑥ ∵ نهـا (س ← −٢) $\frac{[د (س)]^3 - ٦٤}{د (س) - ٤}$

• لاحظ أن عند س ← −٢

فإن د (س) ← د (−٢) أى أن : د (س) ← ٤ •

= نهـا (د (س) ← ٤) $\frac{[د (س)]^3 - (٤)^3}{[د (س)] - (٤)}$ = ٣ $(٤)^2$ = ٤٨

⑦ من الرسم نجد أن د (س) = س − ١

، ر (س) = − س + ١

∴ نهـا (س ← ١) $\frac{د (س)}{ر (س)}$ = نهـا (س ← ١) $\frac{س - ١}{- س + ١}$

= نهـا (س ← ١) $\frac{س - ١}{-(س - ١)}$ = −١

⑧ نهـا (س ← ١^+) د (س)

= نهـا (س ← ١^+) [هـ (س) + ر (س)]

= نهـا (س ← ١^+) هـ (س) + نهـا (س ← ١^+) ر (س)

= −١ + ١ = صفر

، نهـا (س ← ١^-) د (س)

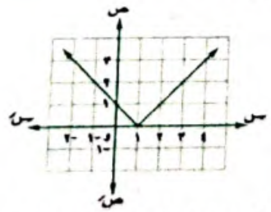
= نهـا (س ← ١^-) [هـ (س) + ر (س)]

= نهـا (س ← ١^-) هـ (س) + نهـا (س ← ١^-) ر (س)

= ٢ + (−٢) = صفر

∴ نهـا (س ← ١) د (س) = صفر

⑨



لاحظ أن : منحنى | د (س) | هو نفس منحنى د (س) بعد انعكاس الجزء الموجود اسفل محور السينات لأعلى كما بالشكل السابق

ومن الرسم ∴ نهـا (س ← ٢) | د (س) | = ١

⑩ ∵ د (س) = $\frac{٤}{٣}$ س + ٤

وبتبديل المتغيرين

∴ س = $\frac{٤}{٣}$ ص + ٤

∴ ص = $\frac{٣}{٤}$ (س − ٤) = $\frac{٣}{٤}$ س − ٣

∴ $د^{-1}$ (س) = $\frac{٣}{٤}$ س − ٣

∴ نهـا $\frac{د (س)}{د^{-1} (س)}$ = نهـا $\frac{\frac{٤}{٣} س + ٤}{\frac{٣}{٤} س - ٣}$

= $\frac{١٦}{٩}$

إجابات تمارين 18

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

① (ب)	② (أ)	③ (د)	④ (أ)
⑤ (د)	⑥ (ب)	⑦ (أ)	⑧ (جـ)
⑨ (جـ)	⑩ (جـ)	⑪ (جـ)	⑫ (ب)
⑬ (أ)	⑭ (جـ)	⑮ (ب)	⑯ (جـ)
⑰ (جـ)	⑱ (د)	⑲ (جـ)	⑳ (أ)
㉑ (أ)	㉒ (أ)	㉓ (أ)	㉔ (د)
㉕ (ب)	㉖ (ب)	㉗ (جـ)	㉘ (د)
㉙ (أ)	㉚ (أ)	㉛ (جـ)	㉜ (جـ)
㉝ (جـ)	㉞ (ب)	㉟ (ب)	㊱ (د)
㊲ (د)	㊳ (ب)		

ثانيا الأسئلة المقالية

تمارين على الاتصال عند نقطة

١

① ∵ د (−١) = نهـا (س ← −١) ($س^2$ + س − ٢) = −٢

∴ الدالة د متصلة عند س = −١

② ∵ د (٩) = نهـا (س ← ٩) $\sqrt[3]{س - ١}$ = ٢

∴ الدالة د متصلة عند س = ٩

③ ∵ د (١) = نهـا (س ← ١) ... = ٣

∴ الدالة د متصلة عند س = ١

، ∵ د (٢) غير معرفة

∴ الدالة د غير متصلة عند س = ٢

④ د (٣) = نهـا (س ← ٣) (٥ − | س − ٢ |) = ٤

∴ الدالة د متصلة عند س = ٣

⑤ ∵ د (٤) = نهـا (س ← ٤) (| س − ٤ | + | س + ٢ |) = ٦

∴ الدالة د متصلة عند س = ٤

، ∵ د (−٢) = نهـا (س ← −٢) (| س − ٤ | + | س + ٢ |) = ٦

∴ الدالة د متصلة عند س = −٢

⑥ ∵ د ($\frac{١}{٢}$) = ٤ $(\frac{١}{٢})^2$ + ٣ = ٤

، د ($\frac{١}{٢}^+$) = نهـا (٤ $س^2$ + ٣) = ٤

، د ($\frac{١}{٢}^-$) = نهـا (٥ − ٢ س) = ٤

∴ د ($\frac{١}{٢}$) = د ($\frac{١}{٢}^+$) = د ($\frac{١}{٢}^-$)

∴ الدالة د متصلة عند س = $\frac{١}{٢}$

⑦ ∵ د (−١) = نهـا ٢ س = −٢

∴ الدالة د متصلة عند س = −١

، ∵ الدالة د غير معرفة عند س = ١

∴ الدالة د غير متصلة عند س = ١

⑧ • عند س = −٢

د (−٢) = ١ ، د (-٢^+) = ١

، د (-٢^-) = نهـا (س + ٤) = ٢

، ∵ د (-٢^+) ≠ د (-٢^-)

∴ الدالة د غير متصلة عند س = −٢

* عند س = −١

د (−١) = −٢ + ٣ = ١ ، د (−١$^{-}$) = ١

، د (−١$^{+}$) = نهـا (س ← −١$^{+}$) (٢ س + ٣) = ١

∴ د (−١) = د (−١$^{-}$) = د (−١$^{+}$)

∴ الدالة د متصلة عند س = −١

⑨ ∵ د (١) = ٤

، د (١$^{+}$) = نهـا (س ← ١$^{+}$) (س^{٢} + ٣) = ٤

، د (١$^{-}$) = نهـا (س ← ١$^{-}$) (س^{٢} + ٢ س − ٣) / (س − ١)

= نهـا (س ← ١$^{-}$) (س − ١) (س + ٣) / (س − ١) = ٤

، ∵ د (١) = د (١$^{-}$) = د (١$^{+}$)

∴ الدالة د متصلة عند س = ١

⑩ د (س) = { س^{٢} ، س > ٠ ؛ ٢ ، س = ٠ ؛ −س^{٢} ، س < ٠ }

د (٠) = ٢ ، د (٠$^{+}$) = نهـا (س ← ٠$^{+}$) س^{٢} = ٠

، د (٠$^{-}$) = نهـا (س ← ٠$^{-}$) (−س^{٢}) = ٠

∵ د (٠) ≠ نهـا (س ← ٠) د (س)

∴ الدالة د غير متصلة عند س = ٠

⑪ د (س) = { ١ ، س > ٣ ؛ ٢ ، س = ٣ ؛ −١ ، س < ٣ }

د (٣) = ٢ ، د (٣$^{+}$) = ١ ، د (٣$^{-}$) = −١

∵ د (٣) ≠ د (٣$^{+}$) ≠ د (٣$^{-}$)

∴ الدالة د غير متصلة عند س = ٣

⑫ د (س) = { (س^{٢} − س − ٢) / (س − ٢) ، س < ٢ ؛ ٣ ، س ≥ ٢ }

= { (س − ٢) (س + ١) / (س − ٢) ، س < ٢ ؛ ٣ ، س ≥ ٢ }

= { س + ١ ، س < ٢ ؛ ٣ ، س ≥ ٢ }

∴ د (٢) = ٣ ، د (٢$^{+}$) = نهـا (س ← ٢$^{+}$) ٣ = ٣

، د (٢$^{-}$) = نهـا (س ← ٢$^{-}$) (س + ١) = ٣

، ∵ د (٢) = د (٢$^{+}$) = د (٢$^{-}$)

∴ الدالة د متصلة عند س = ٢

⑬ د (٢) = ٣ × ٤ + ٢ = ١٤

، نهـا (س ← ٢) د (س) = نهـا (س ← ٢) (س^{٧} − ٢^{٧}) / (س^{٤} − ٢^{٤})

= $\frac{٧}{٤}$ (٢)^{٣} = ١٤

∴ د (٢) = نهـا (س ← ٢) د (س)

∴ الدالة د متصلة عند س = ٢

⑭ د (٠) = ٠

، د (٠$^{-}$) = ٢ نهـا (س ← ٠$^{-}$) جا س = ٠

، د (٠$^{+}$) = نهـا (س ← ٠$^{+}$) (١ − جتا س) / س = ٠

∴ د (٠) = د (٠$^{-}$) = د (٠$^{+}$)

∴ الدالة د متصلة عند س = ٠

⑮ د (٢) = $\frac{١}{٤}$

، د (٢$^{+}$) = نهـا (س ← ٢$^{+}$) (١ − ٣ / س^{٢}) = $\frac{١}{٤}$

، د (٢$^{-}$) = نهـا (س ← ٢$^{-}$) جا (س − ٢) / (س^{٢} − ٤)

= نهـا (س ← ٢$^{-}$) جا (س − ٢) / (س − ٢)

× نهـا (س ← ٢$^{-}$) ١ / (س + ٢) = ١ × $\frac{١}{٤}$ = $\frac{١}{٤}$

∵ د (٢) = د (٢$^{-}$) = د (٢$^{+}$)

∴ الدالة د متصلة عند س = ٢

⑯ د (س) = { −س^{٢} + ٤ ، س ≤ ٠ ؛ ٤ ، س > ٠ }

د (٠) = ٤

، د (٠$^{-}$) = نهـا (س ← ٠$^{-}$) (−س^{٢} + ٤) = ٤

، د (٠$^{+}$) = ٤

∴ د (٠) = د (٠$^{+}$) = د (٠$^{-}$)

∴ الدالة د متصلة عند س = ٠

⑰ د (س) = { (س − ١) (س + ٣) / |س + ٣| ، س ≠ −٣ ؛ ٢ ، س = −٣ }

= { س − ١ ، س > −٣ ؛ ٢ ، س = −٣ ؛ −س + ١ ، س < −٣ }

* عند س = −٣

د (−٣) = ٢

، د (−٣$^{+}$) = نهـا (س ← −٣$^{+}$) (س − ١) = −٤

، د (−٣$^{-}$) = نهـا (س ← −٣$^{-}$) (−س + ١) = ٤

∵ د (−٣$^{+}$) ≠ د (−٣$^{-}$)

∴ الدالة د غير متصلة عند س = −٣

* عند س = ١

د (١) = صفر

، نهـا (س ← ١) د (س) = نهـا (س ← ١) (س − ١)

= صفر

∵ د (١) = نهـا (س ← ١) د (س)

∴ الدالة د متصلة عند س = ١

⑱ د (س) = { −س − ٣ ، س < −٣ ؛ س + ٣ ، −٣ ≤ س ≤ ٢ ؛ ١١ − ٣ س ، س > ٢ }

* عند س = −٣

د (−٣) = صفر

، د (−٣$^{-}$) = نهـا (س ← −٣$^{-}$) (−س − ٣) = صفر

، د (−٣$^{+}$) = نهـا (س ← −٣$^{+}$) (س + ٣) = صفر

∴ د (−٣) = د (−٣$^{-}$) = د (−٣$^{+}$)

∴ الدالة د متصلة عند س = −٣

* عند س = ٢

د (٢) = ٥

، د (٢$^{-}$) = نهـا (س ← ٢$^{-}$) (س + ٣) = ٥

، د (٢$^{+}$) = نهـا (س ← ٢$^{+}$) (١١ − ٣ س) = ٥

∴ د (٢) = د (٢$^{-}$) = د (٢$^{+}$)

∴ الدالة د متصلة عند س = ٢

⑲ د (٠) = ٣

، د (٠$^{+}$) = نهـا (س ← ٠$^{+}$) (س + ٣) / (س + ١) = ٣

، د (٠$^{-}$) = نهـا (س ← ٠$^{-}$) (٤ س^{٢} + ظا^{٢} ٢ س) / (س ظا ٣ س)

= نهـا (س ← ٠$^{-}$) (٤ + (ظا ٢ س / س)^{٢}) / (ظا ٣ س / س)

= (٤ + ٥) / ٣ = ٣

∴ د (٠) = د (٠$^{-}$) = د (٠$^{+}$)

∴ الدالة د متصلة عند س = ٠

⑳ د (π) = ١

، نهـا (س ← π) د (س) = نهـا (س ← π) جا س / (π − س)

= نهـا ((π − س) ← ٠) جا (π − س) / (π − س) = ١

∴ د (π) = نهـا (س ← π) د (س)

∴ الدالة د متصلة عند س = π

٢

① $\text{د}(-٣) = -٣ + \text{أ}$

، $\lim_{\text{س}\to -٣} \text{د}(\text{س})$

$= \lim_{\text{س}\to -٣} \frac{(\text{س}+٣)(\text{س}-١)}{\text{س}+٣} = -٤$

، ∵ الدالة د متصلة عند س = −٣

∴ $-٣ + \text{أ} = -٤$ ∴ $\text{أ} = -١$

② $\lim_{\text{س}\to ٢} \text{د}(\text{س})$

$= \lim_{\text{س}\to ٢} \frac{(\text{س}-٢)(\text{س}-٣)}{(\text{س}-٢)(\text{س}^٢+٢\text{س}+٤)}$

$= \lim_{\text{س}\to ٢} \frac{\text{س}-٣}{\text{س}^٢+٢\text{س}+٤} = \frac{-١}{١٢}$

، $\text{د}(٢) = \frac{-٢}{|\text{أ}|}$

، ∵ الدالة د متصلة عند س = ٢

∴ $-\frac{١}{١٢} = \frac{-٢}{|\text{أ}|}$ ∴ $|\text{أ}| = ٢٤$ ∴ $\text{أ} = \pm ٢٤$

③ $\text{د}(١) = \text{ك}$

، $\lim_{\text{س}\to ١} \text{د}(\text{س})$

$= \lim_{\text{س}\to ١} \frac{\sqrt{\text{س}+٣}-٢}{\text{س}^٢-١} \times \frac{\sqrt{\text{س}+٣}+٢}{\sqrt{\text{س}+٣}+٢}$

$= \lim_{\text{س}\to ١} \frac{\text{س}+٣-٤}{(\text{س}-١)(\text{س}+١)(\sqrt{\text{س}+٣}+٢)}$

$= \lim_{\text{س}\to ١} \frac{١}{(\text{س}+١)(\sqrt{\text{س}+٣}+٢)} = \frac{١}{٨}$

∵ الدالة د متصلة عند س = ١ ∴ $\text{ك} = \frac{١}{٨}$

④ $\text{د}(٠) = \text{أ} + ١$

، $\lim_{\text{س}\to ٠} \text{د}(\text{س}) = \lim_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{جا}^٢ ٢\text{س}}{\text{س} \text{ظا} ٣\text{س}}$

$= \lim_{\text{س}\to ٠} \frac{\left(\frac{\text{جا} ٢\text{س}}{\text{س}}\right)^٢}{\frac{\text{ظا} ٣\text{س}}{\text{س}}} = \frac{٤}{٣}$

∵ الدالة د متصلة عند س = ٠

∴ $\text{أ} + ١ = \frac{٤}{٣}$ ∴ $\text{أ} = \frac{١}{٣}$

⑤ $\text{د}(-٢) = -٨$

، $\text{د}(-٢^+) = \lim_{\text{س}\to -٢^+} (\text{أ}\text{س}+\text{ب}) = -٢\text{أ}+\text{ب}$

∵ الدالة د متصلة عند س = −٢

∴ $-٢\text{أ}+\text{ب} = -٨$ (١)

$\text{د}(٥) = ١٣$

، $\text{د}(٥^-) = \lim_{\text{س}\to ٥^-} (\text{أ}\text{س}+\text{ب}) = ٥\text{أ}+\text{ب}$

∵ الدالة د متصلة عند س = ٥

∴ $٥\text{أ}+\text{ب} = ١٣$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ أ = ٣ ، ب = −٢

⑥ $\text{د}(٢) = ٣$

، $\text{د}(٢^+) = \lim_{\text{س}\to ٢^+} (\text{أ}+\text{ب}\text{س}) = \text{أ}+٢\text{ب}$

، $\text{د}(٢^-) = \lim_{\text{س}\to ٢^-} (\text{ب}-\text{أ}\text{س}^٢) = \text{ب}-٤\text{أ}$

∵ الدالة د متصلة عند س = ٢

∴ $\text{أ}+٢\text{ب} = ٣$ (١)

، $\text{ب}-٤\text{أ} = ٣$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ $\text{أ} = -\frac{١}{٣}$ ، $\text{ب} = \frac{٥}{٣}$

⑦ $\text{د}(٠) = \text{ك}$

، $\lim_{\text{س}\to ٠} \text{د}(\text{س})$

$= \lim_{\text{س}\to ٠} \left[\frac{\text{جتا} ٢\text{س}-١}{\text{س}^٢} \times \frac{\text{جتا} ٢\text{س}+١}{\text{جتا} ٢\text{س}+١}\right]$

$= \lim_{\text{س}\to ٠} \left[\frac{\text{جتا}^٢ ٢\text{س}-١}{\text{س}^٢} \times \frac{١}{\text{جتا} ٢\text{س}+١}\right]$

$= \lim_{\text{س}\to ٠} \frac{-\text{جا}^٢ ٢\text{س}}{\text{س}^٢} \times \lim_{\text{س}\to ٠} \frac{١}{\text{جتا} ٢\text{س}+١}$

$= -\lim_{\text{س}\to ٠} \left(\frac{\text{جا} ٢\text{س}}{\text{س}}\right)^٢ \times \frac{١}{٢} = -٢$

، ∵ الدالة د متصلة عند س = ٠ ∴ ك = −٢

⑧ $\text{د}(\text{حـ}^-) = ٢ - \text{حـ}^٢$ ، $\text{د}(\text{حـ}^+) = \text{حـ}$

∵ الدالة د متصلة عند س = حـ

∴ $٢ - \text{حـ}^٢ = \text{حـ}$ ∴ $\text{حـ}^٢ + \text{حـ} - ٢ = ٠$

∴ $(\text{حـ}-١)(\text{حـ}+٢) = ٠$

∴ حـ = ١ أ، حـ = −٢

⑨ $\text{د}(٠) = ٠$ ، $\lim_{\text{س}\to ٠} \text{د}(\text{س})$

$= \lim_{\text{س}\to ٠} \frac{١-\text{جتا}\text{س}}{\text{ك}\text{س}} = ٠ \times \frac{١}{\text{ك}}$

، ∵ الدالة د متصلة عند س = ٠

∴ $\frac{١}{\text{ك}} \times ٠ = ٠$ عندما ك ∈ ح − {٠}

٣

① $\lim_{\text{س}\to ٣} \frac{\text{س}^٢-\text{س}-٦}{\text{س}-٣}$

$= \lim_{\text{س}\to ٣} \frac{(\text{س}+٢)(\text{س}-٣)}{\text{س}-٣} = ٥$

إعادة التعريف :

$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \frac{\text{س}^٢-\text{س}-٦}{\text{س}-٣} & ،\ \text{س} \neq ٣ \\ ٥ & ،\ \text{س} = ٣ \end{cases}$

② $\lim_{\text{س}\to ١} \frac{\text{س}^٣-١}{\text{س}^٢-٣\text{س}+٢}$

$= \lim_{\text{س}\to ١} \frac{(\text{س}-١)(\text{س}^٢+\text{س}+١)}{(\text{س}-١)(\text{س}-٢)} = -٣$

إعادة التعريف :

$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \frac{\text{س}^٣-١}{\text{س}^٢-٣\text{س}+٢} & ،\ \text{س} \neq ١ \\ -٣ & ،\ \text{س} = ١ \end{cases}$

③ $\text{د}(١^+) = \lim_{\text{س}\to ١^+} (\text{س}^٢ + ٢\text{س}) = ٣$

$\text{د}(١^-) = \lim_{\text{س}\to ١^-} (٥\text{س} - ١) = ٤$

∵ $\text{د}(١^+) \neq \text{د}(١^-)$

∴ الدالة لا يمكن إعادة تعريفها لكي تصبح متصلة عند س = ١

④ $\text{د}(٢^+) = \lim (\text{س}^٢ + ١) = ٥$ [illegible]

، $\text{د}(٢^-) = \lim \frac{(\text{س}-٢)(\text{س}+٢)}{\text{س}-٢} = ٤$

، ∵ $\text{د}(٢^+) \neq \text{د}(٢^-)$

∴ الدالة لا يمكن إعادة تعريفها لكي تصبح متصلة عند س = ٢

⑤ $\text{د}(٠^+) = \lim_{\text{س}\to ٠^+} \frac{٣\text{س}+١-\text{جتا}\text{س}}{٤\text{س}}$

$= \lim_{\text{س}\to ٠^+} \left(\frac{٣}{٤} + \frac{١-\text{جتا}\text{س}}{٤\text{س}}\right) = \frac{٣}{٤}$

، $\text{د}(٠^-) = \lim_{\text{س}\to ٠^-} \frac{٣\text{جتا}\text{س}}{٤} = \frac{٣}{٤}$

∴ $\lim_{\text{س}\to ٠} \text{د}(\text{س}) = \frac{٣}{٤}$

إعادة التعريف

$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \frac{٣\text{س}+١-\text{جتا}\text{س}}{٤\text{س}} & ،\ \text{س} > ٠ \\ \frac{٣}{٤} & ،\ \text{س} = ٠ \\ \frac{٣}{٤}\text{جتا}\text{س} & ،\ \text{س} < ٠ \end{cases}$

⑥ $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \frac{\text{س}-٣}{\text{س}-٣} & ،\ \text{س} > ٣ \\ \frac{-(\text{س}-٣)}{\text{س}-٣} & ،\ \text{س} < ٣ \end{cases}$

$= \begin{cases} ١ & ،\ \text{س} > ٣ \\ -١ & ،\ \text{س} < ٣ \end{cases}$

$\text{د}(٣^+) = ١$ ، $\text{د}(٣^-) = -١$

∵ $\text{د}(٣^+) \neq \text{د}(٣^-)$

∴ الدالة لا يمكن إعادة تعريفها لكي تصبح متصلة عند س = ٣

⑦ [illegible]

$= ٣ \times ٤ \times ٨^{[illegible]} = ١٩٢$

إعادة التعريف

$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \frac{\text{س}^٥ - [illegible]}{\sqrt[٣]{\text{س}} - ٢} & ،\ \text{س} \neq ٨ \\ ١٩٢ & ،\ \text{س} = ٨ \end{cases}$

⑧ $د(س) = \begin{cases} \frac{س + س}{س} & ، س > ٠ \\ \frac{-س + س}{س} & ، س < ٠ \end{cases}$

$= \begin{cases} ٢ & ، س > ٠ \\ ٠ & ، س < ٠ \end{cases}$

$د(٠^+) = ٢$ ، $د(٠^-) =$ صفر

∵ $د(٠^+) \neq د(٠^-)$

∴ الدالة لا يمكن إعادة تعريفها لكى تصبح متصلة

عند $س = ٠$

⑨ $\lim_{س \to ٠} \left[\frac{٢}{س - ٥} - \frac{١٢}{(س - ٥)(س + ١)}\right]$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٢(س + ١) - ١٢}{(س - ٥)(س + ١)}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٢س - ١٠}{(س - ٥)(س + ١)}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٢(س - ٥)}{(س - ٥)(س + ١)} = \frac{١}{٢}$

إعادة التعريف :

$د(س) = \begin{cases} \frac{٢}{س - ٥} - \frac{١٢}{س^2 - ٤س - ٥} & ، س \neq ٥ \\ \frac{١}{٢} & ، س = ٥ \end{cases}$

⑩ $د(س) = \begin{cases} \frac{جاس}{س} & ، س > ٠ \\ \frac{-جاس}{س} & ، س < ٠ \end{cases}$

∵ $د(٠^+) = \lim_{س \to ٠^+} \frac{جاس}{س} = ١$

، $د(٠^-) = \lim_{س \to ٠^-} \frac{-جاس}{س} = -١$

، ∵ $د(٠^+) \neq د(٠^-)$

∴ الدالة لا يمكن إعادة تعريفها لكى تصبح متصلة

عند $س = ٠$

تمارين على الاتصال على فترة

٤

① ∵ الدالة كثيرة حدود ∴ د متصلة على ح

② ∵ الدالة كثيرة حدود ∴ د متصلة على ح

③ ∵ الدالة كسرية

، $س - ٣ = ٠$ ∴ $س = ٣$

∴ الدالة د متصلة على ح − {٣}

④ ∵ الدالة كسرية

، $س^2 - ٥س + ٦ = ٠$

∴ $(س - ٣)(س - ٢) = ٠$

∴ $س = ٣$ أ، $س = ٢$

∴ د متصلة على ح − {٢ ، ٣}

⑤ ∵ الدالة كسرية

، $س^4 - ١٣س^2 + ٣٦ = ٠$

∴ $(س^2 - ٩)(س^2 - ٤) = ٠$

$س = \pm ٣$ أ، $س = \pm ٢$

∴ د متصلة على ح − {٣ ، −٣ ، ٢ ، −٢}

⑥ ∵ الدالة كسرية

، $س^2 + س + ١ = ٠$

لا توجد أصفار للمقام ∴ د متصلة على ح

⑦ ∵ الدالة كسرية

، $س^3 - س = ٠$ ∴ $س(س^2 - ١) = ٠$

∴ $س = ٠$ أ، $س = \pm ١$

∴ د متصلة على ح − {٠ ، ١ ، −١}

⑧ ∵ الدالة على شكل مقياس لكثيرة حدود

∴ د متصلة على ح

⑨ ∵ كل من الدالتين $س^3$ ، جا ٢س متصلة على ح

∴ د متصلة على ح

⑩ ∵ كل من الدالتين جاس ، ٣ جتا (س + ١)

متصلة على ح ∴ د متصلة على ح

⑪ ∵ كل من الدالتين $(٣س + ٤)^2$ ، جا ٢س

متصلة على ح ∴ د متصلة على ح

⑫ ∵ الدالة كسرية

، $|س| - ٢ = ٠$

∴ $|س| = ٢$ ∴ $س = \pm ٢$

∴ د متصلة على ح − {٢ ، −٢}

⑬ ∵ الدالة كسرية

، $|س| + ١ = ٠$ $|س| = -١$ مرفوض

∴ د متصلة على ح

⑭ ∵ $س - ٢ > ٠$ ∴ $س > ٢$

∴ د متصلة على]٢ ، ∞[

⑮ ∵ الدوال $س^2$ ، (س + ١) ، جا ٣س

متصلة على ح

∴ د متصلة على ح − {−١}

⑯ ∵ $س - ٤ \geq ٠$ ∴ $س \geq ٤$

∴ س ∈ [٤ ، ∞[

∴ د متصلة على الفترة [٤ ، ∞[− {٦}

⑰ ∵ $س - ٣ \geq ٠$

∴ $س \geq ٣$ ∴ س ∈ [٣ ، ∞[

∴ د متصلة على الفترة [٣ ، ∞[− {٢ ، −٢}

أى أن د متصلة على الفترة [٣ ، ∞[

⑱ ∵ $س + ٢ > ٠$

∴ $س > -٢$ ∴ س ∈]−٢ ، ∞[

∴ د متصلة على الفترة]−٢ ، ∞[− {٠}

⑲ ∵ $س + ٢ \geq ٠$

∴ $س \geq -٢$ ∴ س ∈ [−٢ ، ∞[

، $س + ٢ \neq ١$ ∴ $س \neq -١$

∴ د متصلة على [−٢ ، ∞[− {−١}

⑳ ∵ $س + ٢ \geq ٠$

$س \geq -٢$ ∴ س ∈ [−٢ ، ∞[

، $٣ - س \geq ٠$ $٣ \geq س$

∴ س ∈]−∞ ، ٣]

∴ د متصلة على [−٢ ، ٣]

㉑ $٢٥ - س^2 > ٠$ $س^2 < ٢٥$

$|س| < ٥$ $-٥ < س < ٥$

∴ د متصلة على الفترة]−٥ ، ٥[

㉒ $٥ - |س| \geq ٠$

$|س| \leq ٥$ ∴ $-٥ \leq س \leq ٥$

∴ د متصلة على الفترة [−٥ ، ٥]

㉓ ∵ جاس = ٠ عندما $س = \pi ن$

∴ د متصلة على

ح − {س : س = π ن ، ن ∈ ص}

㉔ ∵ جتاس = ٠ عندما $س = \frac{\pi}{٢} + \pi ن$

∴ د متصلة على

ح − $\{س : س = \frac{\pi}{٢} + \pi ن ، ن \in ص\}$

㉕ كل من الدالتين جا ٣س ، جتا ٥س

متصلة على ح

، ∵ ١ − جتاس = ٠ ∴ جتاس = ١

∴ $س = ٢\pi ن$ ∴ د متصلة على

ح − {س : س = ٢ π ن ، ن ∈ ص}

㉖ ∵ ١ + جاس = ٠ ∴ جاس = −١

∴ س = $\frac{٣\pi}{٢}$ + ٢ π ن

∴ د متصلة على

ح − {س : س = $\frac{٣\pi}{٢}$ + ٢ π ن ، ن ∈ ص}

㉗ كل من الدالتين (جا^{٢} س ، جتاس) متصلة على ح

، س^{٢} − ٩ = ٠ ∴ س = ± ٣

∴ د متصلة على ح − {٣ ، −٣}

㉘ د متصلة على

ح − {س : س = $\frac{\pi}{٢}$ + ن π ، ن ∈ ص}

㉙ ∵ ظاس متصلة على

ح − {$\frac{\pi}{٢}$ + ن π ، ن ∈ ص}

، س^{٢} − ٩ = ٠ ∴ س = ± ٣

∴ الدالة د متصلة على

ح − {٣ ، −٣ ، $\frac{\pi}{٢}$ + ن π} حيث ن ∈ ص

د

① أولاً : ∵ د (س) = س^{٢} + ١ كثيرة الحدود

∴ د متصلة على]− ∞ ، ١[

، د (س) = ٢ س كثيرة حدود

∴ د متصلة على]١ ، ∞[

ثانيًا : ∵ د (١) = ٢

، د (١^{-}) = $\underset{س \to ١^{-}}{\text{نهـا}}$ (س^{٢} + ١) = ٢

، د (١^{+}) = $\underset{س \to ١^{+}}{\text{نهـا}}$ (٢ س) = ٢

∵ د (١) = د (١^{-}) = د (١^{+})

∴ د متصلة عند س = ١ ∴ د متصلة على ح

② أولاً : ∵ د (س) = س^{٢} كثيرة الحدود

∴ د متصلة على]− ∞ ، ٣[

، ∵ د (س) = ٥ س − ٤ كثيرة حدود

∴ د متصلة على]٣ ، ∞[

ثانيًا : ∵ د (٣) = ١١

، د (٣^{-}) = $\underset{س \to ٣^{-}}{\text{نهـا}}$ س^{٢} = ٩

، د (٣^{+}) = $\underset{س \to ٣^{+}}{\text{نهـا}}$ (٥ س − ٤) = ١١

∵ د (٣^{-}) ≠ د (٣^{+})

∴ د غير متصلة عند س = ٣

∴ د متصلة على ح − {٣}

③ أولاً :

∵ د (س) = س^{٢} − ٣ س + ٢ كثيرة الحدود

∴ د متصلة على]−∞ ، ٣[

، د (س) = ٢ كثيرة حدود

∴ د متصلة على]٣ ، ٤[

∵ د (س) = ٦ − س^{٢} كثيرة حدود

∴ د متصلة على]٤ ، ∞[

ثانيًا : د (٣) = ٢

، د (٣^{-}) = $\underset{س \to ٣^{-}}{\text{نهـا}}$ (س^{٢} − ٣ س + ٢) = ٢

، د (٣^{+}) = ٢

∵ د (٣) = د (٣^{-}) = د (٣^{+})

∴ د متصلة عند س = ٣

ثالثًا : د (٤) = ٢ ، د (٤^{-}) = ٢

، د (٤^{+}) = $\underset{س \to ٤^{+}}{\text{نهـا}}$ (٦ − س^{٢}) = −١٠

∵ د (٤^{+}) ≠ د (٤^{-})

∴ د غير متصلة عند س = ٤

∴ د متصلة على ح − {٤}

④ أولاً : د (س) = ١ + جاس

متصلة على]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[

، د (س) = ١ − جتا ٢ س

متصلة على]$\frac{\pi}{٢}$ ، ∞[

ثانيًا : د (٠) = ١

، د (٠^{+}) = $\underset{س \to ٠^{+}}{\text{نهـا}}$ (١ + جاس) = ١

∴ د (٠) = د (٠^{+})

∴ د متصلة من اليمين عند س = ٠

ثالثًا : د ($\frac{\pi}{٢}$) = ٢

، د ($\frac{\pi}{٢}^{-}$) = $\underset{س \to \frac{\pi}{٢}^{-}}{\text{نهـا}}$ (١ + جاس) = ٢

، د ($\frac{\pi}{٢}^{+}$) = $\underset{س \to \frac{\pi}{٢}^{+}}{\text{نهـا}}$ (١ − جتا ٢ س) = ٢

∴ د ($\frac{\pi}{٢}^{-}$) = د ($\frac{\pi}{٢}^{+}$) = د ($\frac{\pi}{٢}$)

∴ د متصلة عند س = $\frac{\pi}{٢}$

∴ د متصلة على [٠ ، ∞[

⑤ أولاً : د (س) = جاس

متصلة على]$\frac{-\pi}{٤}$ ، $\frac{٣\pi}{٤}$[

، د (س) = جتاس

متصلة على]$\frac{٣\pi}{٤}$ ، ٢ π[

ثانيًا : ∴ د ($\frac{-\pi}{٤}$) = $\frac{-\sqrt{٢}}{٢}$

، د ($\frac{-\pi}{٤}^{+}$) = $\underset{س \to (\frac{-\pi}{٤})^{+}}{\text{نهـا}}$ جاس = − $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$

∵ د ($\frac{-\pi}{٤}$) = د ($-\frac{\pi}{٤}^{+}$)

∴ د متصلة من اليمين عند س = − $\frac{\pi}{٤}$

ثالثًا : د ($\frac{٣\pi}{٤}$) = $\frac{-\sqrt{٢}}{٢}$

د ($\frac{٣\pi}{٤}^{+}$) = $\underset{س \to \frac{٣\pi}{٤}^{+}}{\text{نهـا}}$ جتاس = $\frac{-\sqrt{٢}}{٢}$

د ($\frac{٣\pi}{٤}^{-}$) = $\underset{س \to \frac{٣\pi}{٤}^{-}}{\text{نهـا}}$ جاس = $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$

∵ د $(\frac{٣\pi}{٤})^{-}$ ≠ د $(\frac{٣\pi}{٤})^{+}$

∴ د غير متصلة عند س = ($\frac{٣\pi}{٤}$)

رابعًا : د (٢ π) = ١

د (٢ π^{-}) = $\underset{س \to ٢\pi^{-}}{\text{نهـا}}$ جتاس = ١

∴ د (٢ π) = د (٢ π^{-})

∴ د متصلة من اليسار عند س = ٢ π

∴ د متصلة على الفترة [− $\frac{\pi}{٤}$ ، ٢ π] − {$\frac{٣\pi}{٤}$}

⑥ أولاً : د (س) = $\frac{\text{س ظاس + جا}^{٢}\text{ ٢ س}}{\text{٥ س}^{٢}}$

متصلة على]− $\frac{\pi}{٤}$ ، ٠[

، د (س) = ٢ جتا ٢ س متصلة على]٠ ، $\frac{\pi}{٤}$[

ثانيًا : د (٠) = ٢ ، د (٠^{-})

= $\underset{س \to ٠^{-}}{\text{نهـا}}$ $\frac{\text{س ظاس + جا}^{٢}\text{ ٢ س}}{\text{٥ س}^{٢}}$

= $\underset{س \to ٠^{-}}{\text{نهـا}}$ $\frac{\frac{\text{ظاس}}{\text{س}} + (\frac{\text{جا ٢ س}}{\text{س}})^{٢}}{٥}$

= ٢

، د (٠^{+}) = $\underset{س \to ٠^{+}}{\text{نهـا}}$ (٢ جتا ٢ س) = ٢

، ∵ د (٠^{+}) = د (٠^{-}) = د (٠)

∴ د متصلة عند س = ٠

∴ د متصلة على]− $\frac{\pi}{٤}$ ، $\frac{\pi}{٤}$[

⑦ $د(س) = \frac{(س + ٣)^{٤} - ٨١}{س}$

متصلة على]− ∞ ، ٠[،]٠ ، ∞[

، د (٠) = ١٠٨

، $\lim_{س \to ٠} د(س) = \lim_{س \to ٠} \frac{(س + ٣)^{٤} - ٣^{٤}}{س}$

$= ٤ (٣)^{٣} = ١٠٨$

∵ $د(٠) = \lim_{س \to ٠} د(س)$

∴ د متصلة عند س = ٠   ∴ د متصلة على ح

⑧

∵ $د(س) = \begin{cases} ٥ + س^{٢} & ، س \leq ٠ \\ ٥ & ، س > ٠ \end{cases}$

د (س) = ٥ + $س^{٢}$ كثيرة حدود متصلة على]−∞ ، ٠[

، د (س) = ٥ كثيرة حدود متصلة]٠ ، ∞[

، د (٠) = ٥   د (٠^{+}) = ٥   د (٠^{-}) = ٥

∵ د (٠) = د (٠^{-}) = د (٠^{+})

∴ د متصلة عند س = ٠

∴ د متصلة على ح

٦

∵ د متصلة على [− π ، π]

∴ د متصلة عند س = ٠   ∴ د (٠^{-}) = د (٠^{+})

∴ $\lim_{س \to ٠^{-}} \frac{س + جا ٢س}{جا \frac{١}{٢} س} = \lim_{س \to ٠^{+}} (س + ك)$

∴ $\lim_{س \to ٠^{-}} \frac{١ + \frac{جا ٢س}{س}}{\frac{جا \frac{١}{٢} س}{س}} = ك$

∴ $\frac{١ + ٢}{\frac{١}{٢}} = ك$ ∴ ك = ٦

٧

∵ د (س) متصلة على ح

∴ د متصلة عند س = −١

∴ د (-١^{-}) = د (-١^{+})

∴ $\lim_{س \to -١^{-}} (٤ س) = \lim_{س \to -١^{+}} (أ س + ب)$

∴ − ٤ = − أ + ب   (١)

، د متصلة عند س = ٣

∴ د (٣^{-}) = د (٣^{+})

∴ $\lim_{س \to ٣^{-}} (أ س + ب) = \lim_{س \to ٣^{+}} (-٢ س)$

∴ ٣ أ + ب = − ٦   (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ أ = $-\frac{١}{٢}$ ب = $-\frac{٩}{٢}$

٨

∵ د (س) متصلة على ح

∴ د (س) لها نهاية عند س = ٩

، ∵ المقام = صفر عندما س = ٩

∴ $\sqrt{٩ - أ} - ١ = ٠$ ∴ $\sqrt{٩ - أ} = ١$

∴ أ = ٨

، $\lim_{س \to ٩} د(س) = د(٩)$

∴ $\lim_{س \to ٩} \frac{\sqrt{س - ٨} - ١}{\sqrt{س} - ٣} = ٩ - ب$

∴ $\lim_{س \to ٩} \frac{\sqrt{س - ٨} - ١}{\sqrt{س} - ٣} \times \frac{\sqrt{س - ٨} + ١}{\sqrt{س - ٨} + ١} \times \frac{\sqrt{س} + ٣}{\sqrt{س} + ٣}$

= ٩ − ب

∴ $\lim_{س \to ٩} \frac{(س - ٨ - ١)(\sqrt{س} + ٣)}{(س - ٩)(\sqrt{س - ٨} + ١)} = ٩ - ب$

∴ $\frac{٦}{٢} = ٩ - ب$ ∴ ب = ٦

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١

① أولاً :

$د(س) = \begin{cases} س + ١ & ، س < ١ \\ ٣ س - ١ & ، ١ \leq س \leq ٢ \\ ٤ س - س^{٢} & ، س > ٢ \end{cases}$

∵ د (س) = س + ١ كثيرة حدود متصلة]− ∞ ، ١[

د (س) = ٣ س − ١ كثيرة حدود متصلة]١ ، ٢[

د (س) = ٤ س − $س^{٢}$ كثيرة حدود متصلة]٢ ، ∞[

ثانيًا : د (١) = ٢

، د (١^{-}) = $\lim_{س \to ١^{-}} (س + ١) = ٢$

، د (١^{+}) = $\lim_{س \to ١^{+}} (٣ س - ١) = ٢$

∵ د (١^{-}) = د (١^{+}) = د (١)

∴ د متصلة عند س = ١

ثالثًا : د (٢) = ٥

د (٢^{-}) = $\lim_{س \to ٢^{-}} (٣ س - ١) = ٥$

د (٢^{+}) = $\lim_{س \to ٢^{+}} (٤ س - س^{٢}) = ٤$

∵ د $(٢)^{-}$ ≠ د $(٢)^{+}$ ∴ د غير متصلة عند س = ٢

∴ د متصلة على ح − {٢}

②

$د(س) = \begin{cases} س^{٢} + ٢ س & ، س < -٢ \\ \sqrt{٤ - س^{٢}} & ، -٢ \leq س \leq ٢ \\ س^{٢} + ٢ س & ، س > ٢ \end{cases}$

أولاً :

د (س) = $س^{٢}$ + ٢ س كثيرة حدود

متصلة على]− ∞ ، −٢[

، د (س) = $\sqrt{٤ - س^{٢}}$ متصلة على]−٢ ، ٢[

، د (س) = $س^{٢}$ + ٢ س كثيرة حدود متصلة على

]٢ ، ∞[

ثانيًا : د (−٢) = ٠

، د $(-٢)^{+}$ = $\lim_{س \to -٢^{+}} \sqrt{٤ - س^{٢}} = ٠$

، د $(-٢)^{-}$ = $\lim_{س \to -٢^{-}} (س^{٢} + ٢ س) = ٠$

∵ د (−٢) = د (-٢^{-}) = د (-٢^{+})

∴ د متصلة عند س = −٢

ثالثًا : د (٢) = ٠

، د (٢^{-}) = $\lim_{س \to ٢^{-}} \sqrt{٤ - س^{٢}} = ٠$

، د (٢^{+}) = $\lim_{س \to ٢^{+}} (س^{٢} + ٢ س) = ٨$

∵ د (٢^{-}) ≠ د (٢^{+})   ∴ د غير متصلة عند س = ٢

∴ د متصلة على ح − {٢}

٢

∵ الدالة متصلة على ح

∴ المعادلة ($س^{٢}$ + أ س + ٩ = ٠) ليس لها حل في ح

∴ $ب^{٢}$ − ٤ أ حـ < ٠   ∴ $أ^{٢}$ − ٤ × ١ × ٩ < ٠

∴ $أ^{٢}$ < ٣٦   ∴ |أ| < ٦

∴ − ٦ < أ < ٦

∴ أ ∈]−٦ ، ٦[

٣

∵ الدالة متصلة على ح

∴ المعادلة ($س^{٢}$ + ٦ س + أ = ٠) ليس لها حل في ح

∴ $ب^{٢}$ − ٤ أ حـ < ٠

∴ ٣٦ − ٤ × ١ × أ < ٠

∴ −٤ أ < −٣٦

∴ أ > ٩   ∴ أ ∈]٩ ، ∞[

٤

∵ د (س) = { −س ، س < ٠ ؛ ١ ، س ≥ ٠ }

∴ د (٠) = ١ ، د (٠⁺) = نهـا (س ← ٠⁺) (١) = ١

، د (٠⁻) = نهـا (س ← ٠⁻) (−س) = صفر

، ∵ د (٠⁺) ≠ د (٠⁻)

∴ الدالة د غير متصلة عند س = ٠

، ∵ ر (س) = { ١ ، س < ٠ ؛ س ، س ≥ ٠ }

∴ د (٠) = صفر

، د (٠⁺) = نهـا (س ← ٠⁺) (س) = صفر

، د (٠⁻) = نهـا (س ← ٠⁻) (١) = ١ ∴ د (٠⁺) ≠ د (٠⁻)

∴ الدالة ر غير متصلة عند س = ٠

، ∵ (د . ر) (س) = { −س ، س < ٠ ؛ س ، س ≥ ٠ }

∴ (د . ر) (٠) = صفر

، (د . ر) (٠⁺) = نهـا (س ← ٠⁺) (س) = صفر

(د . ر) (٠⁻) = نهـا (س ← ٠⁻) (−س) = صفر

∴ (د . ر) (٠⁺) = (د . ر) (٠⁻) = (د . ر) (٠)

∴ الدالة (د . ر) متصلة عند س = ٠

٥

① د (٤) = ١ ، نهـا (س ← ٤) د (س) = −١

، ∵ د (٤) ≠ نهـا (س ← ٤) د (س)

∴ د غير متصلة عند س = ٤

② ر (٤) = −٦ ، نهـا (س ← ٤) ر (س)

= نهـا (س ← ٤) (٤ س − ١٠) = ٦

، ∵ ر (٤) ≠ نهـا (س ← ٤) ر (س)

∴ ر غير متصلة عند س = ٤

③ بوضع ق (س) = د (س) . ر (س)

= { −٤ س + ١٠ ، س ≠ ٤ ؛ −٦ ، س = ٤ }

، ∵ ق (٤) = −٦

، نهـا (س ← ٤) ق (س) = نهـا (س ← ٤) (−٤ س + ١٠)

= −٦

، ∵ ق (٤) = نهـا (س ← ٤) ق (س)

∴ ق متصلة عند س = ٤

④ بوضع ه (س) = | د (س) | = { ١ ، س ≠ ٤ ؛ ١ ، س = ٤ }

، ∵ ه (٤) = نهـا (س ← ٤) ه (س) = ١

∴ ه متصلة عند س = ٤

⑤ بوضع هـ (س) = ر (س) − ٦ د (س)

= { ٤ س − ٤ ، س ≠ ٤ ؛ −١٢ ، س = ٤ }

، ∵ هـ (٤) = −١٢ ، نهـا (س ← ٤) هـ (س) = ١٢

، ∵ هـ (٤) ≠ نهـا (س ← ٤) هـ (س)

∴ هـ غير متصلة عند س = ٤

⑥ بوضع ك (س) = ر (د (س))

= { −١٤ ، س ≠ ٤ ؛ −٦ ، س = ٤ }

، ∵ ك (٤) = −٦ ، نهـا (س ← ٤) ك (س) = −١٤

∴ ك (٤) ≠ نهـا (س ← ٤) ك (س)

∴ ك غير متصلة عند س = ٤

إجابات الوحدة الرابعة

إجابات تمارين 19

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

① (جـ)	② (جـ)	③ (أ)	④ (أ)
⑤ (د)	⑥ (أ)	⑦ (جـ)	⑧ (أ)
⑨ (ب)	⑩ (أ)	⑪ (ب)	⑫ (جـ)
⑬ (أ)	⑭ (ب)	⑮ (ب)	⑯ (ب)
⑰ (جـ)	⑱ (أ)	⑲ (أ)	⑳ (ب)
㉑ (جـ)	㉒ (جـ)	㉓ (ب)	㉔ (جـ)
㉕ (د)	㉖ (أ)	㉗ (ب)	㉘ (د)
㉙ (د)	㉚ (جـ)	㉛ (ب)	㉜ (ب)
㉝ (د)	㉞ (ب)	㉟ (د)	㊱ (أ)
㊲ (د)	㊳ (أ)	㊴ (جـ)	㊵ (ب)
㊶ (جـ)	㊷ (د)	㊸ (ب)	㊹ (ب)
㊺ (د)	㊻ (ب)	㊼ (د)	

ثانيًا الأسئلة المقالية

١

∵ ق (∠ ع) = ١٨٠° − (٨٠° + ٦٠°) = ٤٠°

∴ سَ / جا ٨٠° = صَ / جا ٦٠° = ١٠ / جا ٤٠°

∴ سَ = (١٠ جا ٨٠°) / جا ٤٠° ≃ ١٥ سم

، صَ = (١٠ جا ٦٠°) / جا ٤٠° ≃ ١٢ سم

٢

∵ ق (∠ حـ) = ١٨٠° − (١١٢° + ٣٣°) = ٣٥°

∴ بَ / جا ٣٣° = ١٩ / جا ٣٥°

∴ بَ = (١٩ جا ٣٣°) / جا ٣٥° ≃ ١٨,٠٤ سم ، ٢ نق = ١٩ / جا ٣٥°

∴ نق = ١٩ / (٢ جا ٣٥°) ≃ ١٦,٥٦ سم

٣

① ∵ ق (∠ ل) = ١٨٠° − (١٠٠° + ٤٠°) = ٤٠°

∴ لَ / جا ٤٠° = ٦٨,٤ / جا ١٠٠°

∴ لَ = (٦٨,٤ جا ٤٠°) / جا ١٠٠° = ٤٤,٦٤ سم

② ٢ نق = ٦٨,٤ / جا ١٠٠° ∴ نق = ٣٤,٧٣ سم

③ مساحة Δ ل م ه = ½ لَ مَ جا ه

= ½ × ٤٤,٦٤ × ٦٨,٤ جا ٤٠°

= ٩٨١ سم²

٤

∵ ق (∠ م) = ١٨٠° − (٢٣َ ١٨° + ١٧َ ٤٤°) = ٥١َ ١١٦°

∴ م ه / جا ٢٣َ ١٨° = ل م / جا ١٧َ ٤٤° = ٣٥ / جا ٥١َ ١١٦°

∴ م ه = (٣٥ جا ٢٣َ ١٨°) / جا ٥١َ ١١٦° = ١٢,٧ سم

، ل م = (٣٥ جا ١٧َ ٤٤°) / جا ٥١َ ١١٦° = ٢٧,٤ سم

، نق = ٣٥ / (٢ جا ٥١َ ١١٦°)

∴ مساحة الدائرة = π (٣٥ / (٢ جا ٥١َ ١١٦°))²

≃ ١٢٠٨,٧ سم²

٥

∵ ق (∠ حـ) = ١٨٠° − (٤٠° + ٨٠°) = ٦٠°

∴ ∠ حـ أكبر الزوايا قياسًا.

∴ حَ طول أكبر الأضلاع. ∴ حَ / جا ٨٠° = ١٠ / جا ٦٠°

∴ حَ = (١٠ جا ٨٠°) / جا ٦٠° ≃ ١١ سم

٦

∵ ق(∠حـ) = ١٨٠° − (١٠٠° + ١٥°) = ٦٥°

∴ ∠ب أصغر الزوايا قياسًا.

∴ ب طول أصغر الأضلاع.

∴ ب / جا ١٥° = ٤٫٥ / جا ٦٥°

∴ ب = ٤٫٥ جا ١٥° / جا ٦٥° ≃ ١٫٣ سم

٧

∵ نق = ٧√٣ / (٢ جا ٦٠°) = ٧ سم

∴ مساحة الدائرة = ٢٢/٧ × ٧^2 = ١٥٤ سم^2

، محيط الدائرة = ٢ × ٢٢/٧ × ٧ = ٤٤ سم

٨

∵ ق(∠حـ) = ١٨٠° − (٦٠° + ٤٥°) = ٧٥°

∴ أ / جا ٦٠° = ب / جا ٤٥° = حـ / جا ٧٥°

∴ أ / (√٣/٢) = ب / (√٢/٢) = حـ / ((√٦ + √٢)/٤)

∴ أ : ب : حـ

= √٣/٢ : √٢/٢ : (√٦ + √٢)/٤ (بالضرب × ٢ √٢)

= √٦ : ٢ : √٣ + ١

٩

∵ نق = ١٣ / (٢ جا ٨٥٣ً) ≃ ٨٫١ سم ، ١٣ / جا ٨٥٣ً = ١٥ / جا حـ

∴ جا حـ = ١٥ جا ٨٥٣ً / ١٣ (موجبة)

∴ ∠حـ حادة أو منفرجة

∴ ق(∠حـ) ≃ ٩ ٢٣ً ٦٧°، أ ٥١ً ٣٦ً ١١٢°

١٠

∵ ٨ / جا ٣٥° = ٦ / جا ب ∴ جا ب = ٦ جا ٣٥° / ٨

∴ ق(∠ب) ≃ ٤٥ً ٢٨َ ٢٥° والحل الآخر مرفوض.

١١

∵ ق(∠حـ) = ١٨٠° − (١٣َ ٥٧° + ١٨َ ٦٤°) = ٢٩َ ٥٨°

، ∵ حـ / جا حـ = (أ + ب + حـ) / (جا أ + جا ب + جا حـ)

∴ ٨٫٧ / جا ٢٩َ ٥٨° = محيط Δ أ ب حـ / (جا ١٣َ ٥٧° + جا ٢٩َ ٥٨° + جا ١٨َ ٦٤°)

∴ محيط Δ أ ب حـ ≃ ٢٦٫٥ سم

١٢

∵ ق(∠أ) = ١٨٠° − (٤٥° + ٦٠°) = ٧٥°

∴ أ / جا ٧٥° = ب / جا ٤٥° = حـ / جا ٦٠° = ٤٠

∴ أ = ٤٠ جا ٧٥° ≃ ٣٨٫٦ سم

، ب = ٤٠ جا ٤٥° ≃ ٢٨٫٣ سم

، حـ = ٤٠ جا ٦٠° ≃ ٣٤٫٦ سم

∴ مساحة المثلث = ½ × ٣٨٫٦ × ٢٨٫٣ × جا ٦٠°

≃ ٤٧٣ سم^2

، محيط المثلث = ٣٨٫٦ + ٢٨٫٣ + ٣٤٫٦ ≃ ١٠٢ سم

١٣

∵ Δ أ ب حـ متساوي الساقين.

∴ ق(∠ب) = ق(∠حـ) = ٣٠°

، ∵ حـ / جا حـ = ٢ نق ∴ حـ / جا ٣٠° = ٢٤

∴ حـ = ٢٤ جا ٣٠° = ١٢ سم

∴ ب = حـ = ١٢ سم

∴ مساحة المثلث = ½ × ١٢ × ١٢ جا ١٢٠° = ٦٢٫٤ سم^2

١٤

∵ ق(∠حـ) = ١٨٠° − (١٥° + ١٥°) = ١٥٠°

∴ أ / جا ١٥° = ب / جا ١٥° = حـ / جا ١٥٠°

∴ إحدى النسب = (أ + ب + حـ) / (جا ١٥° + جا ١٥° + جا ١٥٠°)

= ٢٥ / (جا ١٥° + جا ١٥° + جا ١٥٠°) ≃ ٢٤٫٥٧

∴ ٢ نق ≃ ٢٤٫٥٧ ∴ نق = ١٢٫٢٨٥ سم

∴ مساحة الدائرة = π × (١٢٫٢٨٥)^2 = ٤٧٤ سم^2

١٥

∵ ق(∠حـ) = ١٨٠° − (٤٤° + ٦٦°) = ٧٠°

∴ أ / جا ٤٤° = ب / جا ٦٦° = حـ / جا ٧٠°

= ٤٠ / (جا ٤٤° + جا ٦٦° + جا ٧٠°)

∴ أ = ١٠٫٩ سم ، ب ≃ ١٤٫٣ سم ، حـ ≃ ١٤٫٨ سم

١٦

∵ ق(∠حـ) = ١٨٠° − (٢٠° + ٦٠°) = ١٠٠°

∴ أ / جا ٢٠° = ١٢ / جا ١٠٠° ∴ أ = ١٢ جا ٢٠° / جا ١٠٠° ≃ ٤٫٢ سم

، مساحة المثلث = ½ × ٤٫٢ × ١٢ × جا ٦٠° ≃ ٢٢ سم^2

١٧

∵ ق(∠أ) = ١٨٠° − (٨٢° + ٥٦°) = ٤٢°

، ∵ مساحة Δ أ ب حـ = ½ أ ب جا حـ

∴ ٤٥٠ = ½ أ ب جا ٥٦° ∴ ب = ٩٠٠ / (أ جا ٥٦°)

، ∵ أ / جا ٤٢° = ب / جا ٨٢° ∴ أ / جا ٤٢° = ٩٠٠ / (أ جا ٥٦° جا ٨٢°)

∴ أ^2 = ٩٠٠ جا ٤٢° / (جا ٥٦° جا ٨٢°) ∴ أ ≃ ٢٧ سم

١٨

∵ ٤٣٫٢ = ½ × أ ب × ١٢ × ٠٫٦

∴ أ ب = ١٢ سم

، ∵ ق(∠أ) = ٥٢َ ٣٦°

∴ ق(∠ب) = ق(∠حـ) = (١٨٠° − ٥٢َ ٣٦°) / ٢ = ٣٤َ ٧١°

∴ ب حـ / ٠٫٦ = ١٢ / جا ٣٤َ ٧١°

∴ ب حـ = ١٢ جا ٥٢َ ٣٦° / جا ٣٤َ ٧١° = ٧٫٦ سم

١٩

∵ ٧ / جا ٦٠° = ٨ / جا ب ∴ ق(∠ب) = ١٢َ ٤٧ً ٨١°

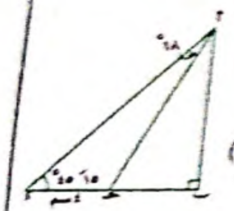
(ويرفض الحل الآخر لأن المثلث حاد الزوايا)

∴ ق(∠حـ) = ١٨٠° − (٦٠° + ١٢َ ٤٧ً ٨١°) = ٤٨ً ١٢َ ٣٨°

∴ ٧ / جا ٦٠° = محيط Δ أ ب حـ / (جا ٦٠° + جا ١٢َ ٤٧ً ٨١° + جا ٤٨ً ١٢َ ٣٨°)

∴ محيط Δ أ ب حـ ≃ ٢٠ سم

٢٠



في المثلث أ حـ ء :

∵ ق(∠أ حـ ء)

= ١٨٠° − (١٨° + ١٥َ ٤٥°)

= ٤٥َ ١١٦°

∴ ء أ / جا ٤٥َ ١١٦° = ٤ / جا ١٨°

∴ أ ء = ٤ جا ٤٥َ ١١٦° / جا ١٨° = ١١٫٦ سم

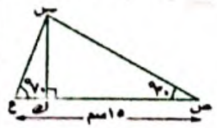
∴ في المثلث أ ب ء : أ ب / جا ١٥َ ٤٥° = ١١٫٦ / جا ٩٠°

∴ أ ب = ١١٫٦ جا ١٥َ ٤٥° / جا ٩٠° ≃ ٨ سم

٢١

في المثلث س ص ع : نرسم $\overline{\text{س ل}} \perp \overline{\text{ص ع}}$

∵ ق(∠س) = ١٨٠° − (٣٠° + ٧٠°) = ٨٠°



∴ $\frac{\text{س ص}}{\text{جا } ٧٠°} = \frac{١٥}{\text{جا } ٨٠°}$

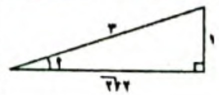
∴ س ص = $\frac{١٥ \text{ جا } ٧٠°}{\text{جا } ٨٠°}$

≃ ١٤,٣١ سم

∴ في المثلث س ص ل : $\frac{\text{س ل}}{\text{جا } ٣٠°} = \frac{١٤,٣}{\text{جا } ٩٠°}$

∴ س ل = $\frac{١٤,٣١ \text{ جا } ٣٠°}{\text{جا } ٩٠°}$ = ٧,١٦ سم

٢٢



∵ ظا أ = $\frac{١}{٢\sqrt{٢}}$

∴ جا أ = $\frac{١}{٣}$ ∴ $\frac{٨}{\frac{١}{٣}} = \frac{٢٠}{\text{جا حـ}}$

∴ جا حـ ≃ ٠,٨٣

∴ ق(∠حـ) ≃ ٥٦ َ ٤٧° أ، ٣٣ َ ١٢٣°

، ∵ ∠حـ منفرجة.   ∴ ق(∠حـ) ≃ ٣٣ َ ١٢٣°

٢٣

∵ ظا حـ = $\frac{٤}{٣}$ ∴ ق(∠حـ) ≃ ٥٣ ً ٧ َ ٤٨°

∴ ق(∠أ) = ١٨٠° − (٣٠° + ٥٣ ً ٧ َ ٤٨°) = ٥٢ ً ٩٦ َ ١٢°

∴ $\frac{\text{أ}}{\text{جا } ٥٢ ً ٩٦ َ ١٢°} = \frac{٥}{\text{جا } ٣٠°} = \frac{\text{حـ}}{\text{جا } ٥٣ ً ٧ َ ٤٨°}$

∴ أ = $\frac{٥ \text{ جا } ٥٢ ً ٩٦ َ ١٢°}{\text{جا } ٣٠°}$ ≃ ١٠ سم

، حـ = $\frac{٥ \text{ جا } ٥٣ ً ٧ َ ٤٨°}{\text{جا } ٣٠°}$ ≃ ٨ سم

، مساحة △ أ ب حـ = $\frac{١}{٢}$ أ حـ جا ب

= $\frac{١}{٢}$ × ١٠ × ٨ × جا ٣٠°

= ٢٠ سم²

٢٤

∵ $\frac{\text{س + ص + ع}}{\text{جا س + جا ص + جا ع}}$ = ٢ نق

∴ نق = $\frac{٥٦,٨٨}{٢ \times ٢,٣٧}$ = ١٢ سم

٢٥

∵ $\frac{\text{أ}}{\text{جا } ٦٠°} = \frac{\text{ب}}{\text{جا } ٤٥°} = \frac{\text{أ + ب}}{\text{جا } ٦٠° + \text{جا } ٤٥°}$

∴ $\frac{\text{أ}}{\text{جا } ٦٠°} = \frac{\text{ب}}{\text{جا } ٤٥°} = \frac{\sqrt{٦} + ٢}{\text{جا } ٦٠° + \text{جا } ٤٥°}$

∴ أ = $\sqrt{٦}$ سم ، ب = ٢ سم

٢٦

∵ جا أ : جا ب : جا حـ = ٢ : ٤ : ٥

∴ أ : ب : حـ = ٢ : ٤ : ٥

∴ أ = ٢ ك ، ب = ٤ ك ، حـ = ٥ ك

، ∵ حـ − ب = ٥ ك − ٤ ك = ك = ٢

∴ أ = ٦ سم ، ب = ١٢ سم

٢٧

∵ ق(∠أ) : ق(∠ب) : ق(∠حـ) = ٣ : ٤ : ٣

∴ ق(∠أ) = ٣ ك ، ق(∠ب) = ٤ ك ، ق(∠حـ) = ٣ ك

∵ ق(∠أ) + ق(∠ب) + ق(∠حـ) = ١٨٠°

∴ ٣ ك + ٤ ك + ٣ ك = ١٨٠°   ∴ ك = ١٨°

∴ $\frac{٥}{\text{جا } ٥٤°} = \frac{\text{ب}}{\text{جا } ٧٢°} = \frac{\text{حـ}}{\text{جا } ٥٤°}$

= $\frac{\text{محيط △ أ ب حـ}}{\text{جا } ٥٤° + \text{جا } ٧٢° + \text{جا } ٥٤°}$

∴ محيط △ أ ب حـ ≃ ١٥,٩ سم

٢٨

∵ ق(∠أ) + ق(∠ب) + ق(∠حـ) = ١٨٠°

∴ ك + ٣ ك + ٥ ك = ١٨٠°   ∴ ك = ٢٠°

∴ $\frac{\text{أ}}{\text{جا } ٢٠°} = \frac{\text{ب}}{\text{جا } ٦٠°} = \frac{\text{حـ}}{\text{جا } ١٠٠°}$

= $\frac{١٦}{\text{جا } ٢٠° + \text{جا } ٦٠° + \text{جا } ١٠٠°}$

∵ ∠أ أصغر الزوايا قياسًا.

∴ أ أصغر الأضلاع طولاً.   ∴ أ = ٢,٥ سم

٢٩

∵ ق(∠أ) + $\frac{٣}{٢}$ ق(∠أ) + ٢ ق(∠أ) = ١٨٠°

∴ ق(∠أ) = ٤٠° ، ق(∠ب) = ٦٠° ، ق(∠حـ) = ٨٠°

، ∵ $\frac{\text{أ}}{\text{جا } ٤٠°} = \frac{\text{ب}}{\text{جا } ٦٠°} = \frac{\text{حـ}}{\text{جا } ٨٠°}$ = ٢٠

∴ أ = ٢٠ جا ٤٠° ، ب = ٢٠ جا ٦٠°

∴ مساحة △ أ ب حـ

= $\frac{١}{٢}$ × ٢٠ جا ٤٠° × ٢٠ جا ٦٠° × جا ٨٠° ≃ ١١٠ سم²

٣٠

بالقسمة على ١٢   ∴ $\frac{\text{جا أ}}{٢} = \frac{\text{جا ب}}{٣} = \frac{\text{جا حـ}}{٤}$

وبوضع أ = ٢ ك ، ب = ٣ ك ، حـ = ٤ ك

∴ ٢ ك + ٣ ك + ٤ ك = ٤٥   ∴ ك = ٥

∴ أ = ١٠ سم ، حـ = ٢٠ سم

٣١

من خواص التناسب نجد أن :

$\frac{\text{أ + ب − حـ + أ + حـ − ب}}{٣ + ٥} = \frac{\text{أ + ب − حـ + ب + حـ − أ}}{٦ + ٧}$

= $\frac{\text{أ + ب − حـ + ب + حـ − أ}}{٣ + ٧}$

∴ $\frac{٢\text{أ}}{٨} = \frac{٢\text{حـ}}{١٢} = \frac{٢\text{ب}}{١٠}$ ∴ $\frac{\text{أ}}{٤} = \frac{\text{حـ}}{٦} = \frac{\text{ب}}{٥}$

∴ أ : ب : حـ = ٤ : ٥ : ٦

∴ جا أ : جا ب : جا حـ = ٤ : ٥ : ٦

٣٢

∵ $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ حـ}}$ قطعتان مماستان

للدائرة عند ب ، حـ

∴ أ ب = أ حـ

، ∵ ق(∠أ) = ٦٠°

∴ △ أ ب حـ مثلث متساوي الأضلاع

، ∵ مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ أ ب × أ حـ × جا(∠أ)

∴ ٩$\sqrt{٣}$ = $\frac{١}{٢}$ × (أ ب)² × جا ٦٠°

∴ ٩$\sqrt{٣}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ × (أ ب)²

∴ أ ب = ٦ سم   ∴ ب حـ = ٦ سم

، ∵ ق(∠د) = ق(∠ب حـ أ) = ٦٠°

(محيطية ومماسية مشتركتان في $\overset{\frown}{\text{ب حـ}}$)

∴ ق(∠ب حـ د) = ١٨٠° − (٨٥° + ٦٠°) = ٣٥°

∴ في △ ب حـ د $\frac{\text{ب د}}{\text{جا } ٣٥°} = \frac{\text{د حـ}}{\text{جا } ٨٥°} = \frac{٦}{\text{جا } ٦٠°}$

∴ ب د = $\frac{٦ \text{ جا } ٣٥°}{\text{جا } ٦٠°}$ = ٤ سم

، د حـ = $\frac{٦ \text{ جا } ٨٥°}{\text{جا } ٦٠°}$ = ٧ سم

∴ محيط المثلث د ب حـ = ٦ + ٤ + ٧ = ١٧ سم

٣٣

في △ أ ب حـ :

ق(∠حـ) = $\frac{١}{٢}$ ق(∠أ م ب) = ٤٠°

، ق(∠أ ب حـ) = ١٨٠° − (٤٠° + ٨٥°) = ٥٥°

∴ $\frac{٥}{\text{جا } ٤٠°} = \frac{\text{ب}}{\text{جا } ٥٥°} = \frac{\text{أ}}{\text{جا } ٨٥°}$ = ٢ نق

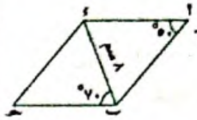
= $\frac{\text{محيط △ أ ب حـ}}{\text{جا } ٤٠° + \text{جا } ٥٥° + \text{جا } ٨٥°}$

∴ محيط △ أ ب حـ ≃ ١٩,١٢ سم ، نق ≃ ٣,٨٩ سم

∴ مساحة الدائرة = π نق² = π (٣,٨٩)²

≃ ٤٧,٥ سم²

٣٤



∵ أ ب حـ ء متوازى أضلاع.

∴ ق(∠ حـ) = ٥٠°

فى Δ ب ء حـ :

ق(∠ ب ء حـ) = ١٨٠° − (٥٠° + ٧٠°) = ٦٠°

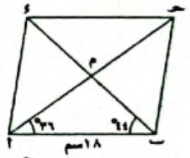
∴ $\frac{\text{٨}}{\text{جا ٥٠°}} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{جا ٦٠°}} = \frac{\text{ء حـ}}{\text{جا ٧٠°}}$

∴ ب حـ ≃ ٩ سم ، ء حـ ≃ ٩,٨ سم

∴ محيط متوازى الأضلاع = ٢ (ب حـ + حـ ء)

≃ ٣٨ سم

٣٥



فى Δ أ ب م : ق(∠ أ م ب)

= ١٨٠° − (٤٤° + ٣٦°)

= ١٠٠°

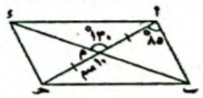
∴ $\frac{\text{١٨}}{\text{جا ١٠٠°}} = \frac{\text{أ م}}{\text{جا ٤٤°}}$ ∴ أ م = $\frac{\text{١٨ × جا ٤٤°}}{\text{جا ١٠٠°}}$

∴ أ حـ = ٢ (أ م) = ٢٥,٣٩ سم

، مساحة ▱ أ ب حـ ء = ٢ × $\frac{١}{٢}$ × ١٨ × ٢٥,٣٩ جا ٣٦°

≃ ٢٦٩ سم^2

٣٦



فى Δ أ ب م :

ق(∠ م) = ٥٠°

، ق(∠ ب) = ١٨٠° − (٨٥° + ٥٠°) = ٤٥°

∴ $\frac{\text{١٠}}{\text{جا ٤٥°}} = \frac{\text{ب م}}{\text{جا ٨٥°}}$

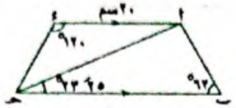
∴ ب م = $\frac{\text{١٠ جا ٨٥°}}{\text{جا ٤٥°}}$ ≃ ١٤,١ سم

∴ ب ء = ٢ ب م = ٢٨,٢ سم

، مساحة متوازى الأضلاع أ ب حـ ء

= ٤ × $\frac{١}{٢}$ × ١٠ × ١٤,١ جا ٥٠° ≃ ٢١٦ سم^2

٣٧



∵ $\overline{\text{أ ء}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$

∴ ق(∠ أ ء حـ)

+ ق(∠ ء حـ ب) = ١٨٠°

∴ ق(∠ ء حـ ب) = ١٨٠° − ١٢٠° = ٦٠°

∴ ق(∠ ء حـ أ) = ٦٠° − ٢٥َ ٢٣° = ٣٥َ ٣٦°

∴ فى المثلث أ ء حـ : $\frac{\text{٢٠}}{\text{جا ٣٥َ ٣٦°}} = \frac{\text{أ حـ}}{\text{جا ١٢٠°}}$

∴ أ حـ = $\frac{\text{٢٠ جا ١٢٠°}}{\text{جا ٣٥َ ٣٦°}}$ ≃ ٢٩ سم

، فى المثلث أ ب حـ :

∵ ق(∠ أ) = ١٨٠° − (٦٢° + ٢٥َ ٢٣°) = ٣٥َ ٩٤°

∴ $\frac{\text{٢٩}}{\text{جا ٦٢°}} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{جا ٣٥َ ٩٤°}}$

∴ ب حـ = $\frac{\text{٢٩ جا ٣٥َ ٩٤°}}{\text{جا ٦٢°}}$ ≃ ٣٣ سم

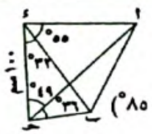
∴ مساحة شبه المنحرف = $\frac{١}{٢}$ أ حـ × ب حـ × جا ٢٥َ ٢٣°

+ $\frac{١}{٢}$ أ حـ × أ ء × جا ٢٥َ ٢٣°

= $\frac{١}{٢}$ × ٢٩ (٣٣ + ٢٠) جا ٢٥َ ٢٣°

≃ ٣٠٥ سم^2

٣٨



فى Δ ب ء حـ

ق(∠ ء ب حـ) = ١٨٠° − (٣٢° + ٨٥°)

= ٦٣°

∴ $\frac{\text{ب ء}}{\text{جا ٨٥°}} = \frac{\text{١٠٠}}{\text{جا ٦٣°}}$

∴ ب ء = $\frac{\text{١٠٠ جا ٨٥°}}{\text{جا ٦٣°}}$ ≃ ١١٢ سم

، فى Δ أ ء حـ :

ق(∠ ء أ حـ) = ١٨٠° − (٤٩° + ٨٧°) = ٤٤°

∴ $\frac{\text{أ حـ}}{\text{جا ٨٧°}} = \frac{\text{١٠٠}}{\text{جا ٤٤°}}$

∴ أ حـ = $\frac{\text{١٠٠ جا ٨٧°}}{\text{جا ٤٤°}}$ ≃ ١٤٤ سم

٣٩

فى المثلث أ ب ء :

∵ أ ب = أ ء

∴ ق(∠ أ ب ء)

= ق(∠ أ ء ب) = $\frac{\text{١٨٠° − ٨٠°}}{\text{٢}}$ = ٥٠°

∴ $\frac{\text{١٠}}{\text{جا ٥٠°}} = \frac{\text{ب ء}}{\text{جا ٨٠°}}$

∴ ب ء = $\frac{\text{١٠ جا ٨٠°}}{\text{جا ٥٠°}}$ ≃ ١٢,٨٦ سم

، ∵ ق(∠ أ ب حـ) = ٩٠°

∴ ق(∠ ء ب حـ) = ٩٠° − ٥٠° = ٤٠°

∴ مساحة Δ أ ب ء = $\frac{١}{٢}$ × ١٠ × ١٠ × جا ٨٠° = ٤٩ سم^2

، مساحة Δ ء ب حـ = $\frac{١}{٢}$ × ١٢,٨٦ × ١٢,٨٦ × جا ٤٠°

≃ ٥٣ سم^2

∴ مساحة الشكل أ ب حـ ء = ٤٩ + ٥٣ = ١٠٢ سم^2

٤٠

① ∵ $\frac{\text{أ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ب}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{حـ}}{\text{جا حـ}}$

بضرب النسبة الأولى × ٣ والثانية × ٤ وبالطرح :

∴ $\frac{\text{٣ أ − ٤ ب}}{\text{٣ جا أ − ٤ جا ب}} = \frac{\text{حـ}}{\text{جا حـ}}$

② ∵ $\frac{\text{أ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ب}}{\text{جا ب}}$ ∴ ب = $\frac{\text{أ جا ب}}{\text{جا أ}}$

∴ مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ أ ب جا حـ = $\frac{\text{أ}^{٢}\text{ جا ب جا حـ}}{\text{٢ جا أ}}$

③ ∵ $\frac{\text{أ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ب}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{حـ}}{\text{جا حـ}}$ = ٢ نق

∴ جا حـ = $\frac{\text{حـ}}{\text{٢ نق}}$

∴ مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ أ ب × $\frac{\text{حـ}}{\text{٢ نق}}$ = $\frac{\text{أ ب حـ}}{\text{٤ نق}}$

مسائل تقيس مهارات التفكير

١

① (ء)	② (حـ)	③ (حـ)	④ (ب)
⑤ (ء)	⑥ (حـ)	⑦ (ء)	⑧ (ب)
⑨ (حـ)	⑩ (ب)	⑪ (حـ)	

إرشادات لحل رقم **٩**

① ∵ $\frac{\text{أ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ب}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{حـ}}{\text{جا حـ}}$ = ٢ نق = ٦

∴ $\frac{\text{أ}}{\text{جا أ}} \times \frac{\text{ب}}{\text{جا ب}} \times \frac{\text{حـ}}{\text{جا حـ}}$ = ٦ × ٦ × ٦

∴ $\frac{\text{أ ب حـ}}{\text{جا أ جا ب جا حـ}}$ = ٢١٦

② ∵ $\frac{\text{أ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ب}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{حـ}}{\text{جا حـ}}$ = ٢ نق

∴ أ قتا أ = ب قتا ب = حـ قتا حـ = ٢ نق

∴ أ قتا أ + ب قتا ب + حـ قتا حـ = ٦ نق

③ ∵ $\frac{\text{أ + ب + حـ}}{\text{جا أ + جا ب + جا حـ}}$ = ٢ نق

∴ $\frac{\text{جا ب + جا حـ + جا أ}}{\text{جا أ + جا ب + جا حـ}}$ = ٢ نق

∴ ٢ نق = ١ ∴ نق = $\frac{١}{٢}$

∴ محيط الدائرة المارة برؤوس Δ أ ب حـ

= ٢ π نق = ٢ π × $\frac{١}{٢}$ = π

④ ∵ $\frac{\text{أ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ب}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{حـ}}{\text{جا حـ}}$ = ٢ نق

∴ $\frac{\text{جا أ}}{\text{أ}} = \frac{\text{جا ب}}{\text{ب}} = \frac{\text{جا حـ}}{\text{حـ}} = \frac{\text{١}}{\text{٢ نق}}$

وبضرب مقدمات وتوالى النسبة الأولى × أ

، النسبة الثانية × ب ، النسبة الثالثة × حـ

وجمع المقدمات والتوالى

∴ $\frac{\text{أ جا أ + ب جا ب + حـ جا حـ}}{\text{أ}^{٢}\text{ + ب}^{٢}\text{ + حـ}^{٢}} = \frac{\text{١}}{\text{٢ نق}}$

⑤ $\because \frac{\text{أ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ب}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{حـ}}{\text{جا حـ}} = 10$

$\therefore$ أ $= 10$ جا أ ، ب $= 10$ جا ب

، $\because$ مساحة Δ أ ب حـ $= 24$

$\therefore \frac{1}{2}$ أ ب جا حـ $= 24$

$\therefore \frac{1}{2} \times 10$ جا أ $\times 10$ جا ب $\times$ جا حـ $= 24$

$\therefore$ جا أ جا ب جا حـ $= \frac{24}{50} = \frac{12}{25}$

$\therefore$ جا أ جا ب جا $\left(180 - (\text{أ} + \text{ب})\right) = \frac{12}{25}$

$\therefore$ جا أ جا ب جا $(\text{أ} + \text{ب}) = \frac{12}{25}$

⑥ $\because$ ب حـ $= \sqrt{(6)^2 + (8)^2} = 10$ سم

$\therefore$ ب ء $= 4$ سم

فى Δ أ ب ء : $\frac{\text{ب ء}}{\text{جا } \theta} = \frac{\text{أ ء}}{\text{جا ب}}$

$\therefore \frac{4}{\text{جا } \theta} = \frac{\text{أ ء}}{0.6}$ $\therefore$ أ ء جا $\theta = 2.4$ (1)

فى Δ أ حـ ء : $\frac{\text{ء حـ}}{\text{جا}(90 - \theta)} = \frac{\text{أ ء}}{\text{جا حـ}}$

$\therefore \frac{6}{\text{جتا } \theta} = \frac{\text{أ ء}}{0.8}$ $\therefore$ أ ء جتا $\theta = 4.8$ (2)

بقسمة (2) على (1) : $\therefore \frac{\text{جتا } \theta}{\text{جا } \theta} = \frac{4.8}{2.4}$

$\therefore$ ظتا $\theta = 2$

⑦ $\because$ حـ ء $= 2$ ء ب

$\therefore$ مساحة Δ أ حـ ء $= 2$ مساحة Δ أ ب ء

$\frac{1}{2} \times$ أ ء $\times$ أ حـ $\times$ جا $60°$

$= 2 \times \frac{1}{2} \times$ أ ب $\times$ أ ء جا $45°$

$\therefore \frac{\text{أ ب}}{\text{أ حـ}} = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\left(2 \times \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \frac{\sqrt{6}}{4}$

، $\because \frac{\text{أ ب}}{\text{أ حـ}} = \frac{\text{جا حـ}}{\text{جا ب}}$ $\therefore \frac{\text{جا ب}}{\text{جا حـ}} = \frac{4}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$

⑧ فى Δ أ ب ء : $\because \frac{\text{ب ء}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{أ ء}}{\text{جا } 45°}$

$\therefore \frac{\text{ب ء}}{\text{جا أ}} = \frac{4\sqrt{2}}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = 8$

فى Δ ب ء حـ : $\because \frac{\text{ب ء}}{\text{جا حـ}} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{جا } 30°}$

$\therefore \frac{\text{ب ء}}{\text{جا حـ}} = 2$ ب حـ ، $\because$ جا أ $=$ جا حـ

$\therefore 2$ ب حـ $= 8$ $\therefore$ ب حـ $= 4$ سم

⑨ فى Δ حـ ء هـ : $\because$ ظا (د ء هـ حـ) $= \frac{3}{4}$

$\therefore$ جا حـ $= \frac{4}{5}$

، فى Δ أ ب حـ : $\because \frac{\text{أ ب}}{\text{جا حـ}} = 2$ نق

$\therefore 2$ نق $= \frac{6}{\left(\frac{4}{5}\right)}$ $\therefore$ نق $= 3.75$ سم

⑩ فى Δ أ ب ء :

$\frac{\text{ب ء}}{\text{جا } 60°} = \frac{8}{\text{جا (د أ ء ب)}}$

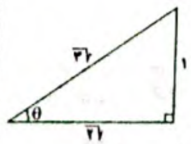
$\therefore$ ب ء $\times$ جا (د أ ء ب)

$= 8$ جا $60° = 4\sqrt{3}$ (1)

فى Δ أ ء حـ : $\frac{\text{حـ ء}}{\text{جا } \theta} = \frac{12}{\text{جا (د أ ء حـ)}}$

$\therefore$ حـ ء $\times$ جا (د أ ء حـ) $= 12$ جا θ (2)

من (1) ، (2) :



، $\because$ ب ء $=$ حـ ء

، جا (د أ ء ب)

$=$ جا (د أ ء حـ)

$\therefore 12$ جا $\theta = 4\sqrt{3}$ $\therefore$ جا $\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore$ ظا $\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\therefore$ ظا (د ء أ حـ) $= \frac{1}{\sqrt{2}}$

⑪ فى Δ أ ب حـ :

$\because \frac{\text{أ ب}}{\text{جا } 70°} = \frac{6}{\text{جا } 40°} = 2$ نق

$\therefore$ أ ب $\simeq 8.77$ سم ، نق $\simeq 4.667$ سم

$\therefore$ مساحة الجزء المظلل

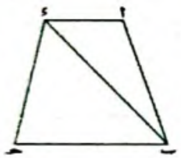
$=$ مساحة الدائرة $-$ مساحة المثلث أ ب حـ

$= \pi$ نق$^2 - \frac{1}{2}$ أ حـ جا ب

$= \pi \times (4.67)^2 - \frac{1}{2} \times 6 \times 8.77 \times$ جا $70°$

$\simeq 43.7$ سم^2

٢



فى المثلث أ ب ء :

$\frac{\text{أ ء}}{\text{جا (د أ ب ء)}} = \frac{\text{ب ء}}{\text{جا أ}}$

، من Δ ء ب حـ :

$\frac{\text{ب حـ}}{\text{جا (د ب ء حـ)}} = \frac{\text{ب ء}}{\text{جا حـ}}$

، $\because$ د أ ، د حـ متكاملتان «لأن أ ب حـ ء رباعى دائرى»

$\therefore$ جا أ $=$ جا حـ $\therefore \frac{\text{أ ء}}{\text{جا (د أ ب ء)}} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{جا (د ب ء حـ)}}$

$\therefore$ أ ء $\times$ جا (د ب ء حـ) $=$ ب حـ $\times$ جا (د أ ب ء)

٣

① $\because \frac{\text{أ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ب}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{حـ}}{\text{جا حـ}}$

$\therefore \frac{\text{أ} + \text{ب} + \text{حـ}}{\text{جا أ} + \text{جا ب} + \text{جا حـ}} = \frac{\text{أ}}{\text{جا أ}}$

$\therefore$ جا أ $+$ جا ب $+$ جا حـ $= \frac{2\text{ع جا أ}}{\text{أ}} = \frac{2\text{ع جا أ} \times \text{ب حـ}}{\text{أ ب حـ}}$

، $\because \Delta = \frac{1}{2}$ ب حـ جا أ

$\therefore$ ب حـ جا أ $= 2\Delta$

$\therefore$ جا أ $+$ جا ب $+$ جا حـ $= \frac{2\text{ع} \times 2\Delta}{\text{أ ب حـ}} = \frac{4\text{ع}\Delta}{\text{أ ب حـ}}$

② $\because \frac{1}{\text{حـ جا أ}} = \frac{\frac{1}{2}\text{ب}}{\frac{1}{2}\text{ب حـ جا أ}}$

، $\frac{1}{\text{أ جا ب}} = \frac{\frac{1}{2}\text{حـ}}{\frac{1}{2}\text{أ حـ جا ب}}$

، $\frac{1}{\text{ب جا حـ}} = \frac{\frac{1}{2}\text{أ}}{\frac{1}{2}\text{ب أ جا حـ}}$

وبالجمع $\therefore \frac{1}{\text{حـ جا أ}} + \frac{1}{\text{أ جا ب}} + \frac{1}{\text{ب جا حـ}}$

$= \frac{\frac{1}{2}\text{ب}}{\frac{1}{2}\text{ب حـ جا أ}} + \frac{\frac{1}{2}\text{حـ}}{\frac{1}{2}\text{أ حـ جا ب}} + \frac{\frac{1}{2}\text{أ}}{\frac{1}{2}\text{ب أ جا حـ}}$

$= \frac{\frac{1}{2}(\text{ب} + \text{حـ} + \text{أ})}{\Delta} = \frac{\text{ع}}{\Delta}$

٤

$\because$ مساحة الدائرة $= \pi$ نق^2 ، نق $= \frac{\text{أ}}{2\text{ جا أ}} = \frac{\text{ب}}{2\text{ جا ب}}$

وبالتعويض

$\therefore$ مساحة الدائرة $= \frac{\pi \text{ أ ب}}{4 \text{ جا أ جا ب}}$

إجابات تمارين 20

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

① (جـ)	② (أ)	③ (ب)	④ (ب)
⑤ (د)	⑥ (أ)	⑦ (د)	⑧ (جـ)
⑨ (أ)	⑩ (ب)	⑪ (ب)	⑫ (د)
⑬ (د)	⑭ (د)	⑮ (ب)	⑯ (أ)
⑰ (ب)	⑱ (جـ)	⑲ (د)	⑳ (ب)
㉑ (جـ)	㉒ (ب)	㉓ (جـ)	㉔ (د)
㉕ (ب)	㉖ (د)	㉗ (جـ)	㉘ (ب)
㉙ (ب)	㉚ (ب)	㉛ (ب)	㉜ (ب)
㉝ (جـ)	㉞ (ب)	㉟ (أ)	

ثانيا الأسئلة المقالية

١

∵ عَ² = (١٣)² + (١٦)² − ٢ × ١٣ × ١٦ جتا ٩٥° ≃ ٤٦١,٢٦

∴ عَ ≃ ٢١,٥ سم

٢

∵ بَ² = (٣)² + (٥)² − ٢ × ٣ × ٥ جتا ٤١° ٣٦َ ≃ ٩,٨

∴ بَ ≃ ٣ سم

٣

∵ جتا أ = $\frac{(٥,٨)^٢ + (٣,٤)^٢ - (٧,٦)^٢}{٢\ (٥,٨)\ (٣,٤)}$

∴ ق(∠أ) ≃ ١٠٨° ٣٤َ

، جتا ب = $\frac{(٧,٦)^٢ + (٣,٤)^٢ - (٥,٨)^٢}{٢\ (٧,٦)\ (٣,٤)}$

∴ ق(∠ب) ≃ ٤٦° ٢٠َ

∴ ق(∠حـ) = ١٨٠° − (١٠٨° ٣٤َ + ٤٦° ٢٠َ) = ٢٥° ٦َ

٤

∵ جتا ب = $\frac{(١٣)^٢ + (١٥)^٢ - (١٤)^٢}{٢\ (١٣)\ (١٥)}$

∴ ق(∠ب) ≃ ٥٩° ٢٩َ

∴ مساحة △ أ ب حـ = $\frac{١}{٢}$ × ١٣ × ١٥ × جا ٥٩° ٢٩َ

≃ ٨٤ سم²

٥

∵ أصغر زاوية تقابل أصغر ضلع

∴ جتا س = $\frac{(٢٧)^٢ + (٢٤)^٢ - (١٨)^٢}{٢ \times ٢٧ \times ٢٤}$

∴ ق(∠س) ≃ ٤٠° ٤٨َ

، ∵ نق = $\frac{١٨}{٢\ جا\ ٤٠° ٤٨َ}$

∴ مساحة الدائرة = π $\left(\frac{١٨}{٢\ جا\ ٤٠° ٤٨َ}\right)^٢$ ≃ ٥٩٦ سم²

٦

① حَ² = (٧)² + (٩)² − ٢ (٧) (٩) جتا ٩٦° ٢٣َ ≃ ١٤٤

∴ حَ ≃ ١٢ سم

② مساحة △ أ ب حـ

= $\frac{١}{٢}$ × ٧ × ٩ × جا ٩٦° ٢٣َ ≃ ٣١ سم²

③ نق = $\frac{حَ}{٢\ جا\ حـ}$ = $\frac{١٢}{٢\ جا\ (٩٦° ٢٣َ)}$ ≃ ٦ سم

٧

حَ = ٥٢ − (١٣ + ١٧) = ٢٢ سم

∵ أكبر زاوية تقابل أكبر ضلع

∴ جتا حـ = $\frac{(١٣)^٢ + (١٧)^٢ - (٢٢)^٢}{٢\ (١٣)\ (١٧)}$

∴ ق(∠حـ) ≃ ٩٣° ٢٢َ

، مساحة △ أ ب حـ = $\frac{١}{٢}$ × ١٣ × ١٧ × جا ٩٣° ٢٢َ

≃ ١١٠ سم²

٨

∵ أكبر زاوية تقابل أكبر ضلع.

∴ جتا س = $\frac{(١٨)^٢ + (١٠)^٢ - (٢٤,٥)^٢}{٢ \times ١٨ \times ١٠}$

∴ ق(∠س) ≃ ١١٩° ١٩َ

، ∵ نق = $\frac{٢٤,٥}{٢\ جا\ ١١٩° ١٩َ}$ ≃ ١٤ سم

∴ محيط الدائرة المارة برؤوس المثلث س ص ع

= ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ١٤ = ٨٨ سم

٩

بفرض أن سَ = ٤ ك ، صَ = ٥ ك ، عَ = ٦ ك

، ∵ أصغر زاوية تقابل أصغر ضلع.

∴ جتا س = $\frac{٢٥ ك^٢ + ٣٦ ك^٢ - ١٦ ك^٢}{٢ \times ٥ ك \times ٦ ك}$ = $\frac{٣}{٤}$

∴ ق(∠س) ≃ ٤١° ٢٥َ

١٠

∵ سَ : صَ : عَ = جا س : جا ص : جا ع = ٧ : ٨ : ١٢

وبفرض أن : سَ = ٧ ك ، صَ = ٨ ك ، عَ = ١٢ ك

، ∵ أكبر زاوية تقابل أكبر ضلع.

∴ جتا ع = $\frac{(٧ ك)^٢ + (٨ ك)^٢ - (١٢ ك)^٢}{٢ \times ٧ ك \times ٨ ك}$ = $\frac{-٣١}{١١٢}$

∴ ق(∠ع) ≃ ١٠٦° ٤َ

١١

∵ حَ² = (٤)² + (٥)² − ٢ × ٤ × ٥ × $\frac{-١}{٢}$ = ٦١

∴ حَ ≃ ٧,٨ سم

، ∵ جتا حـ = −$\frac{١}{٢}$ ∴ ق(∠حـ) = ١٢٠°

∴ مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × ٤ × ٥ × جا ١٢٠° = ٥ $\sqrt{٣}$ سم²

١٢

∵ طا ب = $\frac{٣}{٤}$ ∴ جا ب = $\frac{٣}{٥}$ ، جتا ب = $\frac{٤}{٥}$

∴ مساحة △ أ ب حـ = $\frac{١}{٢}$ × ١٦ × ١٨ × $\frac{٣}{٥}$

= ٨٦,٤ سم²

، بَ² = (١٦)² + (١٨)² − ٢ × ١٦ × ١٨ × $\frac{٤}{٥}$ = ١١٩,٢

∴ بَ ≃ ١١ سم

∴ محيط △ أ ب حـ = ١٦ + ١٨ + ١١ = ٤٥ سم

١٣

بالقسمة على ١٢ ∴ $\frac{جا\ أ}{٦}$ = $\frac{جا\ ب}{٤}$ = $\frac{جا\ حـ}{٣}$

∴ أ : بَ : حَ = ٦ : ٤ : ٣

، بفرض أن : أ = ٦ ك ، بَ = ٤ ك ، حَ = ٣ ك

، ∵ أصغر زاوية تقابل أصغر ضلع

∴ جتا حـ = $\frac{(٦ ك)^٢ + (٤ ك)^٢ - (٣ ك)^٢}{٢ \times ٦ ك \times ٤ ك}$ = $\frac{٤٣}{٤٨}$

∴ ق(∠حـ) ≃ ٢٦° ٢٣َ

١٤

∵ أ : بَ : حَ = ٣ : ٤ : ٥

، وبفرض أن : أ = ٣ ك ، بَ = ٤ ك ، حَ = ٥ ك

∴ جتا حـ = $\frac{(٣ ك)^٢ + (٤ ك)^٢ - (٥ ك)^٢}{٢ \times ٣ ك \times ٤ ك}$ = ٠

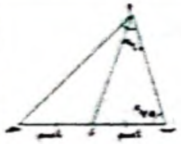
∴ ق(∠حـ) = ٩٠°

∵ ٣ ك + ٤ ك + ٥ ك = ٢٤ ∴ ك = ٢

∴ أ = ٦ سم ، بَ = ٨ سم ، حَ = ١٠ سم

، مساحة △ أ ب حـ = $\frac{١}{٢}$ × ٦ × ٨ = ٢٤ سم²

١٥



في المثلث أ ب حـ :

∵ $\frac{٨}{جا\ ٦٠°}$ = $\frac{أ حـ}{جا\ ٧٥°}$

∴ أ حـ = $\frac{٨\ جا\ ٧٥°}{جا\ ٦٠°}$ ≃ ٨,٩٢ سم

، ∵ ق(∠حـ) = ١٨٠° − (٦٠° + ٧٥°) = ٤٥°

∴ (أ ء)² = (٨,٩٢)² + (٤)² − ٢ × ٨,٩٢ × ٤ جتا ٤٥°

≃ ٤٥

∴ أ ء ≃ ٦,٧ سم

١٦

في المثلث أ ب حـ :

∵ جتا ب = $\frac{(٨)^٢ + (٩)^٢ - (٧)^٢}{٢ \times ٨ \times ٩}$

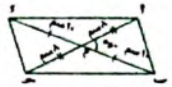
= $\frac{٢}{٣}$

∴ ق(∠ب) ≃ ٤٨° ١١َ

∴ في المثلث أ ب ء :

(أ ء)² = (٩)² + (٤)² − ٢ × ٩ × ٤ جتا ٤٨° ١١َ ≃ ٤٩

∴ أ ء ≃ ٧ سم ، نق = $\frac{٧}{٢\ جا\ ٤٨° ١١َ}$ ≃ ٤,٧ سم



١٧

∵ $(أب)^٢$

$= (٨)^٢ + (١٠)^٢ - ٢ × ٨ × ١٠$ جتا $٥٠°$

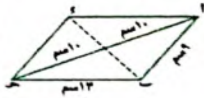
∴ أب ≃ ٨ سم

فى المثلث أ م ء :

∵ ق(د أ م ء) = $١٨٠° - ٥٠° = ١٣٠°$

∴ $(أء)^٢ = (٨)^٢ + (١٠)^٢ - ٢ × ٨ × ١٠$ جتا $١٣٠°$

∴ أء ≃ ١٦ سم



١٨

فى Δ أ ب حـ :

∵ جتا ب

$= \frac{(٩)^٢ + (١٣)^٢ - (٢٠)^٢}{٢ (٩) (١٣)}$

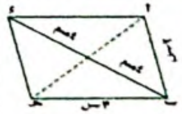
∴ ق(د ب) ≃ $١٢٩° ٥٢َ$

∴ ق(د ب أ ء) = $١٨٠° - ١٢٩° ٥٢َ ≃ ٥٠° ٨َ$

فى Δ أ ب ء :

$(ب ء)^٢ = (٩)^٢ + (١٣)^٢ - ٢ (٩) (١٣) ×$ جتا $٥٠° ٨َ$

∴ ب ء ≃ ١٠ سم



١٩

نفرض أن أ ب = ٢ س

، ب حـ = ٣ س

، نصف محيط متوازى الأضلاع = ١٠ سم

∴ ٢ س + ٣ س = ١٠ ∴ س = ٢ سم

∴ أ ب = ٤ سم ، ب حـ = ٦ سم

فى Δ أ ب ء : ∵ جتا أ = $\frac{(٤)^٢ + (٦)^٢ - (٨)^٢}{٢ (٤) (٦)}$

∴ ق(د أ) ≃ $١٠٤° ٢٩َ$

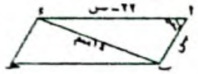
∴ ق(د أ ب حـ) = $١٨٠° - ١٠٤° ٢٩َ = ٧٥° ٣١َ$

∴ $(أ حـ)^٢ = (٤)^٢ + (٦)^٢ - ٢ (٤) (٦)$ جتا $٧٥° ٣١َ$

∴ أ حـ ≃ ٦,٣ سم

٢٠

نصف محيط متوازى الأضلاع = ٢٢ سم



بفرض أن : أ ب = س

∴ أء = ٢٢ – س

∴ فى Δ أ ب ء :

∴ $(ب ء)^٢ = (س)^٢ + (٢٢ - س)^٢$

– ٢ س (٢٢ – س) جتا ٦٠°

∴ $١٩٦ = ٢ س^٢ - ٦٦ س + ٤٨٤$

∴ $٣ س^٢ - ٦٦ س + ٢٨٨ = ٠$

∴ $س^٢ - ٢٢ س + ٩٦ = ٠$

∴ (س – ٦) (س – ١٦) = ٠ ∴ س = ٦

∴ أ ب = ٦ سم ، أء = ١٦ سم

∴ $\frac{٦}{جا (د أ ء ب)} = \frac{١٤}{جا ٦٠°}$

∴ جا (د أ ء ب) = $\frac{٦ جا ٦٠°}{١٤}$

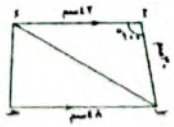
∴ ق(د أ ء ب) ≃ $٢١° ٤٧َ$

، مساحة متوازى الأضلاع أ ب حـ ء

= ٢ مساحة المثلث أ ب ء

$= ٢ × \frac{١}{٢} × ٦ × ١٦$ جا $٦٠° ≃ ٨٣$ سم^٢

٢١



فى Δ أ ب ء :

$(ب ء)^٢ = (٣٠)^٢ + (٤٢)^٢$

– ٢ × ٣٠ × ٤٢ جتا ١٠٠°

∴ ب ء ≃ ٥٥,٧ سم

، جتا (د أ ء ب) = $\frac{(٥٥,٧)^٢ + (٤٢)^٢ - (٣٠)^٢}{٢ × ٥٥,٧ × ٤٢}$

≃ ٠,٨٤٨

، ∵ أء // ب حـ

∴ ق(د ء ب حـ) = ق(د أ ء ب) (بالتبادل)

∴ جتا (د ء ب حـ) = ٠,٨٤٨

∴ $(حـ ء)^٢ = (٥٥,٧)^٢ + (٤٨)^٢ - ٢$

× ٥٥,٧ × ٤٨ × ٠,٨٤٨

∴ حـ ء ≃ ٣٠ سم

٢٢

فى Δ أ ب حـ :

جتا ب = $\frac{(٩)^٢ + (٥)^٢ - (١١)^٢}{٢ × ٩ × ٥} = -\frac{١}{٦}$

، فى Δ أ ء حـ :

جتا ء = $\frac{(٩)^٢ + (٨)^٢ - (١١)^٢}{٢ × ٩ × ٨} = \frac{١}{٦}$

∴ جتا ب + جتا ء = ٠

∴ ق(د ب) + ق(د ء) = ١٨٠°

∴ الشكل رباعى دائرى.

٢٣

∵ أ ب حـ ء

شكل رباعى دائرى

∴ جتا ب = – جتا ء

∴ $\frac{(٩)^٢ + (٥)^٢ - (أ حـ)^٢}{٢ × ٩ × ٥}$

$= \frac{-(٩)^٢ - (٨)^٢ + (أ حـ)^٢}{٢ × ٩ × ٨}$

∴ $\frac{١٠٦ - (أ حـ)^٢}{٥} = \frac{-١٤٥ + (أ حـ)^٢}{٨}$

∴ $٨٤٨ - ٨ (أ حـ)^٢ = -٧٢٥ + ٥ (أ حـ)^٢$

∴ $١٣ (أ حـ)^٢ = ١٥٧٣$ ∴ $(أ حـ)^٢ = ١٢١$

∴ أ حـ = ١١ سم

٢٤

فى المثلث أ ب حـ

جتا (د ب أ حـ)

$= \frac{(٦)^٢ + (٢٦)^٢ - (٢٤)^٢}{٢ × ٦ × ٢٦} = \frac{١}{٢}$

، فى المثلث ب حـ ء

جتا (د ب ء حـ) = $\frac{(١٠)^٢ + (٢٦)^٢ - (٢٤)^٢}{٢ × ١٠ × ٢٦} = \frac{١}{٢}$

∴ ق(د ب أ حـ) = ق(د ب ء حـ)

∴ الشكل رباعى دائرى.

٢٥

فى Δ أ ء حـ

جتا (د ء أ حـ)

$= \frac{(٣٢)^٢ + (١٨)^٢ - (٢٨)^٢}{٢ × ٣٢ × ١٨} = \frac{٤٣}{٩٦}$

∴ ق(د ء أ حـ) ≃ ٦٣° ٢٠َ

، فى Δ حـ أ ب

جتا (د حـ أ ب) = $\frac{(٣٢)^٢ + (١٨)^٢ - (٢٨)^٢}{٢ (٣٢) (١٨)} = \frac{٤٣}{٩٦}$

∴ ق(د ء أ حـ) = ق(د حـ أ ب)

أى أن : $\overrightarrow{أ حـ}$ ينصف د ب أ ء

∴ مساحة الشكل أ ب حـ ء

= مساحة Δ أ ء حـ + مساحة Δ أ حـ ب

$= \frac{١}{٢} × ٣٢ × ١٨ ×$ جا $٦٣° ٢٠َ + \frac{١}{٢} × ١٨ × ٣٢ ×$ جا $٦٣° ٢٠َ$

= ٥١٥ سم^٢

٢٦

فى Δ أ ء ب

أ ب = $\sqrt{(١٠)^٢ - (٨)^٢}$

= ٦ سم

، جا ب = $\frac{٣}{٤}$ ∴ ق(د ب) ≃ ٤٨° ٣٥َ

في Δ ءب حـ : ءب = ½ ءحـ

∴ ءحـ = ٢٠ سم ، ب حـ = ١٠ √٣ سم

في Δ أب حـ :

ق (∠ أب حـ) = ٩٠° + ٨َ ٥٣° = ٨َ ١٤٣°

∴ (أحـ)² = (٦)² + (١٠ √٣)²

− ٢ (٦) (١٠ √٣) جتا ٨َ ١٤٣°

∴ أحـ ≃ ٢٢ سم

٢٧

∵ حـ² = (٣ ب)² + ب² − ٢ × ٣ ب × ب × جتا ٦٠°

= ٧ ب²

∴ حـ = √٧ ب

∴ جتا ب = (٧ ب² + ٩ ب² − ب²) / (٢ × √٧ ب × ٣ ب) = ١٥ / (٦ √٧) = ٥ / (٢ √٧)

∴ ق (∠ ب) ≃ ٦َ ١٩°

، ∵ ق (∠ أ) + ق (∠ ب) = ١٢٠°

∴ ق (∠ أ) = ٥٤َ ١٠٠°

٢٨

∵ ١٠ √٣ = ½ × ٥ × حـ × جا ١٢٠°

∴ حـ = ٨ سم

∴ ب² = (٥)² + (٨)² − ٢ × ٥ × ٨ جتا ١٢٠° = ١٢٩

∴ ب = √١٢٩ ≃ ١١,٣٦ سم

∴ جتا أ = (١٢٩ + (٨)² − (٥)²) / (٢ × √١٢٩ × ٨)

∴ ق (∠ أ) ≃ ٢٥َ ٢٢°

٢٩

∵ ب : حـ = ٣ : ٤

ويفرض أن : ب = ٣ ك ، حـ = ٤ ك

، ∵ مساحة Δ أب حـ = ٦٤

∴ ½ × ٣ ك × ٤ ك × جا ٣٠° = ٦٤

∴ ك = ٨ / √٣

∴ ب = ٢٤ / √٣ سم ، حـ = ٣٢ / √٣

∴ أ² = (٣٢ / √٣)² + (٢٤ / √٣)²

− ٢ × (٣٢ / √٣) × (٢٤ / √٣) × جتا ٣٠°

∴ أ ≃ ٩,٥ سم

∴ محيط Δ أب حـ ≃ ٤١,٨ سم

٣٠

مساحة Δ أب حـ = ½ أ ب جا حـ

∴ ٢٠ = ½ × ٦ × ١٠ جا حـ

∴ جا حـ = ٢/٣

∴ ق (∠حـ) ≃ ١١َ ١٣٨° (∠حـ منفرجة)

∴ حـ² = (٦)² + (١٠)² − ٢ × ٦ × ١٠ جتا ١١َ ١٣٨°

∴ حـ ≃ ١٥ سم

٣١

∵ جا أ / ١ = جا ب / ١,٥ = جا حـ / ٢

∴ أ : ب : حـ = ١ : ١,٥ : ٢

∴ أ = ك ، ب = ١,٥ ك ، حـ = ٢ ك

، ∵ حـ − أ = ٤ سم ∴ ٢ ك − ك = ٤

∴ ك = ٤

∴ أ = ٤ سم ، ب = ٦ سم ، حـ = ٨ سم

∴ جتا أ = ((٦)² + (٨)² − (٤)²) / (٢ × ٦ × ٨) = ٧/٨

∴ ق (∠ أ) = ٢٨ً ٥٧َ ٢٨°

٣٢

∵ جا أ : جا ب : جا حـ = ٣ : ٥ : ٧

∴ أ : ب : حـ = ٣ : ٥ : ٧

ويفرض أن : أ = ٣ ك ، ب = ٥ ك ، حـ = ٧ ك

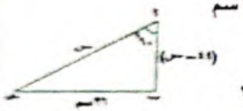
∴ جتا أ = ((٥ ك)² + (٧ ك)² − (٣ ك)²) / (٢ × ٥ ك × ٧ ك) = ١٣/١٤

، جتا ب = ((٣ ك)² + (٧ ك)² − (٥ ك)²) / (٢ × ٣ ك × ٧ ك) = ١١/١٤

، جتا حـ = ((٣ ك)² + (٥ ك)² − (٧ ك)²) / (٢ × ٣ ك × ٥ ك) = −½

∴ جتا أ : جتا ب : جتا حـ = ١٣/١٤ : ١١/١٤ : −½ = ١٣ : ١١ : −٧

٣٣



∵ محيط Δ أب حـ = ٧٠ سم

، أ = ٢٦ سم

∴ ب + حـ = ٧٠ − ٢٦

= ٤٤ سم

، بفرض ب = س

∴ حـ = ٤٤ − س

∴ (٢٦)² = س² + (٤٤ − س)²

− ٢ س (٤٤ − س) جتا ٦٠°

∴ س² − ٤٤ س + ٤٢٠ = ٠

∴ (س − ٣٠) (س − ١٤) = ٠

∴ س = ٣٠ أو س = ١٤

ب حـ = ٣٠ × ١٤ = ٤٢٠

∴ مساحة Δ أب حـ = ½ ب حـ جا أ

= ½ × ٤٢٠ × جا ٦٠°

= ١٠٥ √٣ سم²

٣٤

∵ ٣٤ = ١٢ + (٦ + حـ) + حـ

∴ حـ = ٨ سم ، ب = ١٤ سم

، ∵ أصغر زاوية تقابل أصغر ضلع وهو حـ

∴ جتا حـ = ((١٢)² + (١٤)² − (٨)²) / (٢ × ١٢ × ١٤) = ٢٣/٢٨

∴ ق (∠حـ) = ١٩ً ٤٦َ ٣٤°

، مساحة المثلث أب حـ = ½ × ١٢ × ١٤ جا ١٩ً ٤٦َ ٣٤°

≃ ٤٧,٩ سم²

٣٥

∵ س < ١٠

∴ أكبر الزوايا هي المقابلة للضلع الذي طوله ١٤ سم

∴ جتا ١٢٠° = ((١٠)² + س² − (١٤)²) / (٢ × ١٠ × س)

∴ −½ = (س² − ٩٦) / (٢٠ س)

∴ − س² + ٩٦ = ١٠ س

∴ س² + ١٠ س − ٩٦ = ٠

(س + ١٦) (س − ٦) = ٠

∴ س = ٦ أو س = −١٦ (مرفوض)

٣٦

∵ جتا حـ = (أ² + ب² − حـ²) / (٢ أ ب)

∴ جتا ١٢٠° = ((ب − ٣)² + ب² − (ب + ٢)²) / (٢ (ب − ٣) (ب))

∴ −½ = (ب² − ٦ ب + ٩ + ب² − ب² − ٤ ب − ٤) / (٢ (ب − ٣) (ب))

∴ −١ = (ب² − ٨ ب) / (ب (ب − ٣)) ∴ −١ = ب (ب − ٨) / ب (ب − ٣)

∴ ٣ − ب = ب − ٨ ∴ ٢ ب = ١٠

∴ ب = ٥ ∴ أ = ٢ ، حـ = ٧

٣٧

∵ (أ + ب + جـ) (أ + ب − جـ) = ٣ أ ب

∴ (أ + ب)^{2} − جـ^{2} = ٣ أ ب

∴ أ^{2} + ب^{2} + ٢ أ ب − جـ^{2} = ٣ أ ب

∴ أ^{2} + ب^{2} − جـ^{2} = أ ب وبقسمة الطرفين على ٢ أ ب

∴ $\frac{\text{أ}^{2} + \text{ب}^{2} - \text{جـ}^{2}}{\text{٢ أ ب}} = \frac{1}{2}$

∴ جتا جـ = $\frac{1}{2}$ ∴ ق (∠ جـ) = ٦٠°

٣٨

∵ (أ + ب + جـ) (أ + ب − جـ) = ك أ ب

∴ (أ + ب)^{2} − جـ^{2} = ك أ ب

∴ أ^{2} + ب^{2} + ٢ أ ب − جـ^{2} = ك أ ب

∴ $\frac{\text{أ}^{2} + \text{ب}^{2} - \text{جـ}^{2}}{\text{٢ أ ب}} = \frac{\text{(ك − ٢) أ ب}}{\text{٢ أ ب}}$

∴ جتا جـ = $\frac{\text{ك − ٢}}{2}$

، ∵ صفر < ق (∠ جـ) < ١٨٠°

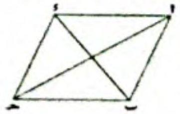
∴ −١ < جتا جـ < ١ ∴ −١ < $\frac{\text{ك − ٢}}{2}$ < ١

∴ −٢ < ك − ٢ < ٢ ∴ صفر < ك < ٤

∴ ك ∈]٠ ، ٤[، عندما ك = ١

∴ جتا جـ = $\frac{-1}{2}$ ∴ ق (∠ جـ) = ١٢٠°

٣٩



من Δ أ ب جـ :

(أ جـ)^{2} = (أ ب)^{2} + (ب جـ)^{2}

− ٢ (أ ب) × (ب جـ) جتا (∠ أ ب جـ) (١)

، من Δ ب جـ د :

(ب د)^{2} = (ب جـ)^{2} + (د جـ)^{2} − ٢ (ب جـ)

× (د جـ) جتا (∠ د جـ ب)

، ∵ د جـ = أ ب ، جتا (∠ د جـ ب) = − جتا (∠ أ ب جـ)

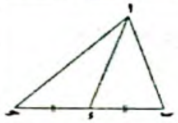
∴ (ب د)^{2} = (ب جـ)^{2} + (أ ب)^{2} + ٢ (ب جـ)

× (أ ب) جتا (∠ أ ب جـ) (٢)

وبجمع (١) ، (٢) :

∴ (أ جـ)^{2} + (ب د)^{2} = ٢ (أ ب)^{2} + ٢ (ب جـ)^{2}

٤٠



من Δ أ ب د :

(أ ب)^{2} = (أ د)^{2} + (ب د)^{2}

− ٢ (أ د) (ب د) جتا (∠ أ د ب) (١)

من Δ أ د جـ : (أ جـ)^{2} = (أ د)^{2} + (جـ د)^{2}

− ٢ (أ د) (جـ د) جتا (∠ أ د جـ) (٢)

، ∵ جتا (∠ أ د ب) = − جتا (∠ أ د جـ) ، جـ د = ب د

وبجمع (١) ، (٢) :

∴ (أ ب)^{2} + (أ جـ)^{2} = ٢ (أ د)^{2} + ٢ (ب د)^{2}

∴ (٥)^{2} + (٨)^{2} = ٢ (أ د)^{2} + ٢ (٦)^{2}

∴ أ د = $\frac{\sqrt{٣٤}}{٢}$ سم

٤١

ظتا ب + ظتا جـ = $\frac{\text{جتا ب}}{\text{جا ب}} + \frac{\text{جتا جـ}}{\text{جا جـ}}$

= $\frac{\text{أ}^{2} + \text{جـ}^{2} - \text{ب}^{2}}{\text{٢ أ جـ جا ب}} + \frac{\text{أ}^{2} + \text{ب}^{2} - \text{جـ}^{2}}{\text{٢ أ ب جا جـ}}$

= $\frac{\text{أ}^{2} + \text{جـ}^{2} - \text{ب}^{2}}{\text{٤ Δ}} + \frac{\text{أ}^{2} + \text{ب}^{2} - \text{جـ}^{2}}{\text{٤ Δ}}$

= $\frac{\text{٢ أ}^{2}}{\text{٤ Δ}} = \frac{\text{أ}^{2}}{\text{٢ Δ}}$

٤٢

∵ ب^{2} = جـ^{2} − ٢ جـ أ + أ^{2} + أ جـ

∴ ب^{2} = جـ^{2} + أ^{2} − جـ أ

، ∵ ب^{2} = جـ^{2} + أ^{2} − ٢ أ جـ جتا ب

∴ جـ أ = ٢ أ جـ جتا ب ∴ جتا ب = $\frac{1}{2}$

∴ ق (∠ ب) = ٦٠°

٤٣

فى Δ س ص ع :

∵ س^{2} = ص^{2} + ع^{2} − ٢ ص ع جتا س

، ∵ س^{2} = ص^{2} + ع^{2} − ص ع ظتا س

∴ ٢ جتا س = ظتا س ∴ ٢ جتا س = $\frac{\text{جتا س}}{\text{جا س}}$

∴ ٢ جتا س جا س − جتا س = ٠

∴ جتا س (٢ جا س − ١) = ٠

∴ إما جتا س = ٠ ومنها س = ٩٠°

أ، جا س = $\frac{1}{2}$ ∴ س = ٣٠° أ، ١٥٠°

∴ ق (∠ س) = ٩٠° أ، ٣٠° أ، ١٥٠°

٤٤

∵ جتا ب = $\frac{\text{أ}^{2} + \text{جـ}^{2} - \text{ب}^{2}}{\text{٢ أ جـ}}$

∴ $\frac{\text{جـ}}{\text{٢ أ}} = \frac{\text{أ}^{2} + \text{جـ}^{2} - \text{ب}^{2}}{\text{٢ أ جـ}}$

∴ جـ^{2} = أ^{2} + جـ^{2} − ب^{2}

∴ أ^{2} = ب^{2} ∴ أ = ب

∴ Δ أ ب جـ متساوى الساقين.

٤٥

∵ أ ب جـ د هـ

خماسى منتظم

∴ ق (∠ ب) = ١٠٨°

∴ (أ جـ)^{2}

= (١٨,٢٦)^{2} + (١٨,٢٦)^{2}

−٢ (١٨,٢٦) (١٨,٢٦) × جتا ١٠٨°

∴ أ جـ ≃ ٢٩,٥ سم

٤٦

حل زياد خطأ لأن قانون الجيب يجعل جيب الزاوية الحادة أو المنفرجة دائمًا موجبًا رغم أن الزاوية هنا منفرجة ويؤكد ذلك استخدام قاعدة جيب التمام فى حل كريم.

مسائل تقيس مهارات التفكير

١

① (ب) ② (د) ③ (ب) ④ (ب)

⑤ (ب) ⑥ (أ) ⑦ (جـ) ⑧ (د)

⑨ (ب) ⑩ (ب) ⑪ (أ)

إرشادات لحل رقم ١

① ∵ أ ب = $\sqrt{(٣ - ٠)^{2} + (٤ - ١)^{2}} = ٣\sqrt{٢}$

، ب جـ = $\sqrt{(١ - ٣)^{2} + (٣ - ٤)^{2}} = \sqrt{٥}$

، أ جـ = $\sqrt{(١ - ٠)^{2} + (٣ - ١)^{2}} = \sqrt{٥}$

∴ جتا (∠ أ جـ ب)

= $\frac{(\sqrt{٥})^{2} + (\sqrt{٥})^{2} - (٣\sqrt{٢})^{2}}{٢ \times \sqrt{٥} \times \sqrt{٥}}$

= $\frac{-٤}{٥}$

② • إذا علم طول $\overline{\text{أ ب}}$ تعين ق (∠ أ جـ ب) وبالتالى ق (∠ د جـ هـ) ، طول $\overline{\text{د هـ}}$

• إذا علم مساحة Δ أ ب جـ تعين ق (∠ أ جـ ب) وبالتالى ق (∠ د جـ هـ) ، طول $\overline{\text{د هـ}}$

• إذا علم محيط Δ أ ب جـ علم طول $\overline{\text{أ ب}}$ وبالتالى تعين ق (∠ أ جـ ب) ، ق (∠ د جـ هـ) ، طول $\overline{\text{د هـ}}$

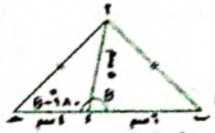
∴ معرفة أى مما سبق يصلح لإيجاد طول $\overline{\text{د هـ}}$

③ ∵ (أ ب)^{2} = (٥)^{2} + (٦)^{2} − ٢ × ٥ × ٦ جتا θ (١)

، (أ جـ)^{2} = (٥)^{2} + (٤)^{2}

− ٢ × ٥ × ٤ جتا (١٨٠° − θ) (٢)

، ∵ أب = أحـ



ومن (١) ، (٢) :

∴ ٢٥ + ٣٦ − ٦٠ جتا θ

= ٢٥ + ١٦ + ٤٠ جتا θ

∴ ١٠٠ جتا θ = ٢٠ ∴ جتا θ = $\frac{١}{٥}$

∴ (أب)^{٢} = ٢٥ + ٣٦ − ٦٠ × $\frac{١}{٥}$ = ٤٩

∴ أب = ٧ سم

④ ∵ الشكل أ ب حـ ء رباعى دائرى.

∴ جتا أ = − جتا حـ

∴ فى Δ أ ب ء :

(ب ء)^{٢} = (٣)^{٢} + (٢)^{٢} − ٢ × ٣ × ٢ جتا أ (١)

، فى Δ حـ ب ء :

(ب ء)^{٢} = (٣)^{٢} + (٤)^{٢} − ٢ × ٣ × ٤ جتا حـ (٢)

من (١) ، (٢) :

∴ ٩ + ٤ − ١٢ جتا أ = ٩ + ١٦ + ٢٤ جتا أ

∴ ٣٦ جتا أ = − ١٢ ∴ جتا أ = − $\frac{١}{٣}$

⑤ ∵ $\overline{\text{أحـ}}$ ، $\overline{\text{ءب}}$ وتران متقاطعان فى الدائرة فى النقطة هـ

∴ أهـ × هـ حـ = ء هـ × هـ ب

∴ ٢ × ٤ = ٢ × هـ ب ∴ هـ ب = ٦ سم

∴ جتا (د ب أ هـ) = $\frac{(٣)^{٢} + (٨)^{٢} − (٦)^{٢}}{٢ × ٣ × ٨}$ = $\frac{٣٧}{٤٨}$

∴ ق (د ب أ هـ) = ٢٤ ٣٩°

⑥ فى Δ أ ب حـ :

∵ (أب)^{٢} = (٦)^{٢} + (١٢)^{٢} − ٢ × ٦ × ١٢ × جتا (٠٫٤)^{ء}

∴ أب = ٦٫٩ سم

، ∵ هـ^{ء} = $\frac{ل}{نق}$

∴ طول $\widehat{\text{ب ء}}$ = ٠٫٤^{ء} × ٦ = ٢٫٤ سم

∴ محيط الجزء المظلل = ٦٫٩ + ٢٫٤ + ٦ = ١٥٫٣

⑦ ∵ جتا أ = $\frac{ب^{٢} + حـ^{٢} − أ^{٢}}{٢ ب حـ}$

∴ ب^{٢} + حـ^{٢} − أ^{٢} = ٢ ب حـ جتا أ

∴ (ب^{٢} + حـ^{٢} − أ^{٢}) ظا أ

= ٢ ب حـ جتا أ × $\frac{\text{جا أ}}{\text{جتا أ}}$ = ٢ ب حـ جا أ

= ٤ × ($\frac{١}{٢}$ ب حـ جا أ) = ٤ × ١٢ = ٤٨

⑧ (١ + $\frac{أ}{حـ}$ + $\frac{ب}{حـ}$) (١ + $\frac{حـ}{ب}$ − $\frac{أ}{ب}$)

= ($\frac{حـ + أ + ب}{حـ}$) ($\frac{ب + حـ − أ}{ب}$)

= $\frac{(ب + حـ)^{٢} − أ^{٢}}{ب حـ}$ = $\frac{ب^{٢} + حـ^{٢} − أ^{٢} + ٢ ب حـ}{ب حـ}$

= $\frac{ب^{٢} + حـ^{٢} − أ^{٢}}{ب حـ}$ + ٢

= ٢ جتا أ + ٢ = ٢ ($\frac{١}{٢}$) + ٢ = ٣

⑨ ∵ $\frac{أ^{٣} + ب^{٣} + حـ^{٣}}{أ + ب + حـ}$ = أ^{٢}

∴ أ^{٣} + ب^{٣} + حـ^{٣} = أ^{٣} + ب أ^{٢} + حـ أ^{٢}

∴ ب^{٣} + حـ^{٣} = ب أ^{٢} + حـ أ^{٢}

∴ (ب + حـ) (ب^{٢} − ب حـ + حـ^{٢}) = أ^{٢} (ب + حـ)

∴ أ^{٢} = ب^{٢} − ب حـ + حـ^{٢}

∴ ب^{٢} + حـ^{٢} − أ^{٢} = ب حـ

∴ $\frac{ب^{٢} + حـ^{٢} − أ^{٢}}{٢ ب حـ}$ = $\frac{١}{٢}$ ∴ جتا أ = $\frac{١}{٢}$

∴ ق (د أ) = ٦٠°

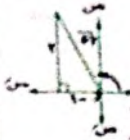
⑩ بفرض طول ضلع المربع الصغير = ل سم

∴ طول ضلع المربع الأكبر = ٣ ل سم

∴ س هـ = $\sqrt{ل^{٢} + ل^{٢}}$ = $\sqrt{٢}$ ل سم

، ب س = $\sqrt{ل^{٢} + (٣ ل)^{٢}}$ = $\sqrt{١٠}$ ل سم

، ب هـ = ٤ ل سم



∴ جتا (د ب س هـ)

= $\frac{(\sqrt{٢} ل)^{٢} + (\sqrt{١٠} ل)^{٢} − (٤ ل)^{٢}}{٢ × \sqrt{٢} ل × \sqrt{١٠} ل}$

= $\frac{− ٤ ل^{٢}}{٤ \sqrt{٥} ل^{٢}}$ = $\frac{− ١}{\sqrt{٥}}$ ∴ جا (د ب س هـ) = $\frac{٢}{\sqrt{٥}}$

⑪ ∵ ب حـ = $\sqrt{(٦٠)^{٢} + (٨٠)^{٢}}$ = ١٠٠ سم

، ∵ محيط Δ أ حـ ء = محيط Δ أ ب ء

∴ أحـ + حـ ء = أب + ب ء (لأن $\overline{\text{أء}}$ مشترك)

∴ ٨٠ + حـ ء = ٦٠ + (١٠٠ − حـ ء)

∴ ٢ حـ ء = ٨٠

∴ حـ ء = ٤٠ سم ، ب ء = ٦٠ سم

فى Δ أ ب ء :

∴ (أء)^{٢} = (٦٠)^{٢} + (٦٠)^{٢} − ٢ (٦٠) (٦٠) جتا ب

∵ جتا ب = $\frac{٦٠}{١٠٠}$ = ٠٫٦

∴ (أء)^{٢} = ٣٦٠٠ + ٣٦٠٠ − ٢ × ٣٦٠٠ × ٠٫٦

∴ أء = ٢٤ $\sqrt{٥}$ سم

٢

∵ $\frac{أ^{٢} + حـ^{٢} − ب^{٢}}{٢ أ^{٢} حـ}$ = $\frac{ب^{٢} + حـ^{٢} − أ^{٢}}{٢ ب^{٢} حـ}$

∴ أ^{٢} ب^{٢} + ب^{٢} حـ^{٢} − ب^{٤} = أ^{٢} ب^{٢} + أ^{٢} حـ^{٢} − أ^{٤}

∴ (أ^{٢} − ب^{٢}) حـ^{٢} − (أ^{٢} − ب^{٢}) (أ^{٢} + ب^{٢}) = ٠

∴ (أ^{٢} − ب^{٢}) (حـ^{٢} − أ^{٢} − ب^{٢}) = ٠

∴ أ^{٢} = ب^{٢} أ، حـ^{٢} = أ^{٢} + ب^{٢}

∴ أ = ب أى المثلث أ ب حـ متساوى الساقين

أ، المثلث أ ب حـ قائم الزاوية فى حـ

٣

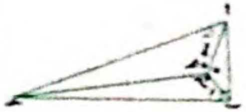
∵ ق (د أ هـ ب) = ق (د أ هـ حـ)

= ق (د ب هـ حـ) = $\frac{٣٦٠°}{٣}$ = ١٢٠°

فى Δ أ ب هـ :

(أب)^{٢} = ٣٦ + ١٠٠ − ٢ × ٦ × ١٠ × جتا ١٢٠°

∴ أب = ١٤ سم



وبفرض هـ حـ = س

∴ فى Δ أ هـ حـ :

(أحـ)^{٢} = ١٠٠ + س^{٢} − ٢ × ١٠ × س جتا ١٢٠°

∴ (أحـ)^{٢} = ١٠٠ + س^{٢} + ١٠ س

فى Δ ب هـ حـ :

(ب حـ)^{٢} = ٣٦ + س^{٢} − ٢ × ٦ × س جتا ١٢٠°

∴ (ب حـ)^{٢} = ٣٦ + س^{٢} + ٦ س

، من Δ أ ب حـ : (أحـ)^{٢} = (أب)^{٢} + (ب حـ)^{٢}

∴ ١٠٠ + س^{٢} + ١٠ س = ١٩٦ + ٣٦ + س^{٢} + ٦ س

∴ ٤ س = ١٣٢ ∴ س = ٣٣ سم

∴ هـ حـ = ٣٣ سم

٤

بفرض أن :

، أ م = م ن = ن حـ = س

، أب = ص

من Δ أ ب م :

جتا أ = $\frac{ص^{٢} + س^{٢} − ٩}{٢ س ص}$

∴ $\frac{ص}{٣ س}$ = $\frac{ص^{٢} + س^{٢} − ٩}{٢ س ص}$

∴ ٢ ص^{٢} = ٣ ص^{٢} + ٣ س^{٢} − ٢٧

∴ ص^{٢} + ٣ س^{٢} = ٢٧ (١)

من Δ أ ب ن :

جتا أ = $\frac{ص^{٢} + ٤ س^{٢} − ١٦}{٢ × ص × ٢ س}$

∴ $\frac{\text{ص}}{\text{٢ س}} = \frac{\text{ص}^{٢} + ٤\text{ س}^{٢} - ١٦}{٤\text{ س ص}}$

∴ ٤ ص^{٢} = ٢ ص^{٢} + ١٢ س^{٢} − ٤٨

∴ − ص^{٢} + ١٢ س^{٢} = ٤٨ (٢)

بجمع (١) ، (٢) :

∴ ١٥ س^{٢} = ٧٥ ∴ س^{٢} = ٥ ∴ س = $\sqrt{٥}$ سم

وبالتعويض فى (١) :

∴ ص^{٢} + ١٥ = ٢٧ ∴ ص^{٢} = ١٢

∴ ص = ٢$\sqrt{٣}$ سم

∴ ب حـ = $\sqrt{(٣\sqrt{٥})^{٢} - ١٢} = \sqrt{٣٣}$

∴ محيط Δ أ ب حـ = أ ب + ب حـ + أ حـ

= ٢$\sqrt{٣}$ + $\sqrt{٣٣}$ + ٣$\sqrt{٥}$ ≃ ١٦ سم

٥

① ∵ $\frac{\text{جتا أ}}{\text{أ}} = \frac{\text{ب}^{٢} + \text{حـ}^{٢} - \text{أ}^{٢}}{٢\text{ ب حـ} \times \text{أ}}$

، $\frac{\text{جتا ب}}{\text{ب}} = \frac{\text{أ}^{٢} + \text{حـ}^{٢} - \text{ب}^{٢}}{٢\text{ أ حـ} \times \text{ب}}$ ، $\frac{\text{جتا حـ}}{\text{حـ}} = \frac{\text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢} - \text{حـ}^{٢}}{٢\text{ أ ب} \times \text{حـ}}$

∴ $\frac{\text{جتا أ}}{\text{أ}} + \frac{\text{جتا ب}}{\text{ب}} + \frac{\text{جتا حـ}}{\text{حـ}}$

= $\frac{\text{ب}^{٢} + \text{حـ}^{٢} - \text{أ}^{٢} + \text{أ}^{٢} + \text{حـ}^{٢} - \text{ب}^{٢} + \text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢} - \text{حـ}^{٢}}{٢\text{ أ ب حـ}}$

= $\frac{\text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢} + \text{حـ}^{٢}}{٢\text{ أ ب حـ}}$

② ∵ أ^{٢} + ب^{٢} + حـ^{٢} = ب^{٢} + حـ^{٢} − ٢ ب حـ جتا أ + حـ^{٢} + أ^{٢} − ٢ حـ أ جتا ب + أ^{٢} + ب^{٢} − ٢ أ ب جتا حـ

∴ أ^{٢} + ب^{٢} + حـ^{٢}

= ٢أ^{٢} + ٢ب^{٢} + ٢حـ^{٢} − ٢ ب حـ جتا أ − ٢ حـ أ جتا ب − ٢ أ ب جتا حـ

∴ أ^{٢} + ب^{٢} + حـ^{٢}

= ٢ (ب حـ جتا أ + حـ أ جتا ب + أ ب جتا حـ)

③ $\frac{\text{ظا أ}}{\text{ظا حـ}} = \frac{\text{جا أ}}{\text{جتا أ}} \div \frac{\text{جا حـ}}{\text{جتا حـ}} = \frac{\text{جا أ}}{\text{جا حـ}} \times \frac{\text{جتا حـ}}{\text{جتا أ}}$

= $\frac{\text{أ}}{\text{حـ}} \times \frac{\text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢} - \text{حـ}^{٢}}{٢\text{ أ ب}} \times \frac{٢\text{ ب حـ}}{\text{ب}^{٢} + \text{حـ}^{٢} - \text{أ}^{٢}}$

= $\frac{\text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢} - \text{حـ}^{٢}}{\text{ب}^{٢} + \text{حـ}^{٢} - \text{أ}^{٢}}$

إجابات تمارين 21

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

① (د) ② (جـ)

③ (جـ) ④ أولًا : (أ) ثانيًا : (د)

⑤ (أ) ⑥ (ب) ⑦ (أ) ⑧ (أ)

⑨ (أ) ⑩ (ب) ⑪ (د) ⑫ (جـ)

⑬ (د) ⑭ (د) ⑮ (جـ) ⑯ (جـ)

ثانيا الأسئلة المقالية

مسائل على الحالة الأولى لحل المثلث (طول ضلع وقياسا زاويتين)

١

ق(∠م) = ١٨٠° − (٣٣° ١٦َ + ٤٤° ١٩َ) = ١٠٢° ٢٥َ

∴ $\frac{\text{ل}}{\text{جا } ٣٣° ١٦'} = \frac{١٧}{\text{جا } ١٠٢° ٢٥'} = \frac{\text{ن}}{\text{جا } ٤٤° ١٩'}$

∴ ل ≃ ٩,٥ سم ، ن ≃ ١٢,٢ سم

٢

ق(∠أ) = ٨٠° ، ق(∠ب) = ٤٠°

∴ ق(∠حـ) = ١٨٠° − (٨٠° + ٤٠°) = ٦٠°

∴ $\frac{\text{ب حـ}}{\text{جا } ٨٠°} = \frac{\text{أ حـ}}{\text{جا } ٤٠°} = \frac{٩}{\text{جا } ٦٠°}$

∴ ب حـ ≃ ١٠,٢ سم ، أ حـ ≃ ٦,٧ سم

، مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × ب حـ × أ حـ × جا حـ

= $\frac{١}{٢}$ × ١٠,٢ × ٦,٧ × جا ٦٠°

≃ ٣٠ سم^{٢}

٣

ق(∠ع) = ١٨٠° − (٧٥° ١٢َ + ٤٨° ١٥َ) = ٥٦° ٣٣َ

∴ $\frac{\text{ص ع}}{\text{جا } ٧٥° ١٢'} = \frac{\text{س ع}}{\text{جا } ٤٨° ١٥'} = \frac{٤٠}{\text{جا } ٥٦° ٣٣'}$

∴ ص ع ≃ ٤٦,٤ سم ، س ع ≃ ٣٥,٨ سم

، الارتفاع المطلوب = ص ع × جا ص

= ٤٦,٤ جا ٤٩° ١٥َ ≃ ٣٤,٦ سم

مسائل على الحالة الثانية لحل المثلث (طولا ضلعين وقياس زاوية محصورة)

٤

أ^{٢} = (٦)^{٢} + (٦)^{٢} − ٢ × ٦ × ٦ × جتا ١٥٣° ١٢َ

∴ أ ≃ ١١,٦٧ سم

، ق(∠ب) = ق(∠حـ) = $\frac{١٨٠° - ١٥٣° ١٢'}{٢}$ = ١٣° ٢٤َ

٥

ق(∠م) = ١,٢^{ء} ≃ ٦٨° ٤٥َ

∴ م^{٢} = (١٢,٥)^{٢} + (٧,٢٥)^{٢} − ٢ × ١٢,٥ × ٧,٢٥ × جتا ٦٨° ٤٥َ

∴ م ≃ ١١,٦٩ سم

∴ جتا ل = $\frac{(١١,٩٦)^{٢} + (٧,٢٥)^{٢} - (١٢,٥)^{٢}}{٢ \times ١١,٩٦ \times ٧,٢٥}$

∴ ق(∠ل) ≃ ٧٦° ٥٣َ

∴ ق(∠ن) = ١٨٠° − (٦٨° ٤٥َ + ٧٦° ٥٣َ)

= ٣٤° ٢٢َ

٦

(ل ن)^{٢} = (٤٨,٥)^{٢} + (٤٦)^{٢} − ٢ × ٤٨,٥ × ٤٦ × (−٠,٦)

∴ ل ن ≃ ٨٤,٥٣ سم

، جتا ل = $\frac{(٤٨,٥)^{٢} + (٨٤,٥٣)^{٢} - (٤٦)^{٢}}{٢ \times ٤٨,٥ \times ٨٤,٥٣}$

∴ ق(∠ل) ≃ ١٨° ٢٥َ ، ق(∠م) ≃ ١٢٦° ٥٢َ

∴ ق(∠ن) ≃ ٢٧° ٢٠َ

مسائل على الحالة الثالثة لحل المثلث (معلوم أطوال أضلاعه الثلاثة)

٧

① جتا أ = $\frac{(٢٧)^{٢} + (٢٤)^{٢} - (١٥)^{٢}}{٢ \times ٢٧ \times ٢٤}$

∴ ق(∠أ) ≃ ٣٣° ٣٣َ

، جتا ب = $\frac{(١٥)^{٢} + (٢٧)^{٢} - (٢٤)^{٢}}{٢ \times ١٥ \times ٢٧}$

∴ ق(∠ب) = ٦٢° ١١َ

، ق(∠حـ) = ١٨٠° − (٣٣° ٣٣َ + ٦٢° ١١َ) = ٨٤° ١٦َ

② جتا أ = $\frac{(٣٥)^{٢} + (١٧)^{٢} - (٢٨)^{٢}}{٢ \times ٣٥ \times ١٧}$

∴ ق(∠أ) ≃ ٥٢° ١٠َ

، جتا ب = $\frac{(٢٨)^{٢} + (١٧)^{٢} - (٣٥)^{٢}}{٢ \times ٢٨ \times ١٧}$

∴ ق(∠ب) ≃ ٩٩° ١١َ ، ق(∠حـ) ≃ ٢٨° ٣٩َ

٨

جتا أ = $\frac{(١٤)^{٢} + (١٥)^{٢} - (١٣)^{٢}}{٢ \times ١٤ \times ١٥}$

∴ ق(∠أ) ≃ ٥٣° ٨َ

، جتا ب = $\frac{(١٥)^{٢} + (١٣)^{٢} - (١٤)^{٢}}{٢ \times ١٥ \times ١٣}$

∴ ق(∠ب) ≃ ٥٩° ٢٩َ

∴ ق(∠حـ) = ١٨٠° − (٥٣° ٨َ + ٥٩° ٢٩َ) = ٦٧° ٢٣َ

٩

جتا أ = $\frac{(٨)^{٢} + (٤)^{٢} - (٥)^{٢}}{٢ (٨)(٤)}$

∴ ق(∠أ) ≃ ٣٠° ٤٥َ

، جتا ب = $\frac{(٥)^{٢} + (٤)^{٢} - (٨)^{٢}}{٢ (٤)(٥)}$

∴ ق(∠ب) ≃ ١٢٥° ٦َ

∴ ق(∠حـ) = ١٨٠° − (٣٠° ٤٥َ + ١٢٥° ٦َ) = ٢٤° ٩َ

مسائل على الحالة الرابعة لحل المثلث (طولا ضلعين وقياس زاوية مقابلة لأحدهما)

10

∴ $\frac{١٠}{\text{حا أ}} = \frac{٩}{\text{حا ٥٧°}} = \frac{\text{حَ}}{\text{حا حـ}}$ ∴ حا أ = $\frac{\text{١٠ حا ٥٧°}}{٩}$

∴ ق(∠أ) = ٦٨° ٤٤َ أ، ق(∠أ) = ١١١° ١٦َ

ومنها ق(∠حـ) = ٥٤° ١٦َ أ، ق(∠حـ) = ١١° ٤٤َ

، ∵ $\frac{٩}{\text{حا ٥٧°}} = \frac{\text{حَ}}{\text{حا حـ}}$

∴ حَ = ٨,٧ سم أ، حَ = ٢,٢ سم

11

∴ $\frac{٤}{\text{حا ٥٠°}} = \frac{٣}{\text{حا ب}} = \frac{\text{حَ}}{\text{حا حـ}}$ ∴ حا ب = $\frac{\text{٣ حا ٥٠°}}{٤}$

∴ ق(∠ب) = ٣٥° ٤َ

أ، ق(∠ب) = ١٤٤° ٥٦َ (مرفوض)

∴ ق(∠حـ) = ٩٤° ٥٦َ

∴ $\frac{\text{حَ}}{\text{حا ٩٤° ٥٦َ}} = \frac{٤}{\text{حا ٥٠°}}$ ∴ حَ ≃ ٥,٢ سم

12

$\frac{١٢}{\text{حا ١١٦°}} = \frac{١٠}{\text{حا أ}} = \frac{\text{بَ}}{\text{حا ب}}$ ∴ حا أ = $\frac{\text{١٠ حا ١١٦°}}{١٢}$

∴ ق(∠أ) ≃ ٤٨° ٣٠َ

أ، ق(∠أ) ≃ ١٣١° ٣٠َ (مرفوض)

، ق(∠ب) ≃ ١٨٠° − (٤٨° ٣٠َ + ١١٦°) ≃ ١٥° ٣٠َ

∴ $\frac{\text{بَ}}{\text{حا ١٥° ٣٠َ}} = \frac{١٢}{\text{حا ١١٦°}}$ ∴ بَ ≃ ٣,٦ سم

13

① ∵ ∠أ منفرجة، أَ > بَ ∴ يوجد حل وحيد.

∴ $\frac{١٥}{\text{حا ١٢٠°}} = \frac{١٠}{\text{حا ب}}$ ∴ حا ب = $\frac{\text{١٠ حا ١٢٠°}}{١٥}$

∴ ق(∠ب) ≃ ٣٥°

، ق(∠حـ) = ١٨٠° − (٣٥° + ١٢٠°) = ٢٥°

∴ $\frac{\text{حَ}}{\text{حا ٢٥°}} = \frac{١٥}{\text{حا ١٢٠°}}$ ∴ حَ ≃ ٧,٣ سم

② ∵ ∠حـ منفرجة، حَ > أَ ∴ يوجد حل وحيد

∴ $\frac{١٦}{\text{حا ١١٥°}} = \frac{٤}{\text{حا أ}}$ ∴ حا أ = $\frac{\text{٤ حا ١١٥°}}{١٦}$

∴ ق(∠أ) ≃ ١٣°

، ق(∠ب) = ١٨٠° − (١١٥° + ١٣°) = ٥٢°

، $\frac{١٦}{\text{حا ١١٥°}} = \frac{\text{بَ}}{\text{حا ٥٢°}}$ ∴ بَ ≃ ١٣,٩ سم

③ ∵ ∠أ منفرجة، أَ < بَ

∴ الشروط لا تحقق وجود أى مثلث على الإطلاق

④ ∵ ∠أ حادة، ع = ٢٨ حا ٤٢° ≃ ١٨,٧ سم

، ١٨,٧ < ٢٠ < ٢٨ ∴ يوجد للمثلث حلان.

∴ $\frac{٢٠}{\text{حا ٤٢°}} = \frac{٢٨}{\text{حا ب}}$

∴ ق(∠ب) = ٧٠° أ، ق(∠ب) = ١١٠°

∴ ق(∠حـ) = ١٨٠° − (٧٠° + ٤٢°) = ٦٨°

أ، ق(∠حـ) = ١٨٠° − (١١٠° + ٤٢°) = ٢٨°

، ∵ $\frac{\text{حَ}}{\text{حا حـ}} = \frac{٢٠}{\text{حا ٤٢°}}$

∴ حَ ≃ ٢٧,٧ سم أ، حَ ≃ ١٤ سم

⑤ ∵ ∠أ حادة، ع = ٧ حا ٦٠° ≃ ٦,١ سم

∴ أَ < ع

∴ الشروط لاتحقق وجود أى مثلث على الإطلاق.

⑥ ∵ ∠أ حادة، أَ > حَ ∴ يوجد حل وحيد.

∴ $\frac{١٢}{\text{حا ٢٧°}} = \frac{٧}{\text{حا حـ}}$ ∴ ق(∠حـ) ≃ ١٥°

∴ ق(∠ب) = ١٨٠° − (١٥° + ٢٧°) = ١٣٨°

∴ $\frac{\text{بَ}}{\text{حا ١٣٨°}} = \frac{١٢}{\text{حا ٢٧°}}$ ∴ بَ ≃ ١٧,٧ سم

⑦ ∵ ∠ب حادة، ع = ٤√٣ حا ٦٠° = ٦ سم

∵ ع = بَ

∴ يوجد مثلث وحيد قائم الزاوية.

∴ $\frac{٦}{\text{حا ٦٠°}} = \frac{٤\sqrt{٣}}{\text{حا أ}}$ ∴ ق(∠أ) = ٩٠°

∴ ق(∠حـ) = ١٨٠° − (٩٠° + ٦٠°) = ٣٠°

∴ $\frac{\text{حَ}}{\text{حا ٣٠°}} = \frac{٦}{\text{حا ٦٠°}}$ ∴ حَ = ٣,٥ سم

⑧ ∵ ∠أ حادة، ع = ٨ حا ٤٧° ≃ ٥,٩ سم

∴ ع < أَ < بَ ∴ يوجد للمثلث حلان.

∴ $\frac{٦}{\text{حا ٤٧°}} = \frac{٨}{\text{حا ب}}$

∴ ق(∠ب) ≃ ٧٧° أ، ق(∠ب) ≃ ١٠٣°

∴ ق(∠حـ) = ١٨٠° − (٤٧° + ٧٧°) = ٥٦°

أ، ق(∠حـ) = ١٨٠° − (٤٧° + ١٠٣°) = ٣٠°

، ∵ $\frac{\text{حَ}}{\text{حا حـ}} = \frac{٦}{\text{حا ٤٧°}}$ ∴ حَ ≃ ٦,٨ سم

أ، حَ ≃ ٤,١ سم

14

∵ ∠ب حادة، ع = ٤٢ حا ٥٨° ≃ ٣٥,٦٢ سم

∴ لا يكون للمثلث حل إذا كان: بَ < ٣٥,٦٢ سم

مسائل متنوعة

15

∵ △ أبحـ متساوى الساقين، ق(∠أ) = ١١٠°

∴ ق(∠ب) = ق(∠حـ) = $\frac{١٨٠° - ١١٠°}{٢}$ = ٣٥°

∴ $\frac{٨}{\text{حا ١١٠°}} = \frac{\text{بَ}}{\text{حا ٣٥°}} = \frac{\text{حَ}}{\text{حا ٣٥°}}$

∴ بَ = حَ ≃ ٤,٩ سم

16

∵ ظتا ب = $\frac{٣}{٤}$ (موجبة)

∴ ∠ب حادة

∴ ق(∠ب) = ٥٣° ٨َ ، ق(∠حـ) = ٢٢° ٣٧َ

∴ ق(∠أ) = ١٠٤° ١٥َ

∴ $\frac{٢١}{\text{حا ١٠٤° ١٥َ}} = \frac{\text{بَ}}{\text{حا ٥٣° ٨َ}} = \frac{\text{حَ}}{\text{حا ٢٢° ٣٧َ}}$

∴ بَ = ١٧,٣ سم ، حَ = ٨,٣ سم

17

∵ مساحة المثلث أبحـ = $\frac{١}{٢}$ أَ حَ حا ب

∴ ١٠√٣ = $\frac{١}{٢}$ × ٥ حَ حا ١٢٠°

∴ حَ = ٨ سم

∴ بَ² = (٥)² + (٨)² − ٢ × ٥ × ٨ حتا ١٢٠°

∴ بَ = ١١,٣٦ سم

∴ حتا أ = $\frac{(١١,٣٦)^٢ + (٨)^٢ - (٥)^٢}{٢ \times ١١,٣٦ \times ٨}$

∴ ق(∠أ) = ٢٢° ٢٤َ ∴ ق(∠حـ) = ٣٧° ٣٦َ

18

ق(∠أ) = $\frac{٤}{١٥}$ × ١٨٠° = ٤٨°

، ق(∠ب) = $\frac{٥}{١٥}$ × ١٨٠° = ٦٠°

، ق(∠حـ) = $\frac{٦}{١٥}$ × ١٨٠° = ٧٢°

، ∵ $\frac{\text{أَ}}{\text{حا أ}} = \frac{\text{بَ}}{\text{حا ب}} = \frac{\text{حَ}}{\text{حا حـ}} = \frac{\text{أَ + بَ + حَ}}{\text{حا أ + حا ب + حا حـ}}$

∴ $\frac{\text{أَ}}{\text{حا ٤٨°}} = \frac{\text{بَ}}{\text{حا ٦٠°}} = \frac{\text{حَ}}{\text{حا ٧٢°}} = \frac{٥٠}{٢,٥٦}$

∴ أَ ≃ ١٤,٥ سم ، بَ ≃ ١٦,٩ سم ، حَ = ١٨,٦ سم

19

بفرض أن :

حا أ = ٢ك ، حا ب = ٤ك ، حا حـ = ٦ك

∴ أ/(٢ك) = ب/(٤ك) = جـ/(٦ك) = (أ + ب + جـ)/(١٢ك)

∴ أ/٢ = ب/٤ = جـ/٦ = ٥٢/١٢

∴ أ = ١٢ سم ، ب = ١٦ سم ، جـ = ٢٤ سم

∴ جتا أ = ((١٦)^٢ + (٢٤)^٢ − (١٢)^٢) / (٢ × ١٦ × ٢٤)

∴ ق(∠أ) ≃ ٢٦° ٢٣َ

، جتا ب = ((١٢)^٢ + (٢٤)^٢ − (١٦)^٢) / (٢ × ١٢ × ٢٤)

∴ ق(∠ب) ≃ ٣٦° ٢٠َ ∴ ق(∠جـ) = ١١٧° ١٧َ

٢٠

٢١/جا أ = ٢٥/جا ب = جـ/جا جـ = ٢٨

∴ ق(∠أ) ≃ ٤٨° ٣٥َ ، ق(∠ب) ≃ ٦٣° ١٤َ

∴ ق(∠جـ) = ٦٨° ١١َ

∴ جـ = ٢٨ جا ٦٨° ١١َ ≃ ٢٦ سم

٢١

أ/جا ٨٢° = ب/جا ب = ٥/جا جـ = ١٦ ∴ أ ≃ ١٥٫٨ سم

، ∵ أ > جـ ∴ ∠جـ حادة.

، ∵ جا جـ = ٥/١٦ ∴ ق(∠جـ) ≃ ١٨° ١٣َ

∴ ق(∠ب) = ١٨٠° − (٨٢° + ١٨° ١٣َ) = ٧٩° ٤٧َ

∴ ب = ١٦ جا ٧٩° ٤٧َ ≃ ١٥٫٧ سم

٢٢

∵ ٢ × ٢٢/٧ × نق = ٤٤ ∴ ٢ نق = ١٤

∴ ٧/جا أ = ب/جا ٤٠° = جـ/جا جـ = ١٤

∴ ب = ١٤ جا ٤٠° ≃ ٩ سم

، ∵ ب > أ ∴ ∠أ حادة.

، ∵ جا أ = ٧/١٤ ∴ ق(∠أ) = ٣٠°

∴ ق(∠جـ) = ١٨٠° − (٤٠° + ٣٠°) = ١١٠°

∴ جـ = ١٤ جا ١١٠° ≃ ١٣ سم

٢٣

ق(∠ص) = ١٨٠° − (٨٢° + ٥٦°) = ٤٢°

∴ سَ/جا ٨٢° = صَ/جا ٤٢° = عَ/جا ٥٦° = ك

∴ سَ = ك جا ٨٢° ، صَ = ك جا ٤٢°

∴ ٩٠٠ = ١/٢ (ك جا ٨٢°) (ك جا ٤٢°) جا ٥٦°

∴ ك ≃ ٥٧ ويرفض الحل السالب.

∴ سَ ≃ ٥٦ سم ، صَ ≃ ٣٨ سم ، عَ ≃ ٤٧ سم

٢٤

ق(∠جـ) = ١٨٠° − (٣٥° + ٧٥°) = ٧٠°

∴ أ/جا ٣٥° = ب/جا ٧٥° = جـ/جا ٧٠° = (أ + ٣جـ)/(جا ٣٥° + ٣ جا ٧٠°)

= ٢٥/(جا ٣٥° + ٣ جا ٧٠°)

∴ أ ≃ ٤٫٢ سم ، ب = ٧٫١ سم ، جـ = ٦٫٩ سم

٢٥

∵ أ/جا أ = ٢ نق ∴ ١٣/جا أ = ١٦

∴ ق(∠أ) ≃ ٥٤° ٢٠َ ، أو ١٢٥° ٤٠َ

عندما ق(∠أ) = ٥٤° ٢٠َ

∴ ق(∠جـ) = ٨٣° ٤٠َ

∴ ١٣/جا ٥٤° ٢٠َ = ب/جا ٤٢° = جـ/جا ٨٣° ٤٠َ

∴ ب ≃ ١٠٫٧ سم ، جـ ≃ ١٥٫٩ سم

عندما ق(∠أ) = ١٢٥° ٤٠َ

∴ ق(∠جـ) = ١٢° ٢٠َ

∴ ١٣/جا ١٢٥° ٤٠َ = ب/جا ٤٢° = جـ/جا ١٢° ٢٠َ

∴ ب ≃ ١٠٫٧ سم ، جـ ≃ ٣٫٤ سم

٢٦

① جتا أ = ((٧٫٦٣)^٢ + (٦٫٤)^٢ − (٣٫٢)^٢) / (٢ × ٧٫٦٣ × ٦٫٤)

∴ ق(∠أ) = ٢٤° ٢٤َ

، جتا ب = ((٣٫٢)^٢ + (٦٫٤)^٢ − (٧٫٦٣)^٢) / (٢ × ٣٫٢ × ٦٫٤)

∴ ق(∠ب) ≃ ٩٩° ٥٢َ

∴ ق(∠جـ) = ٥٥° ٤٤َ

② جـَ^٢ = (١٢)^٢ + (٢١)^٢ − ٢ × ١٢ × ٢١ جتا ٩٥°

∴ جـَ ≃ ٢٥٫٠٧٨ سم

، ∵ ٢٥٫٠٧٨/جا ٩٥° = ١٢/جا أ = ٢١/جا ب

∴ ق(∠أ) = ٢٨° ٢٨َ ، ق(∠ب) ≃ ٥٦° ٣٢َ

③ لا يمكن تكوين المثلث لأن أَ + جـَ = بَ

④ ع = ١٠ جا ٤٢° = ٦٫٦٩ سم

∴ ع < أَ < بَ

∴ يوجد حلان للمثلث.

∴ ٧/جا ٤٢° = ١٠/جا ب = جـَ/جا جـ

∴ ق(∠ب) ≃ ٧٢° ٥٥َ

ومنها ق(∠جـ) ≃ ٦٥° ٥َ

، جـَ ≃ ٩٫٥ سم

أو ق(∠ب) ≃ ١٠٧° ٥َ

منها ق(∠جـ) ≃ ٣٠° ٥٥َ

، جـَ ≃ ٥٫٤ سم

ثالثا مسائل تقيس مهارات التفكير

① (أ) ② (جـ) ③ (أ)

إرشادات الحل :

① ∵ أ/جا أ = ب/جا ب ∴ ٣/(٥/١٣) = ٨/جا ب

∴ جا ب = ٤٠/٣٩ (مرفوض)

∴ الشروط لا تحقق وجود أي مثلث على الإطلاق

∴ عدد المثلثات = صفر

② ∵ ٨ جا ٤٠° = بَ جا أ ∴ بَ جا أ < أَ < بَ

∴ يمكننا رسم مثلثين

③ ∵ ٨ جا ٤٠° = بَ جا أ ∴ أَ < بَ جا أ

∴ لا يمكن رسم المثلث.

إرشادات التطبيقات الحياتية على الوحدة الرابعة

١

∵ ق(∠ب) = ١٨٠° − (١٠٨° + ٥٢°) = ٢٠°

∴ أجـ/جا ٢٠° = ١٦٠/جا ٥٢° = بجـ/جا ١٠٨°

∴ أجـ = ٦٩ كم ، بجـ = ١٩٣ كم

أي أن : المسافة بين أ ، جـ ≃ ٦٩ كم

، المسافة بين ب ، جـ ≃ ١٩٣ كم

٢

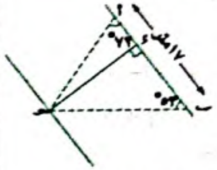
في Δ أ ب جـ :

① ق(∠جـ) = ١٨٠° − (٥٣° + ٧٢°) = ٥٥°

∴ ١٧/جا ٥٥° = أجـ/جا ٥٣° ∴ أجـ = ١٦٫٥٧ م

∴ المسافة بين العلامتين ≃ ١٧ م

② نسقط عمود من حـ على $\overline{أب}$ وليكن $\overline{حـ ء}$



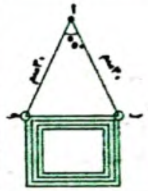
∴ فى Δ أحـ ء :

$\frac{حـ ء}{جا ٧٢°} = \frac{١٦,٥٧}{جا ٩٠°}$

∴ حـ ء ≃ ١٥,٧٦ م

∴ المسافة بين حافتى الجدول ≃ ١٥,٧٦ م

٣

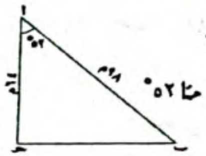


(ب حـ)^{٢} = (٣٠)^{٢} + (٣٠)^{٢}

− ٢ (٣٠) (٣٠) جتا ٥٠°

∴ ب حـ ≃ ٢٥ سم

٤



(ب حـ)^{٢} = (٩٨)^{٢} + (٦٤)^{٢}

− ٢ (٩٨) (٦٤) جتا ٥٢°

∴ ب حـ ≃ ٧٧,٢ م

∴ طول السياج = ٩٨ + ٦٤ + ٧٧,٢ ≃ ٢٣٩ م

٥

(أب)^{٢} = (٢٤)^{٢} + (١٠)^{٢}

− ٢ (٢٤) (١٠) جتا ٧٥°

∴ أب ≃ ٢٢,٥ كم

٦

(أحـ)^{٢} = (٩)^{٢} + (١٥)^{٢} − ٢ (٩) (١٥) جتا ١٢٠°

أحـ = ٢١ كم

، ∵ الزمن = $\frac{المسافة}{السرعة}$

، ن$_{١}$ = $\frac{١٥}{٣٦}$ × ٦٠ = ٢٥ دقيقة.

ن$_{٢}$ = $\frac{٩}{٣٦}$ × ٦٠ = ١٥ دقيقة.

ن$_{٣}$ = $\frac{٢١}{٤٢}$ × ٦٠ = ٣٠ دقيقة.

∴ الزمن الكلى = ٢٥ + ١٥ + ٣٠ = ٧٠ دقيقة.

٧

∵ المثمن منتظم

∴ قياس كل زاوية من زواياه = ١٣٥°

، ق (∠ب ع حـ) = ق (∠حـ ع ء) = $\frac{١٣٥°}{٦}$ = ٢٢,٥°

∴ (ع ب)^{٢} = (٦)^{٢} + (٦)^{٢} − ٢ (٦) (٦) جتا ١٣٥°

∴ ع ب ≃ ١١,١ متر

، (ع حـ)^{٢} = (١١,١)^{٢} + (٦)^{٢} − ٢ (١١,١) (٦) جتا ١١٢,٥°

∴ ع حـ ≃ ١٤,٥ متر

، (ع ء)^{٢} = (١٤,٥)^{٢} + (٦)^{٢} − ٢ (١٤,٥) (٦) جتا ٩٠°

∴ ع ء ≃ ١٥,٧ متر

أولًا : نماذج الامتحانات النهائية

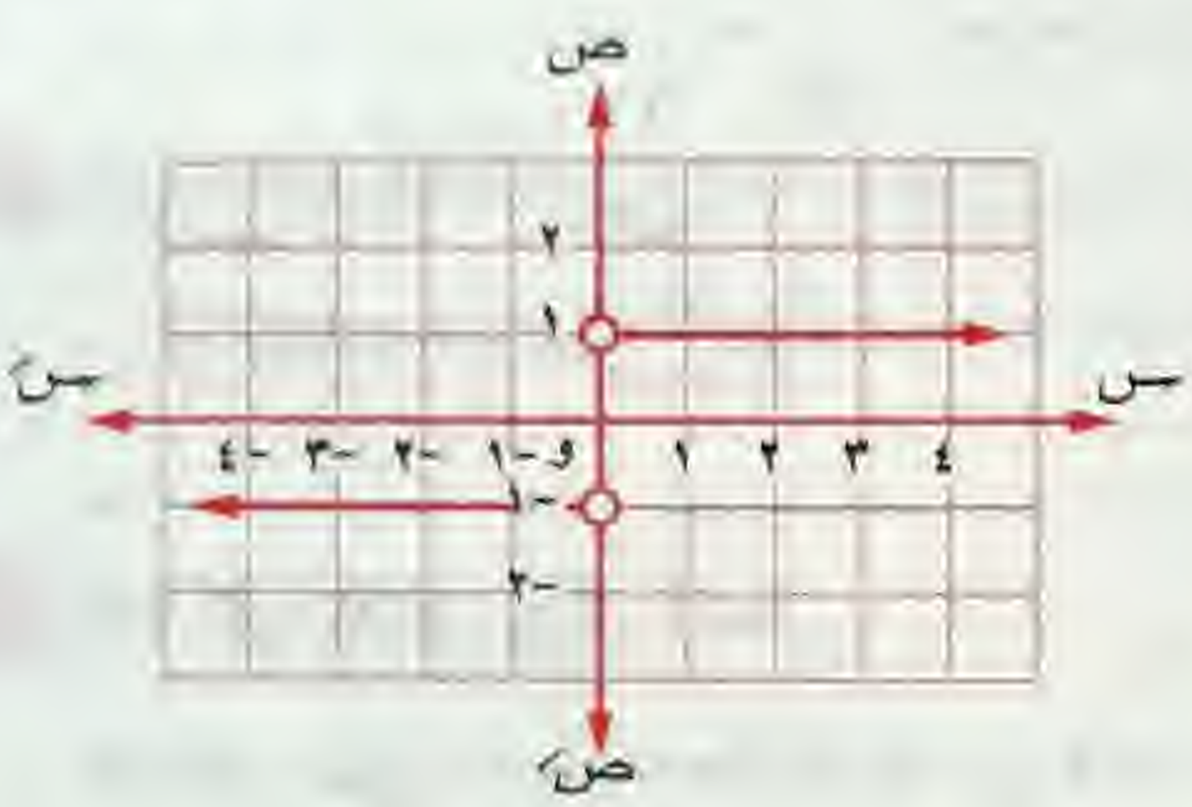
النموذج الأول

امتحان الكتروني ❶

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ مدى الدالة الممثلة

بالشكل المقابل هو ....



(أ) $\{1\}$

(ب) $\{1 ، -1\}$

(جـ) $\{-1\}$

(د) ح

---

٢ إذا كانت النقطة $\left(س ، \frac{٤}{س}\right)$ نقطة تقاطع منحنى الدالة د والدالة العكسية لها $د^{-1}$

فإن : س = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ± ٢ (د) ± ٤

---

٣ $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{٢ س + ٣}{٥ س^{٢} + ٤} =$ ....

(أ) ٢ (ب) صفر (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{٢}{٥}$

---

٤ فى Δ أ ب جـ إذا كان : ٤ جا أ = ٣ جا ب = ٦ جا جـ فإن : ق(∠جـ) = ...

(أ) °٨٩ (ب) °٢٩ (جـ) °٥٧ (د) °٨٢

---

٥ أ ب جـ مثلث فيه : ق(∠جـ) = °٩٦ َ٢٣ ، أ = ٧ سم ، ب = ٩ سم

أوجد : جـ ، مساحة Δ أ ب جـ لأقرب سم^{٢}

---

٦ إذا كانت : د (١) = ٣ ، ر (٣) = ٥ فإن : (ر ∘ د) (١) = ...

(أ) ٣ (ب) ٥ (جـ) ١٥ (د) $\frac{٣}{٥}$

٧ مجموعة حل المعادلة : $2^{2\text{س}} - 12 \times 2^{\text{س}} + 2^{5} =$ صفر في ح هي ....

(أ) {٢ ، ٣} (ب) {٢} (جـ) {٣} (د) {٤ ، ٨}

---

٨ استخدم منحنى الدالة د حيث د $(\text{س}) = \frac{1}{\text{س}}$ لتمثيل منحنى الدالة ر حيث ر $(\text{س}) =$ د $(\text{س} - 2) + 2$ ومن الرسم عيّن مداها وابحث اطرادها.

---

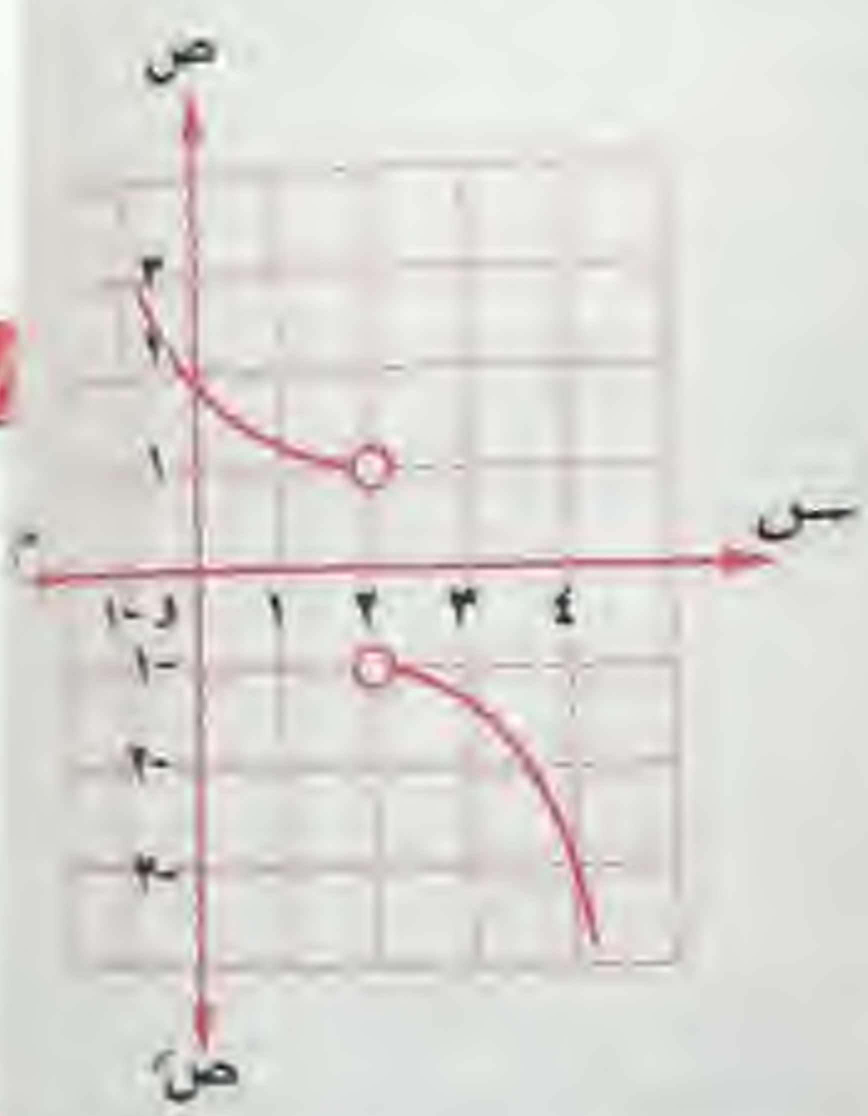
٩ $\lim_{\text{س} \to 0} \frac{(\text{س} + 2)^{5} - 32}{\text{س}} =$ ....

(أ) ٢٥ (ب) ٦٤ (جـ) ٨٠ (د) ١٠٠

---

١٠ الشكل المقابل يمثل منحنى

الدالة د فإن : $\lim_{\text{س} \to 2} |$ د $(\text{س})| =$ ....



(أ) ١

(ب) −١

(جـ) ٢

(د) غير موجودة.

---

١١ عدد الحلول الممكنة للمثلث ل م ن حيث : ق (∠ ل) = ٤٠°

، لَ = ١٢ سم ، مَ = ١٥ سم يساوى ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) صفر (د) عدد لا نهائي

---

١٢ مجموع جذرى المعادلة : $25^{\text{س}} - 12 \times 5^{\text{س}} + 27 = 0$ يساوى ....

(أ) لو$_5$ ١٢ (ب) ١٢ (جـ) لو$_5$ ٢٧ (د) ٢٧

---

١٣ إذا كان : س $= 5 + 2\sqrt{6}$ فإن : لو $\left(\text{س} + \frac{1}{\text{س}}\right) =$ ....

(أ) ١ (ب) $5 - 2\sqrt{6}$ (جـ) ١٠ (د) $5 + 2\sqrt{6}$

14 أ ب حـ مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه $5\sqrt{3}$ سم فإن طول قطر الدائرة المارة برؤوسه يساوى .... سم.

(أ) $5\sqrt{3}$ (ب) $10\sqrt{3}$ (جـ) 10 (د) 5

15 إذا كانت د (س) = 2 + $\sqrt{3 - س}$ فأوجد مجال ومدى د ثم أوجد $د^{-1}$ (س) وعين مجال $د^{-1}$ ومداها.

16 إذا كانت د : ح ← ح حيث د (س) = (أ + 1) س + ب − 2 وكانت د (س) تربط كل عدد حقيقى بنفسه فإن : (أ ، ب) = ...

(أ) (1 ، 3) (ب) (0 ، 3) (جـ) (0 ، 2) (د) (1 ، 2)

17 إذا كانت د (س) = $\frac{س^2 - 16}{س - 4}$ عند س ≠ 4 فإن : قيمة د (4) التى تجعل الدالة متصلة عند هذا الموضع تساوى ....

(أ) غير معرفة (ب) $\lim\limits_{س \to 4} \frac{س^2 - 16}{س - 4}$

(جـ) صفر (د) 16

18 مجموعة حل المعادلة : $لو_3 س \times لو_2 3 = 5$ فى ح هى ....

(أ) {32} (ب) {5} (جـ) {3} (د) {2}

19 إذا كان أ ب حـ مثلثاً فيه ق (∠ أ) : ق (∠ ب) : ق (∠ حـ) = 3 : 5 : 4

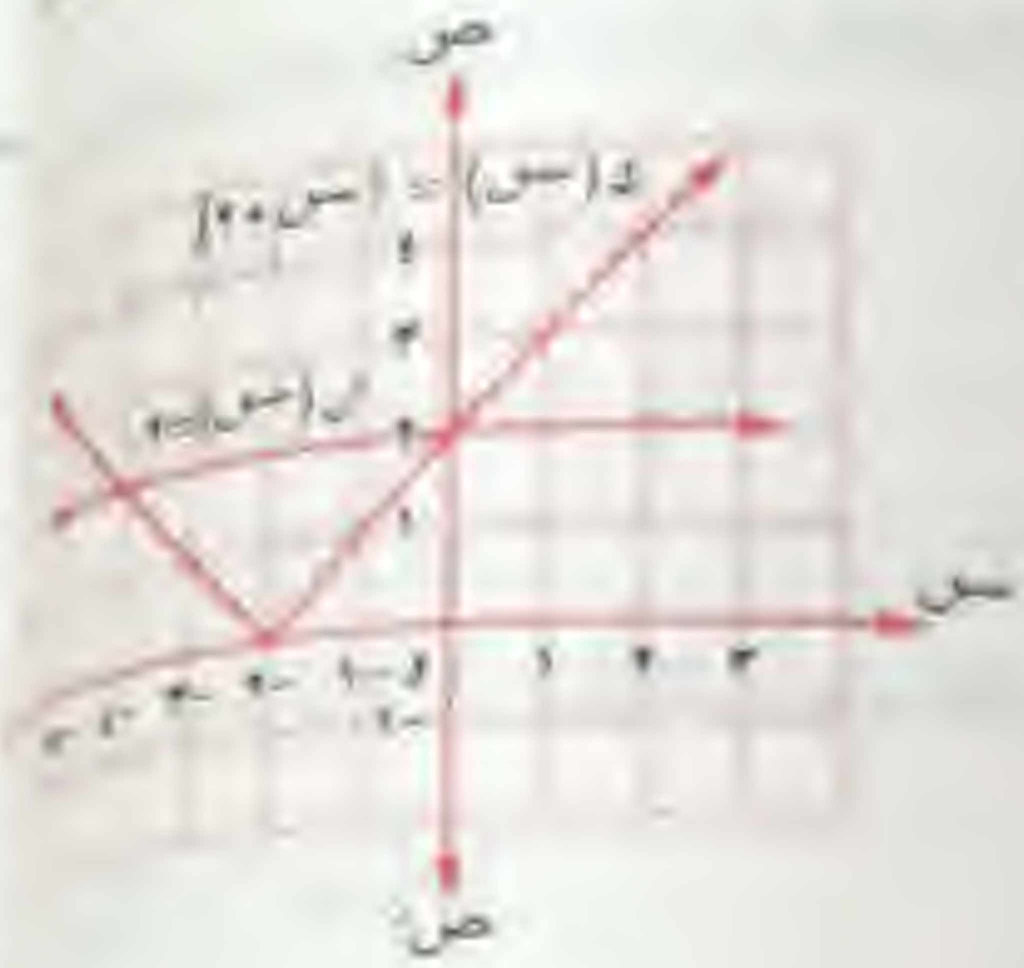
فإن $حـ^2 : أ^2$ = ...

(أ) $\sqrt{6}$: 2 (ب) 2 : 3 (جـ) 4 : 3 (د) 3 : 2

٢٠ في الشكل المقابل : مجموعة حل المتباينة

د (س) ≥ ر (س) في ح

هي ....



(أ) {−١ ، ٠}

(ب) [−٤ ، ٠]

(ج) ح − [−١ ، ٠]

(د)]−٤ ، ٠[

---

٢١ إذا كانت د دالة حيث :

$$د(س) = \begin{cases} س^{٢} - س + ٤ & \text{عندما } س < ٢ \\ ك & \text{عندما } س = ٢ \\ ٥ س - ٤ & \text{عندما } س > ٢ \end{cases}$$

① ابحث وجود $\lim_{س \to ٢}$ د (س)

② أوجد إن أمكن قيمة ك التي تجعل د متصلة عند س = ٢

---

٢٢ نوع الدالة د : د (س) = $\frac{جاس}{س}$ هي ....

(أ) زوجية. (ب) فردية. (ج) لا زوجية ولا فردية. (د) زوجية وفردية

---

٢٣ $\lim_{س \to ٠} \frac{جا \pi |س|}{٤ س}$ = ...

(أ) $\frac{\pi}{٤}$ (ب) ١ (ج) $\frac{١}{٤}$ (د) غير موجودة

---

٢٤ إذا كان : $س^{\frac{٣}{٢}} = ٨$ فإن : س = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ٩

---

٢٥ $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٣} - ٧ س + ٦}{٣ س^{٢} - ٨ س + ٤}$ = ...

(أ) $\frac{٥}{٤}$ (ب) $\frac{٤}{٥}$ (ج) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{٣}{٢}$

٢٦ إذا كانت : $\lim\limits_{س \to ١} \frac{٢ س + أ}{س + ١} = ٥$ فإن : أ = ...

(أ) ٢ (ب) ٥ (جـ) ٨ (د) ١٠

---

٢٧ في أي Δ س ص ع يكون : $س^٢ + ص^٢ - ٢$ س ص جتا ع = ...

(أ) $س^٢$ (ب) $ص^٢$ (جـ) $ع^٢$ (د) ع

---

٢٨ مجموعة الحل في ح للمتباينة : $\sqrt{٤ س^٢ - ١٢ س + ٩} \geq ٩$ تساوي ....

(أ)]−٣ ، ٦[(ب) [−٣ ، ٦] (جـ) ح − [−٣ ، ٦] (د) ح −]−٣ ، ٦[

---

٢٩ مجموعة حل المعادلة : | ٣ − ٢ س | − ٥ س = ٣ في ح هي ....

(أ) {٠ ، ٣} (ب) {٠ ، −٢} (جـ) {٠} (د) $\varnothing$

---

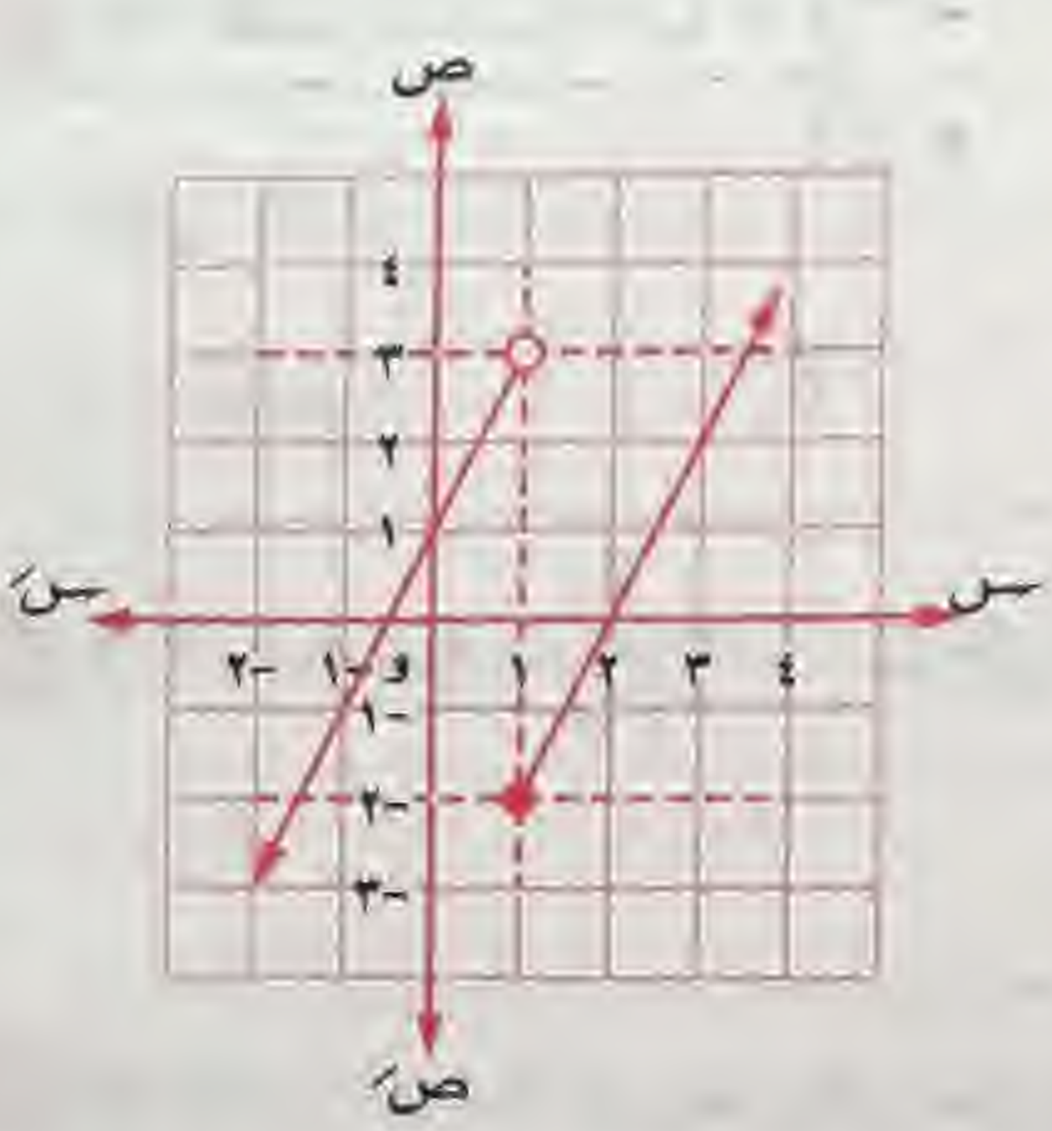
٣٠ إذا كانت : د (س − ١) = $٢^{س - ٥}$ ، د (س + ٣) = $\frac{١}{٣٢}$ فإن : س = ...

(أ) −٤ (ب) −٢ (جـ) ٤ (د) ٦

---

٣١ إذا كان الشكل المقابل

يمثل منحنى الدالة د فإن :



$\lim\limits_{س \to ٠}$ د (س) + د (١^+) + د (١^-) = ...

(أ) ٢

(ب) ٣

(جـ) ٤

(د) ٦

---

٣٢ Δ أ ب جـ محيطه ٣٣ سم ، وكان : جا أ + جا جـ = $\frac{٢}{٣}$ ، جا ب = $\frac{١}{٤}$

فإن : ب = ...

(أ) ٦ (ب) ٩ (جـ) ١٢ (د) ١٥

النمـــوذج الثانى

امتحان إلكترونى

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ إذا كانت د : ط ⟵ ط حيث د (س) = ٢ س ، ت : ط ⟵ ط حيث

ت (س) = { $\frac{\text{س}}{٢}$ ، س زوجى ؛ $\frac{\text{س} + ١}{٢}$ ، س فردى }

فإن : (د ∘ ت) (٣) − (د ∘ ت) (٨) = ...

(أ) ٤ (ب) ٨ (جـ) −٤ (د) −٥

---

٢ نهـــا (س ⟵ ∞) $\left(\frac{٣}{٥}\right)^{\frac{١}{\text{س}}}$ = ...

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) $\frac{٣}{٥}$ (د) ∞

---

٣ أ ب جـ مثلث فيه ء منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ أثبت أن : (أ ب)^٢ + (أ جـ)^٢ = ٢ (أ ء)^٢ + ٢ (ب ء)^٢

وإذا كان : أ ب = ٥ سم ، أ جـ = ٨ سم ، ب جـ = ١٢ سم أوجد : أ ء

---

٤ إذا كانت د : د (س) = { $\frac{\text{س}^٢ - ١}{\text{س} - ١}$ ، س ≠ ١ ؛ ٢ أ ، س = ١ } متصلة عند س = ١

فإن : أ = ...

(أ) صفر (ب) −٢ (جـ) ٢ (د) ١

---

٥ Δ أ ب جـ فيه : $\frac{\text{أ}}{\text{جا أ}}$ = ٦ سم فإن طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه = ... سم

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٥ (د) ٦

---

٦ إذا كانت : د دالة فردية وكان س د (س) + س^٢ د (−س) = ٢

فإن : د (٢) = ...

(أ) ٢ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{-١}{٢}$ (د) −٣

---

٧ إذا كان : س = ٥ + ٢ $\sqrt{٦}$ أوجد فى أبسط صورة قيمة : لو ($\frac{١}{\text{س}}$ + س) بدون الحاسبة

٨ في Δ س ص ع يكون : $\frac{\text{س}^2 + \text{ص}^2 - \text{ع}^2}{٢\,\text{س}\,\text{ص}}$ = ...

(أ) جتا س (ب) جتا ص (ج) جتا ع (د) جا ع

٩ $\lim_{\text{س} \to ١} \frac{\text{س}^2 - \text{س}^{-2}}{\text{س} - \text{س}^{-1}}$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (ج) ٢ (د) −٢

١٠ إذا كانت : د (س) = $٣^{\text{س}}$ فإن مجموعة الحل في ح للمعادلة :

د (٢ س) − ٢٨ د (س) + د (٣) = صفر هي ......

(أ) {١ ، ٢٧} (ب) {٢٧} (ج) {٠ ، ٣} (د) {٣}

١١ إذا كان : لو أ ∈]٠ ، ١[فإن : أ ∈ ......

(أ)]٠ ، ١[(ب)]١ ، ٢[(ج)]١ ، ١٠[(د)]١ ، ∞[

١٢ منحنى الدالة الزوجية يكون متماثلاً حول المستقيم ......

(أ) ص = س (ب) $\overleftrightarrow{\text{ص ص}'}$ (ج) $\overleftrightarrow{\text{س س}'}$ (د) ص = − س

١٣ Δ ل م ن فيه : $\frac{\text{جا ل}}{٣} = \frac{٢\,\text{جا م}}{٣} = \frac{\text{جا ن}}{٤}$ فإن : لَ : مَ : نَ = ...

(أ) ٦ : ٨ : ٣ (ب) ٣ : ٦ : ٨ (ج) ٨ : ٣ : ٦ (د) ٦ : ٣ : ٨

١٤ أ ب جـ مثلث فيه : جـَ = ٧ سم ، ق (∠أ) = ٧٠° ، ق (∠ب) = ٤٠°

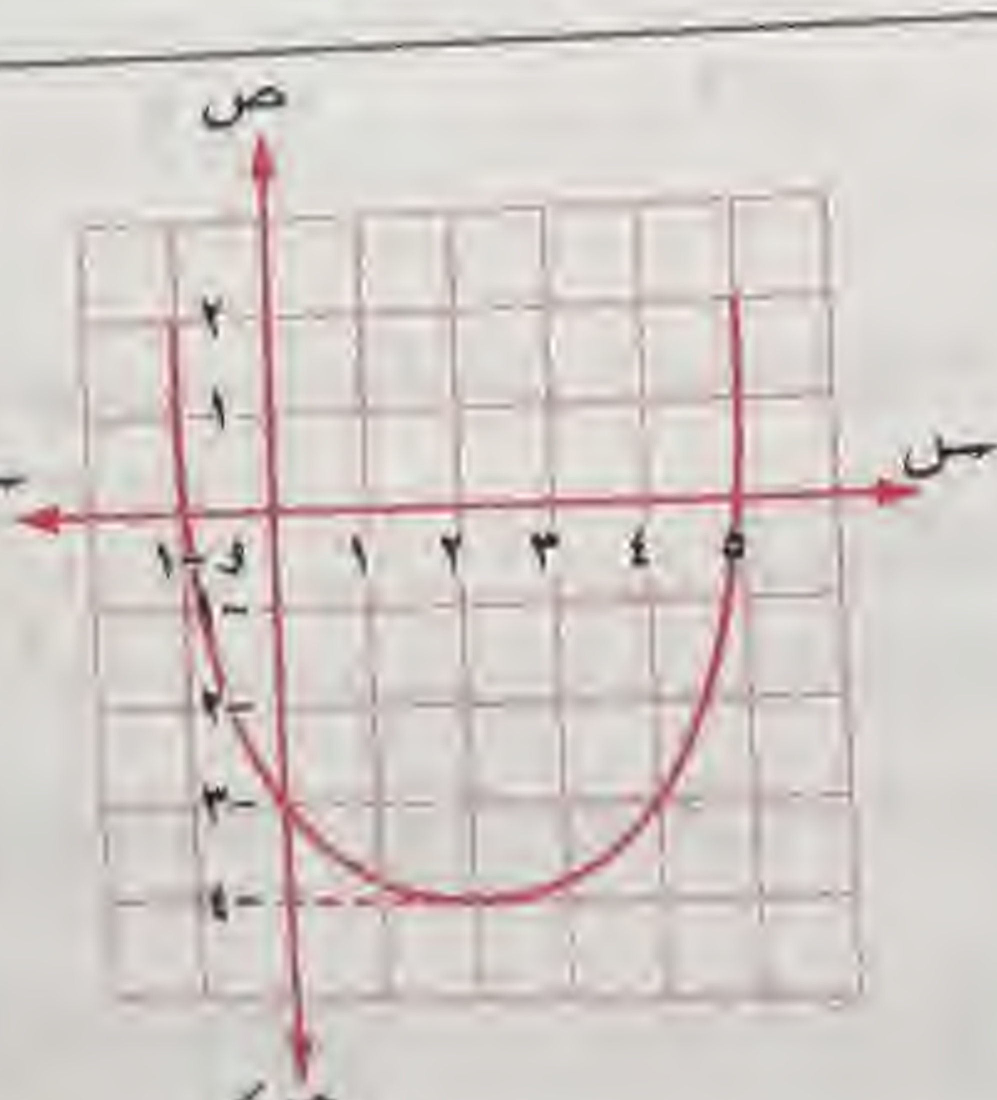
فإن : بَ = ... سم

(أ) ٦,٣ (ب) ٨,٤ (جـ) ٣,٦ (د) ٤,٨

١٥ إذا كان الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د فإن :

$\lim_{\text{س} \to ٢} \frac{[\text{د (س)}]^2 + \text{د (س)} - ١٢}{\text{د (س)} + ٤}$ = ...

(أ) −٧ (ب) −٤ (جـ) −١ (د) ٣



١٦ استخدم منحنى الدالة د : د (س) = $\frac{١}{س}$ لرسم منحنى الدالة ر : ر (س) = $\frac{١}{س - ٢}$ + ٣ ومن الرسم عين مجال ومدى ر واطرادها ونوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك ، هل الدالة ر أحادية أم لا ؟

---

١٧ مدى الدالة د : د (س) = $\frac{س - ٢}{٢ - س}$ يساوى ....

(أ) ح　(ب) ح − {٢}　(جـ) ح − {−٢}　(د) {−١}

---

١٨ إذا كان : ص = $أ^{لو_{أ} س}$ فإن : ....

(أ) س + ص = ٠　(ب) س = ٢ ص

(جـ) س − ص = ٠　(د) س = $\frac{١}{٢}$ ص

---

١٩ $لو_{٣}$ ٥ × $لو_{٢}$ ٣ × $لو_{٥}$ ١٦ = ...

(أ) ٣٠　(ب) ١٥　(جـ) لو ١٠٠٠٠　(د) $لو_{٢٠}$ ٢٤٠

---

٢٠ المنحنى ر (س) = $س^{٢}$ + ٤ هو نفس المنحنى د (س) = $س^{٢}$ بإزاحة مقدارها ٤ وحدات فى اتجاه ....

(أ) $\overleftarrow{وس}$　(ب) $\overrightarrow{وس}$　(جـ) $\overleftarrow{وص}$　(د) $\overrightarrow{وص}$

---

٢١ ابحث وجود نهاية د (س) = $\begin{cases} س^{٢} + ١ & \text{لكل } س < ٣ \\ ٣ س + ١ & \text{لكل } س \geq ٣ \end{cases}$ عند س = ٣

---

٢٢ الدالة د حيث د (س) = $أ^{س}$ تكون تناقصية على مجالها إذا كان ....

(أ) أ = ١　(ب) أ > ١　(جـ) ٠ < أ < ١　(د) أ = −١

---

٢٣ $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}}$ (٢ س + جا س) = ...

(أ) π　(ب) π − ١　(جـ) ١ − π　(د) π + ١

---

٢٤ $\lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt{س^{٢}}}{س}$ = ...

(أ) صفر　(ب) ٢　(جـ) −١　(د) ١

٢٥ مجموعة الحل في ح للمعادلة: $|$س $-$ ٧$|$ $=$ ٢ س $-$ ٢ تساوي ....

(أ) $\{$٣ ، $-$٥$\}$ (ب) $\{$٣$\}$ (جـ) $\{-$٥$\}$ (د) $\emptyset$

٢٦ إذا كانت: ص $=$ $\sqrt[٤]{\text{س}}$ لكل س $\geq$ ٠ فإن الدالة العكسية لها هي ص $=$ ....

(أ) $\frac{١}{٢}$ س^{٢} (ب) س^{٢} (جـ) س^{٤} $-$ ١ (د) س$^{\frac{١}{٤}}$

٢٧ إذا كان محيط Δ أ ب جـ $=$ ٣٣ سم وكان جا أ $+$ جا جـ $=$ $\frac{٢}{٣}$ ، جا ب $=$ $\frac{١}{٤}$

فإن: أ جـ $=$ .... سم

(أ) ٦ (ب) ٩ (جـ) ١٢ (د) ١٥

٢٨ $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـــا}}$ $\frac{\text{جا ٢ س} + \text{٥ ظا ٣ س}}{\text{س}}$ $=$ ....

(أ) ٢ (ب) ١٥ (جـ) ٢١ (د) ١٧

٢٩ مجموعة حل المتباينة: $\sqrt{\text{س}^{٢} - \text{٤ س} + ٤} > ٠$ في ح هي ....

(أ) ح $-$ $\{$٢$\}$ (ب) ح $-$ $\{-$٢$\}$ (جـ) ح (د) $\emptyset$

٣٠ إذا كانت د(س) دالة وكانت: $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـــا}}$ $\frac{\text{د(س)} - ٨}{\text{س} - ٢}$ $=$ ٧

فإن: $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـــا}}$ $\frac{\text{٢ س}^{٢} - \text{د(س)}}{\text{س} - ٢}$ $=$ ....

(أ) ١ (ب) ٧ (جـ) ٨ (د) ١٥

٣١ عدد الحلول الممكنة للمثلث أ ب جـ حيث: ق($\angle$أ) $=$ ١١٠° ، أ $=$ ٧ سم

، ب $=$ ٤ سم هو ....

(أ) ١ (ب) صفر (جـ) عدد لا نهائي. (د) ٢

٣٢ مجموعة حل المعادلة: لو (س $+$ ٢) $+$ لو (س $-$ ٢) $=$ ١ $-$ لو ٢ في ح هي ....

(أ) $\{$لو$_{٥}$ ١٢٥$\}$ (ب) $\{$لو$_{٢}$ ١٦$\}$ (جـ) $\{$لو$_{٣}$ ٩$\}$ (د) $\{$لو$_{١٠}$ ١٠٠$\}$

(د) ليس لها وجود.

(د) ١٥

(د) ١

(أ) غير موجودة.

١٣ المساحة المحصو...

(أ) ٢

١٤ إذا كان : لو...

(أ) ص = $س^٢$

١٥ إذا كانت : د دا...

(أ) ٢ س

١٦ في Δ أ ب حـ

(أ) ٢ ، ٣ ، ٤

١٧ نهـا

(أ) ٨٠

النمــوذج الثالث

امتحان إلكتروني ٣

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ إذا كانت : د (س) = $٧^{س+١٠}$

أوجد قيمة س التى تحقق : د (٢ س – ١) + د (س – ٢) = ٥٠

---

٢ إذا كان : لو ٣ = س ، لو ٥ = ص فإن : لو ١٥ = ...

(أ) س ص (ب) $\frac{س}{ص}$ (جـ) س + ص (د) س – ص

---

٣ $\underset{س \to \infty}{نهــا} \frac{٥ + س^{-٢}}{١ + ٣ س^{-٢}}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{٥}{٤}$ (جـ) $\frac{٥}{٣}$ (د) ٥

---

٤ إذا كان : $٩^{س} = ٢$ ، $٢٧^{ص} = ٤$ فإن : $\frac{س – ص}{س + ص}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٧}$ (ب) $\frac{-١}{٧}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{-٤}{٣}$

---

٥ إذا كانت : د (س) = $لو_{أ}$ (٢ س + ٤) ، $د^{-١}$ (٥) = ١٤ فإن : أ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

---

٦ $\underset{س \to ١٦}{نهــا} \frac{\sqrt[٤]{س} – ١}{س – ١٦}$ = ...

(أ) صفر (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) ١ (د) ليس لها وجود.

---

٧ $\underset{س \to ٠}{نهــا} \frac{س (ظا س + ظا ٣ س + ظا ٥ س)}{جا س}$ = ...

(أ) ١ (ب) ٣ (جـ) ٩ (د) ١٥

---

٨ لو ٢٥ + $\frac{لو ٨ \times لو ١٦}{لو ٦٤}$ = ...

(أ) ٢ (ب) لو ٢ (جـ) ٣ (د) ١

٩ ﻫ ب حـ ء متوازى أضلاع فيه : ق (د ﻫ) = ٥٠° ، ق (د ء ب حـ) = ٧٠°

، ب ء = ٨ سم أوجد محيط متوازى الأضلاع لأقرب سم.

---

١٠ $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}} \frac{\text{س} - ٢}{\text{س} + ١}$ = ...

(أ) صفر　　(ب) ١　　(جـ) ٢　　(د) ∞

---

١١ $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـــا}} \frac{١ - \text{قا س}}{\text{حتا س} - ١}$ = ...

(أ) ٢　　(ب) ١　　(جـ) صفر　　(د) -١

---

١٢ $\underset{\text{س} \leftarrow ٥}{\text{نهـــا}} \frac{\text{س}^٢ - ٨\,\text{س} + ١٥}{\text{س}^٢ - ١٠\,\text{س} + ٢٥}$ = ...

(أ) غير موجودة.　　(ب) صفر　　(جـ) ٢　　(د) ٣

---

١٣ المساحة المحصورة بين منحنيى الدالتين د : د (س) = | س + ٣ | - ٢

ر : ر (س) = صفر هى .... وحدة مربعة.

(أ) ٢　　(ب) ٣　　(جـ) ٤　　(د) ٥

---

١٤ إذا كان : لو$_٣$ ص = س فإن الصورة الأسية هى ....

(أ) ص = س^٣　　(ب) س = ص^٣　　(جـ) س = ٣$^\text{ص}$　　(د) ص = ٣$^\text{س}$

---

١٥ إذا كانت : د دالة فردية على [- س ، س] فإن : د (- س) + د (س) = ...

(أ) ٢ س　　(ب) غير معرفة.　　(جـ) -٢ س　　(د) صفر

---

١٦ فى Δ ﻫ ب حـ إذا كان : ٢ حا ﻫ = ٣ حا ب = ٤ حا حـ فإن : ﻫ : ب : حـ = ...

(أ) ٢ : ٣ : ٤　　(ب) ٤ : ٣ : ٢　　(جـ) ٣ : ٤ : ٦　　(د) ٦ : ٤ : ٣

---

١٧ $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}} \frac{\text{س}^٥ - ٣٢}{\text{س}^٢ + ٣\,\text{س} - ١٠}$ = ...

(أ) ٨٠　　(ب) $\frac{٨٠}{٧}$　　(جـ) $\frac{١٦}{٧}$　　(د) ١٦

١٨ طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب حـ الذى فيه ق (∠ أ) = ٣٠° ، ب حـ = ١٠ سم يساوى ....

(أ) ١٠ سم (ب) ٢٠ سم (جـ) ٥ سم

١٩ الدالة د : د (س) = $\begin{cases} س^2 & ، س < ٢ \\ -س^2 & ، س \geq ٢ \end{cases}$

متناقصة فى الفترة ....

(أ)]٠ ، ٢[(ب)]-∞ ، ٠] (جـ) ح - [٠ ، ٢]

٢٠ مجال الدالة د : د (س) = لو$_{١ - س}$ س هو ....

(أ) س > ٠ (ب) س < ١ (جـ) ٠ < س < ١

٢١ إذا كانت : د (س) = $\sqrt{س - ٢}$ ، ر (س) = $\sqrt{٥ - س}$

فإن مجال (د ∘ ر) = ...

(أ)]-∞ ، ٥] (ب)]-∞ ، ١] (جـ) [١ ، ∞[

٢٢ ارسم الشكل البيانى للدالة د : د (س) = $\begin{cases} |س| & ، س \leq ٠ \\ س^2 & ، س > ٠ \end{cases}$

ومن الرسم حدد مدى الدالة وابحث اطرادها.

٢٣ مجموعة حل المعادلة : | س + ٢ | + س = -٢ فى ح هى ....

(أ) ∅ (ب) ح (جـ)]-∞ ، -٢]

٢٤ قياس أكبر زاوية فى المثلث الذى أطوال أضلاعه ٣ سم ، ٥ سم ، ٧ سم يساوى ....

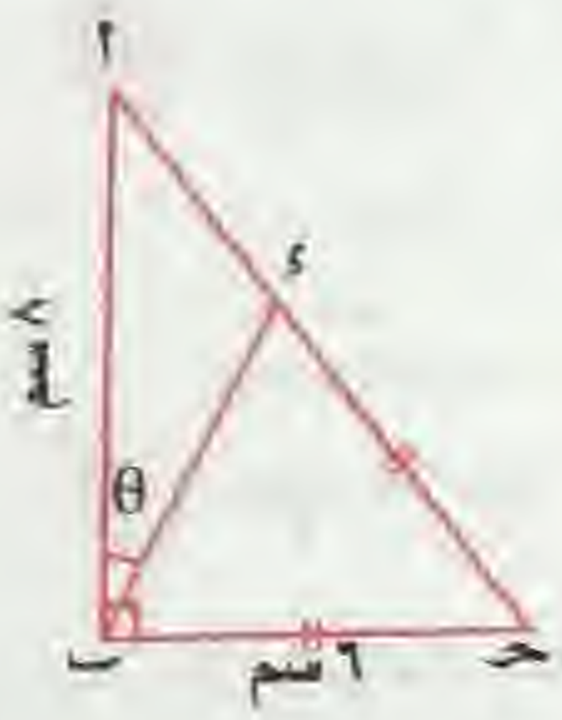
(أ) ١٥٠° (ب) ١٢٠° (جـ) ٦٠°

٢٥ أ ب جـ مثلث حاد الزوايا فيه : أَ = ٥ سم ، بَ = ٧ سم ، ق(∠أ) = ٤٠°

فإن مساحة سطح Δ أ ب جـ تساوى .... سم²

(أ) ١٦ (ب) ١٧ (جـ) ١٨ (د) ٧

٢٦ فى الشكل المقابل :



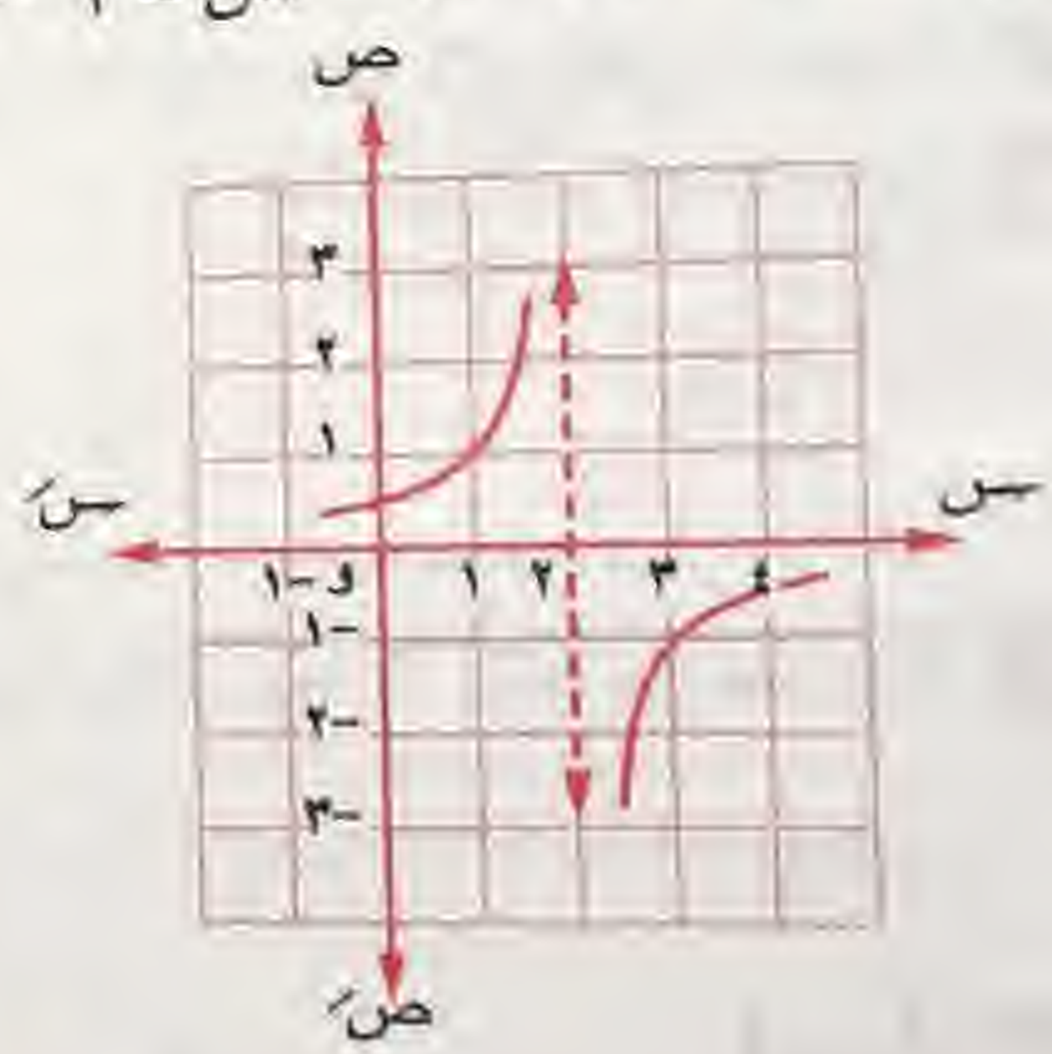
إذا كان : جـ ء = جـ ب = ٦ سم

فإن : طا θ = ...

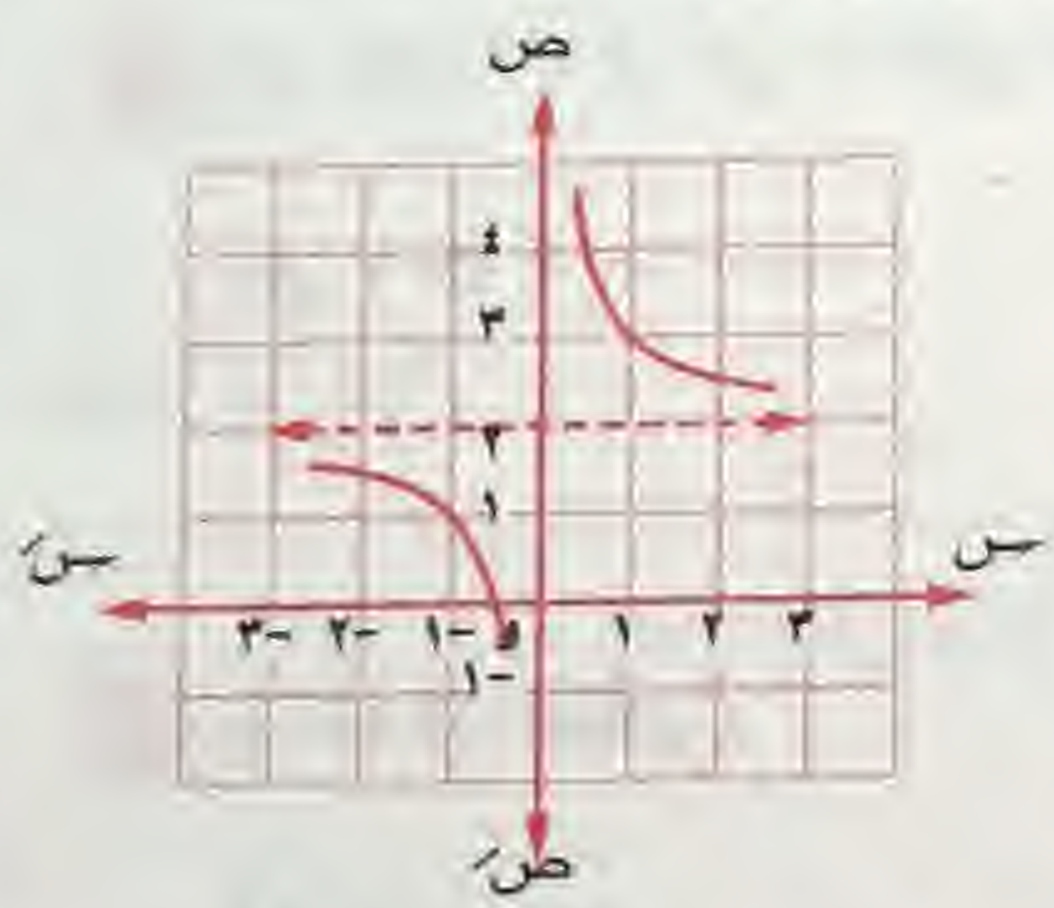
(أ) $\frac{٣}{٤}$ (ب) $\frac{٤}{٣}$

(جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) ٢

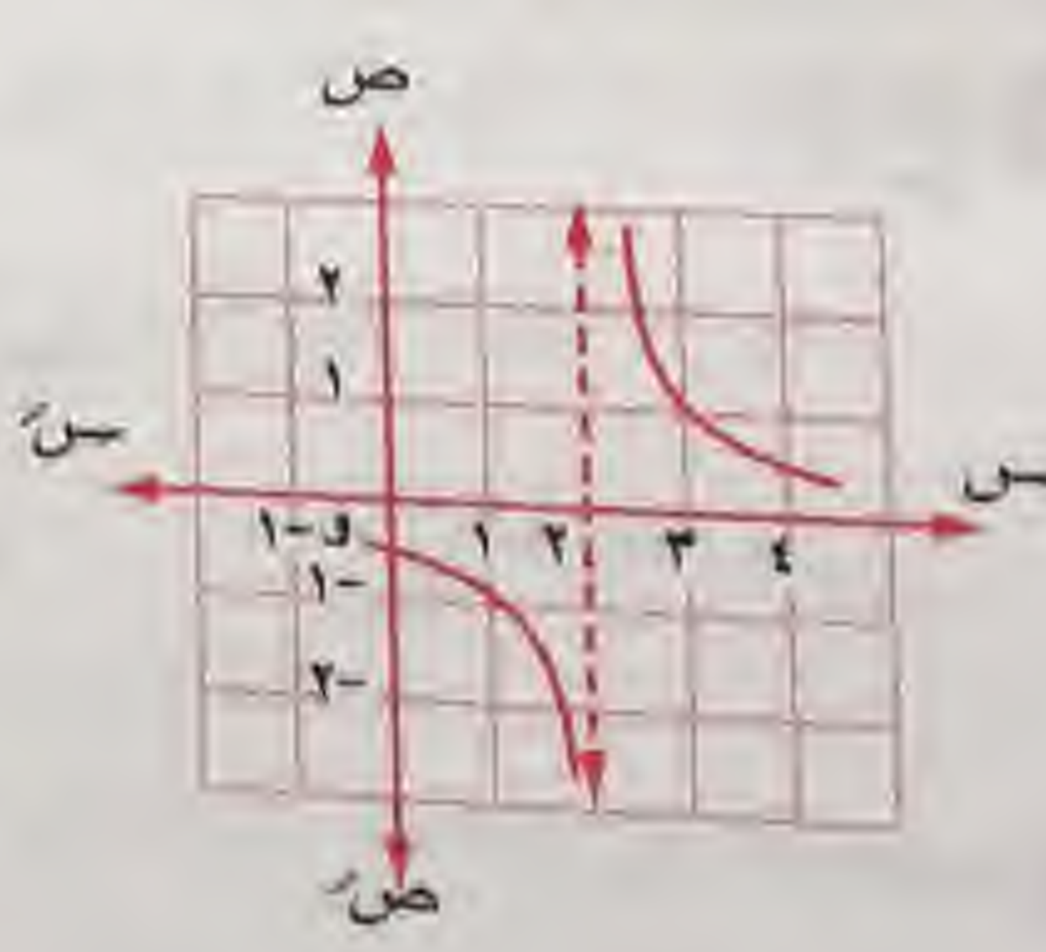
٢٧ إذا كانت : د (س) = $\frac{١}{س - ٢}$ فإن الشكل الذى يمثل الدالة د هو ....



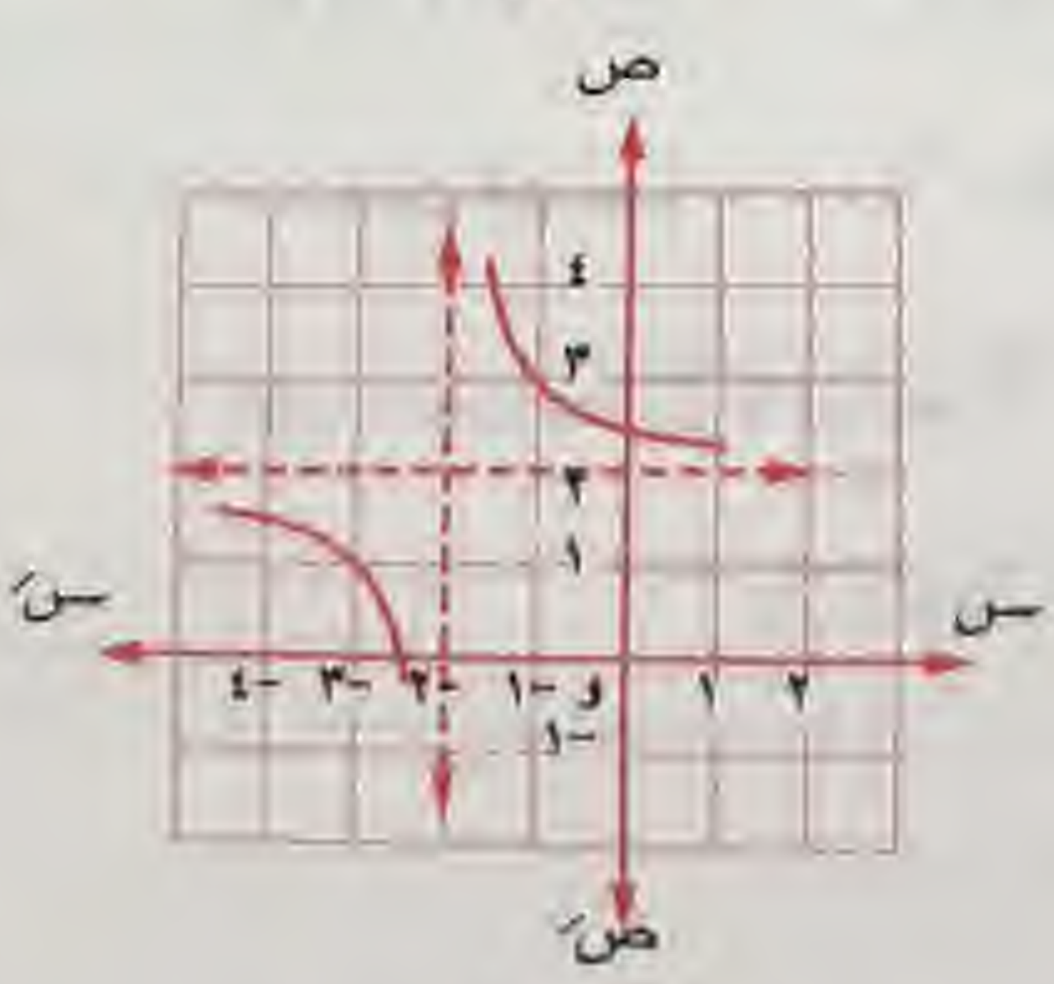
(أ)



(ب)



(جـ)



(د)

٢٨ إذا كانت د : د (س) = $\begin{cases} \dfrac{(س + ٣)^{٥} - ٢٤٣}{س} & ، \quad س \neq صفر \\ ك & ، \quad س = صفر \end{cases}$

متصلة عند س = صفر **أوجد : قيمة ك**

---

٢٩ $\underset{س \to \infty}{نهـا} \dfrac{\sqrt{٩س^{٢} + ٤ + ٥س}}{٤س + ٣} = $ ....

(أ) ∞ (ب) ٥ (جـ) ٣ (د) ٢

---

٣٠ مجموعة حل المتباينة : |٢س − ٦| + |٣ − س| < ١٢ هى ......

(أ)]−١ ، ٧[(ب) ح − [−٣ ، ٩]

(جـ) ح − [−١ ، ٧] (د)]−٣ ، ٩[

---

٣١ إذا كان : ٢ لو ص + ٤ لو س − ٣ لو س ص = ٢ (١ − لو ٢) وكان ...

فإن : ك = ...

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ١٦ (د) ...

---

٣٢ في الشكل المقابل :

$\overline{أء} // \overline{بح}$

ق (∠ أحب) = ٣٠° ، بح = ٢٠ سم

، ق (∠ أءح) = ١٠٠° ، أء = ١٢ سم

فإن : مساحة Δ أبح = ... سم² تقريبًا.

(أ) ٦٠ (ب) ٧٧ (جـ) ١٠٤ (د) ...

النمـوذج الرابع

امتحان إلكترونى ٤

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}}$ ٥ س ظتا ٢ س = ...

(أ) $\frac{٥}{٢}$ (ب) ١٠ (جـ) $\frac{٢}{٥}$ (د) صفر

٢ فى Δ أ ب جـ : $\frac{ب^{٢} + جـ^{٢} - أ^{٢}}{٢ ب جـ}$ = ...

(أ) جتا أ (ب) جتا ب (جـ) جتا جـ (د) جا أ

٣ مجموعة الحل فى ح للمتباينة : |س − ١| ≤ ٣ يساوى ....

(أ) [−٢ ، ٤] (ب)]−٢ ، ٤[(جـ) ح −]−٢ ، ٤[(د) ح − [−٢ ، ٤]

٤ $\underset{س \to -١}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢} + س}{س^{٣} + ١}$ = ...

(أ) صفر (ب) $-\frac{١}{٣}$ (جـ) −١ (د) ليس لها وجود.

٥ طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس Δ س ص ع الذى فيه : سَ = ٢٠ جا س سم

يساوى .... سم.

(أ) ٥ (ب) ١٠ (جـ) ٢٠ (د) ٤٠

٦ إذا كان : $٢^{س} = ٣^{ص} = ٦$ فأى مما يأتى صحيح ؟

(أ) ص − س = س ص (ب) س − ص = س ص

(جـ) س ص = $\frac{س}{ص}$ (د) س + ص = س ص

٧ مجموعة حل المعادلة : لو ٥ س = −١ فى ح هى ....

(أ) $\{\frac{١}{١٠}\}$ (ب) $\{\frac{١}{٥٠}\}$ (جـ) {١} (د) {٥٠}

٢٨ إذا كانت د : د(س) = $\begin{cases} \dfrac{(س + ٣)^{٥} - ٢٤٣}{س} & ، س \neq صفر \\ ك & ، س = صفر \end{cases}$

متصلة عند س = صفر **أوجد : قيمة ك**

---

٢٩ $\lim\limits_{س \to \infty} \dfrac{\sqrt{٩س^{٢} + ٤} + ٥س}{٤س + ٣}$ = ...

(أ) ∞ (ب) ٥ (جـ) ٣ (د) ٢

---

٣٠ مجموعة حل المتباينة : |٢س − ٦| + |٣ − س| < ١٢ هى ....

(أ)]−١ ، ٧[(ب) ح − [−٣ ، ٩]

(جـ) ح − [−١ ، ٧] (د)]−٣ ، ٩[

---

٣١ إذا كان : ٢ لو ص + ٤ لو س − ٣ لو س ص = ٢ (١ − لو ٢) وكان : س

فإن : ك = ...

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ١٦ (د) ٢٥

---

٣٢ فى الشكل المقابل :

$\overline{أء} \parallel \overline{بحـ}$

ق(∠أحـب) = ٣٠° ، بحـ = ٢٠ سم

، ق(∠ءأحـ) = ١٠٠° ، أء = ١٢ سم

فإن : مساحة Δ أبحـ = ... سم² تقريباً.

(أ) ٦٠ (ب) ٧٧ (جـ) ١٠٤ (د) ١٢٠

النمـــوذج الرابع

امتحان الكترونى ٤

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ $\underset{س \leftarrow ٠}{نهــــا}$ ٥ س قتا ٢ س = ...

(أ) $\frac{٥}{٢}$ (ب) ١٠ (جـ) $\frac{٢}{٥}$ (د) صفر

٢ فى Δ أ ب جـ : $\frac{ب^٢ + جـ^٢ - أ^٢}{٢ ب جـ}$ = ...

(أ) جتا أ (ب) جتا ب (جـ) جتا جـ (د) جا أ

٣ مجموعة الحل فى ح للمتباينة : | س - ١ | ≤ ٣ يساوى ....

(أ) [-٢ ، ٤] (ب)]-٢ ، ٤[(جـ) ح -]-٢ ، ٤[(د) ح - [-٢ ، ٤]

٤ $\underset{س \leftarrow -١}{نهــــا}$ $\frac{س^٢ + س}{س^٣ + ١}$ = ...

(أ) صفر (ب) $-\frac{١}{٣}$ (جـ) -١ (د) ليس لها وجود.

٥ طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس Δ س ص ع الذى فيه : سَ = ٢٠ جا س سم يساوى .... سم.

(أ) ٥ (ب) ١٠ (جـ) ٢٠ (د) ٤٠

٦ إذا كان : $٢^{س} = ٣^{ص} = ٦$ فأى مما يأتى صحيح ؟

(أ) ص - س = س ص (ب) س - ص = س ص

(جـ) س ص = $\frac{س}{ص}$ (د) س + ص = س ص

٧ مجموعة حل المعادلة : لو ٥ س = -١ فى ح هى ....

(أ) $\{\frac{١}{١٠}\}$ (ب) $\{\frac{١}{٥٠}\}$ (جـ) {١} (د) {٥٠}

٨ أوجد قياس أصغر زاوية في Δ أ ب حـ الذي فيه : أ = ٨ سم ، ب = ٧ سم ، ومحيطه ٢١ سم.

---

٩ إذا كانت كل من د ، ر حيث د (س) = ٢ س + أ ، ر (س) = ب س + ٢ دالة عكسية للأخرى فما قيمة كل من أ ، ب ؟

---

١٠ $\underset{هـ \to \cdot}{\text{نهـــا}} \dfrac{(٢ - ٣ هـ)^{٧} - ١٢٨}{هـ} = \dots\dots$

(أ) -٣٣٦ (ب) ٣٣٦ (جـ) ١٩٢ (د) -١٩٢

---

١١ إذا كان منحنى الدالة د : د (س) = لو$_{٢}$ (١ - أ س) يمر بالنقطة $\left(\frac{١}{٨} ، \frac{١}{٢}\right)$

فإن : أ =

(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) ٨

---

١٢ | د (س) | =

(أ) $\begin{cases} \text{د (س)} & \text{، س} \geq ٠ \\ -\text{د (س)} & \text{، س} < ٠ \end{cases}$ (ب) $\begin{cases} \text{د (س)} & \text{، س} > ٠ \\ -\text{د (س)} & \text{، س} \leq ٠ \end{cases}$

(جـ) $\begin{cases} \text{د (س)} & \text{، د (س)} \geq ٠ \\ -\text{د (س)} & \text{، د (س)} < ٠ \end{cases}$ (د) $\begin{cases} \text{د (س)} & \text{، د (س)} > ٠ \\ -\text{د (س)} & \text{، د (س)} \leq ٠ \end{cases}$

---

١٣ إذا كانت الدالة د : د (س) = $\begin{cases} \text{أ س - ٣} & \text{عندما س} < -١ \\ \text{٣ س - ٢} & \text{عندما س} > -١ \end{cases}$

لها نهاية عند س = -١ **أوجد : قيمة أ**

---

١٤ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـــا}}$ لو$_{٥}$ $\frac{١}{س}$ = ...

(أ) ٥ (ب) ١ (جـ) $\frac{١}{٥}$ (د) صفر

---

١٥ جميع العلاقات الآتية تكون فيها ص دالة في س ما عدا العلاقة ....

(أ) ص = ٢ س + ١ (ب) ص = س^{٢} - ٤

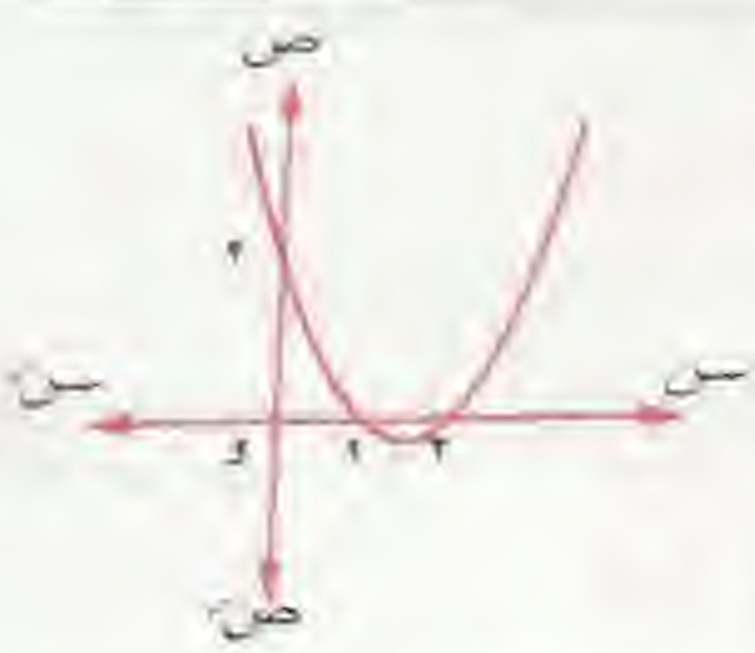
(جـ) س = ص^{٢} - ٢ (د) ص = جا س

١٦ ارسم الشكل البيانى للدالة د ، د (س) = $\begin{cases} -س^{2} & ، س < ٠ \\ س & ، س \geq ٠ \end{cases}$

ومن الرسم أوجد مدى الدالة ونوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك موضحًا اطرادها .

---

١٧ إذا كان الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د



فإن : $\lim_{س \to \infty} \frac{د(س)}{د(س) + ٢} =$ ....

(أ) صفر　　(ب) ١

(جـ) $\frac{١}{٢}$　　(د) ٢

---

١٨ فى الشكل المقابل :

إذا كان : ب حـ = ١٠ سم

فإن محيط Δ ب ء حـ ≃ .... سم.

(أ) ٦٠　　(ب) ٦٢

(جـ) ٦٤　　(د) ٦٧

---

١٩ إذا كانت : د (س) = $٢^{س}$ فإن قيمة س التى تحقق المعادلة :

د (س + ١) − د (س − ١) = ٢٤ تساوى ....

(أ) ١٦　　(ب) ٤　　(جـ) ٨　　(د) ٢

---

٢٠ إذا كانت : $٣^{س - ٢} = ٢^{س - ٢}$ فإن : س = ...

(أ) ٣　　(ب) −٢　　(جـ) صفر　　(د) ٢

---

٢١ مجال الدالة د : د (س) = $\frac{١}{|س| - ٣}$ هو ....

(أ) {٣ ، −٣}　　(ب) [−٣ ، ٣]

(جـ) ح − [−٣ ، ٣]　　(د) ح − {−٣ ، ٣}

٢٢ نقطة رأس منحنى الدالة د : د $(س) = (٢ - س)^{٢} + ٣$ هى ....

(أ) (٢ ، ٣) (ب) (٢ ، −٣) (جـ) (−٢ ، ٣) (د) (−٢ ، ...)

٢٣ أ ب جـ مثلث فيه ق(∠أ) : ق(∠ب) : ق(∠جـ) = ٣ : ٤ : ٣ فإذا كان: أ ...

فإن محيط الدائرة المارة برؤوس Δ أ ب جـ يساوى تقريبًا .... سم

(أ) ١٧ (ب) ١٨ (جـ) ١٩ (د) ١٥

٢٤ $\lim_{س \to ٠} \frac{٣^{٢س} - ١}{٣^{س+٢} - ٩} =$ ....

(أ) $\frac{١}{٩}$ (ب) $\frac{٢}{٩}$ (جـ) $\frac{٩}{٢}$ (د) $\frac{١}{٦}$

٢٥ المنحنى الموضح بالشكل المقابل

متماثل حول المستقيم الذى

معادلته ....

(أ) س = صفر (ب) ص = صفر

(جـ) ص = −٢ (د) س = ٢

٢٦ إذا كانت : ∠أ تكمل ∠جـ فإن : جتا أ + جتا جـ = ...

(أ) ١ (ب) صفر (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) −١

٢٧ إذا كانت الدالة د : $د(س) = \begin{cases} جا ٩س \; ظتا س &، \; س \in \left]-\frac{\pi}{٢} ، \frac{\pi}{٢}\right[- \{٠\} \\ ك^{٢} &، \; س = ٠ \end{cases}$

متصلة عند س = ٠ فإن : ك = ...

(أ) ٣ (ب) ± ٣ (جـ) ٩ (د) $\pm \frac{١}{٣}$

٢٨ لو (جتا θ) + لو (قا θ) = ... حيث $θ \in \left]٠ ، \frac{\pi}{٢}\right[$

(أ) ١ (ب) صفر (جـ) ٢ (د) −١

٢٩ إذا كان : د (س) = | س − ٢ | + ٤ فإن مجموعة حل المعادلة د (س + ٢) = ٦ هي ....

(أ) {٠ ، ٤} (ب) {٢ ، −٢} (جـ) {٢ ، ٤} (د) {−٢ ، −٤}

٣٠ $\lim_{س \to ٠}$ $\frac{٢ س جتا ٨ س + ٢ جا ٥ س}{ظا ٢ س}$ = ...

(أ) ١٣ (ب) ١٠ (جـ) ٩ (د) ٦

٣١ إذا كانت الدالة د : د (س) دالة أحادية ، وكان : د (٢ ك + ٣) = د (ك − ١)

فإن : ك = ...

(أ) −١ (ب) −٢ (جـ) −٣ (د) −٤

٣٢ أ ب حـ مثلث فيه : ب حـ = ١٤ سم ، ق(∠ب) = ٦٠° ومساحة المثلث تساوى ٤٢ $\sqrt{٣}$ سم

فإن : أ ب = ... سم

(أ) ١٤ (ب) ١٢ (جـ) ٧ (د) ٦

النمـــوذج الخامس

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ $\underset{س \to ١}{\text{نهــا}} \frac{س^{\frac{١}{٢}٦} - س^{\frac{١}{٢}}}{س^{\frac{١}{٢}٢} - س^{\frac{١}{٢}}} =$ ....

(أ) $\frac{١٢}{٧}$ (ب) ١ (جـ) ٢ (د) س

---

٢ إذا كان : $٥^{س + ١} = ٧^{س + ١}$ فإن : $٣^{س + ١} =$ ....

(أ) صفر (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) ١

---

٣ إذا كان : س < ١ فإن : | ٣ − س | − | س − ٤ | = ...

(أ) −١ (ب) ١ (جـ) ٢ س − ٧ (د) ٧ − ٢ س

---

٤ مجموعة الحل فى ح للمعادلة : | ٢ س − ٤ | = | س + ١ | تساوى ....

(أ) {٠ ، ٥} (ب) {١ ، ٥} (جـ) {٢ ، ٥} (د) {٥}

---

٥ مجال الدالة د : د (س) = $\frac{\sqrt{س - ٢}}{س - ٣}$ هو ....

(أ) ح (ب) {٣} (جـ) [٢ ، ∞[(د) [٢ ، ∞[− ...

---

٦ إذا كانت الدالة د : د (س) = $\begin{cases} \frac{س^{٢} - ٩}{س - ٣} & ، \quad س \neq ٣ \\ ٢ أ & ، \quad س = ٣ \end{cases}$ متصلة عند س = ٣

فإن : أ = ...

(أ) ٢ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) −٣ (د) ٣

---

٧ فى Δ ء هـ و إذا كان : ق (∠ ء) = ٣٠° ، هـ َ = ١٥ $\sqrt{٣}$ سم ، ق (∠ هـ) = ...

فإن : ءَ = ... سم.

(أ) ٣٠ (ب) ٤٥ (جـ) ١٥ (د) ٦٠

٨ موضحًا خطوات الحل حيث س عدد حقيقى أوجد مجموعة حل المعادلة :

$٣^{٢س - ١} - ٤ \times ٣^{س} + ٩ = ٠$

٩ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} (٣ + ٥ س^{٢} + ٣ س) = \dots\dots\dots$

(أ) غير موجودة. (ب) ٥ (جـ) ∞ (د) ١١

١٠ إذا كانت : د (س) = ٤ س − ٥ ، ر (س) = $٣^{س}$

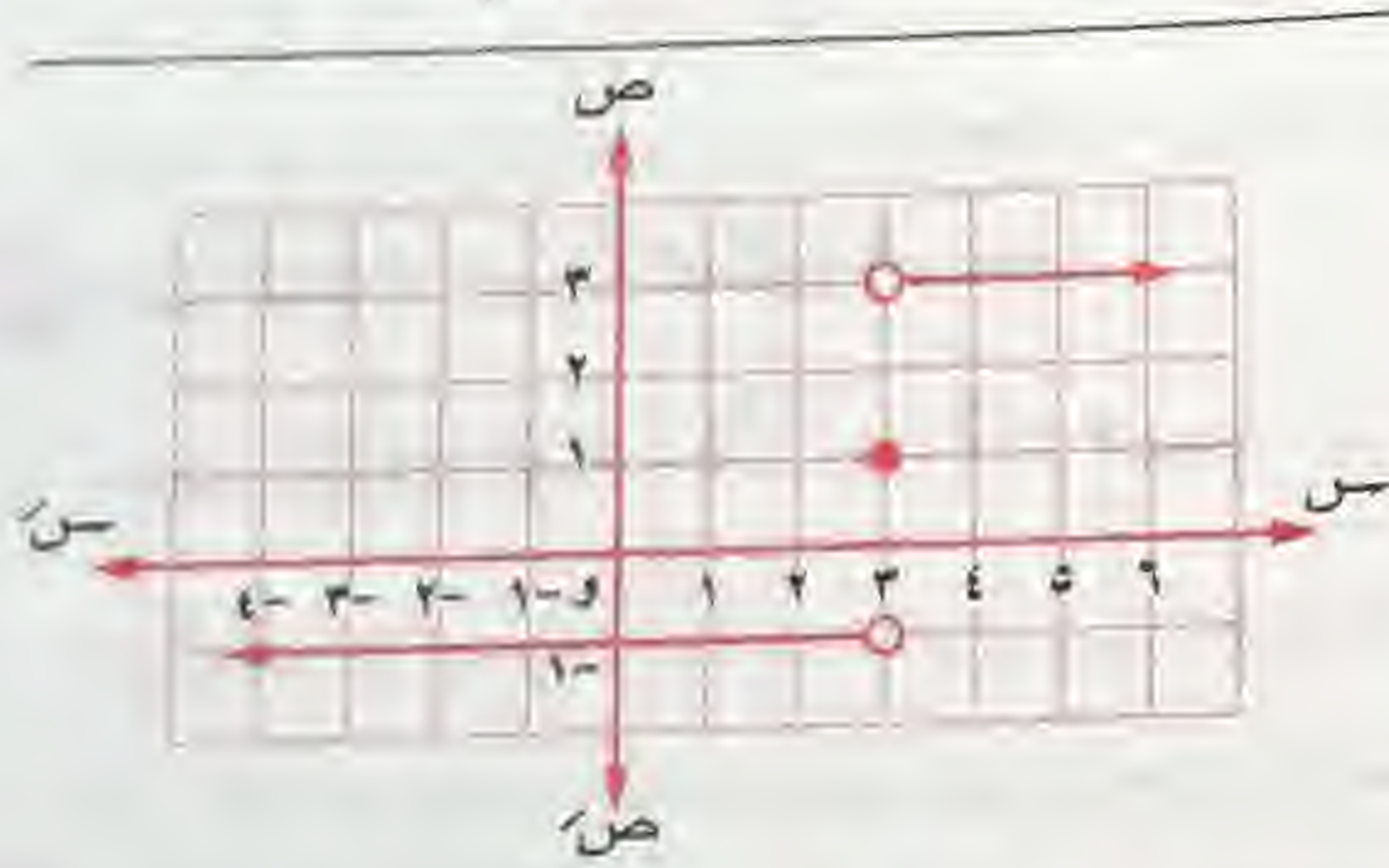
فإن : (د ∘ ر) (٢) = ...

(أ) ٣ (ب) ٩ (جـ) ٢٧ (د) ٣١

١١ إذا كانت : د (أ) = $٢^{أ}$ فإن : $لو_{٢}$ د (أ) = ...

(أ) ٢ (ب) د (أ) (جـ) أ (د) $\frac{١}{٢ أ}$

١٢ من الشكل المقابل :



د (٣^{+}) + د (٣) = ...

(أ) ٢ (ب) ٠ (جـ) ٤ (د) ٦

١٣ $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \left(\frac{\text{جا } ٢ س}{س} - \text{جتا } ٥ س \right) = \dots\dots\dots$

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

١٤ من بين الدوال الآتية الدالة الزوجية هى د (س) = ...

(أ) جا س (ب) جا ٣٠° (جـ) س جتا س (د) $س^{٢}$ + طا س

١٥ فى أى مثلث س ص ع يكون ٢ سَ عَ × .... = $سَ^{٢} + عَ^{٢} - صَ^{٢}$

(أ) جتا س (ب) جتا ع (جـ) جتا ص (د) جا ص

١٦ أ ب حـ ء شكل رباعي فيه : أ ب = ٢٢ سم ، ق(∠ ء أ ب) = ٦٥° ، ب حـ = ٢٥ سم ، ء حـ = ١٨ سم

، ق(∠ ء ب أ) = ٥٠°

أوجد : ق(∠ حـ ب ء)

---

١٧ إذا كانت : $\lim_{س \to -1} \frac{س^2 + ك\,س + م}{س^2 - 1} = 3$ فإن : ك + م = ...

(أ) ‎-٤ (ب) ‎-٥ (جـ) ‎-٨ (د) ‎-٩

---

١٨ مدى الدالة د : د(س) = $\frac{س^2 - 1}{س - 1}$ هو ....

(أ) ح (ب) ح - {٠} (جـ) ح - {١} (د) ح - {٢}

---

١٩ إذا كان : $\frac{أ + ب}{13} = \frac{ب + حـ}{11} = \frac{حـ + أ}{12}$ فإن : حتا أ = ...

(أ) $\frac{1}{5}$ (ب) $\frac{5}{7}$ (جـ) $\frac{19}{35}$ (د) $\frac{4}{11}$

---

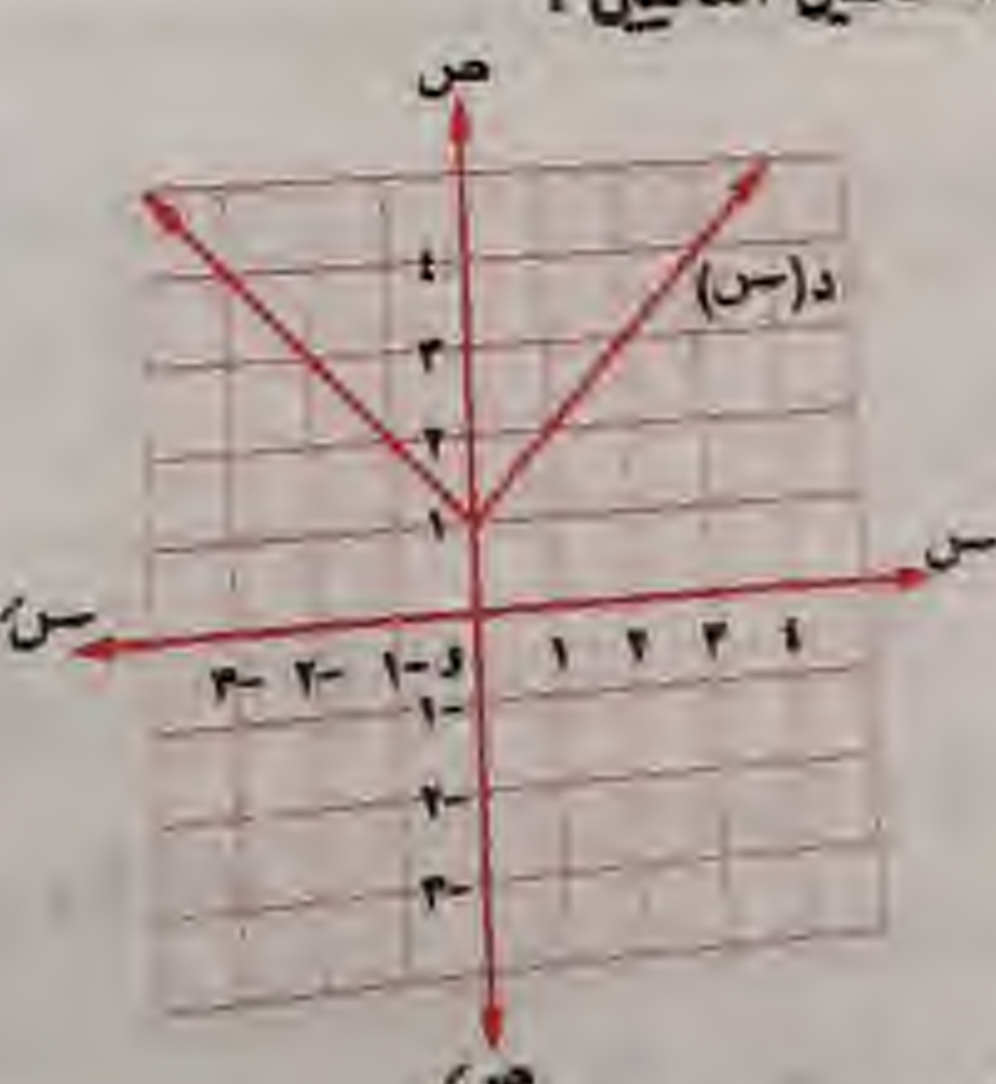
٢٠ عدد الحلول الممكنة للمثلث أ ب حـ

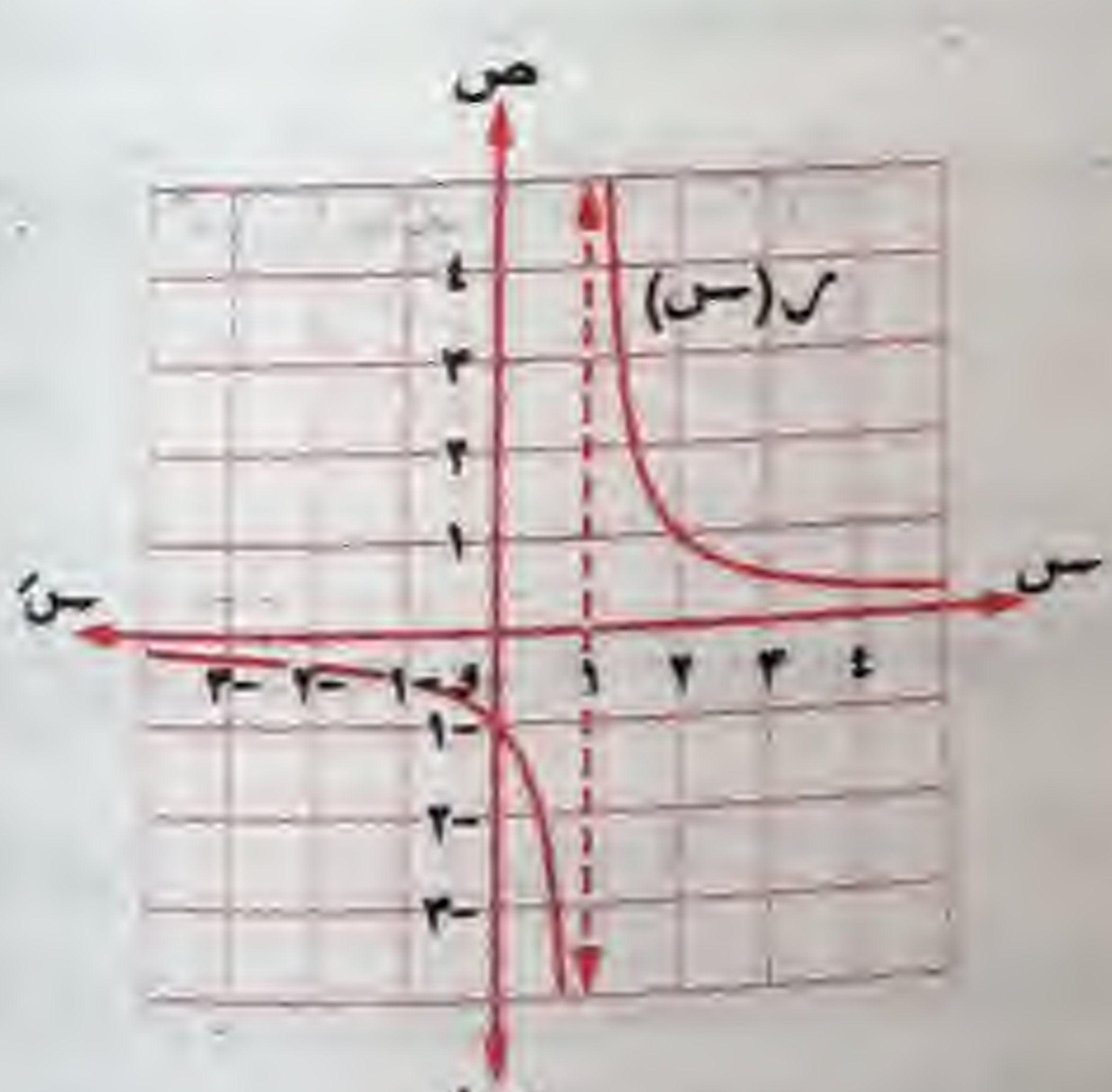
حيث : ق(∠ أ) = ٤٧° ، أ = ٤ سم ، ب = ٦ سم يساوى ....

(أ) ١ (ب) ٠ (جـ) ٢ (د) عدد لا نهائي

---

٢١ من الشكلين التاليين :



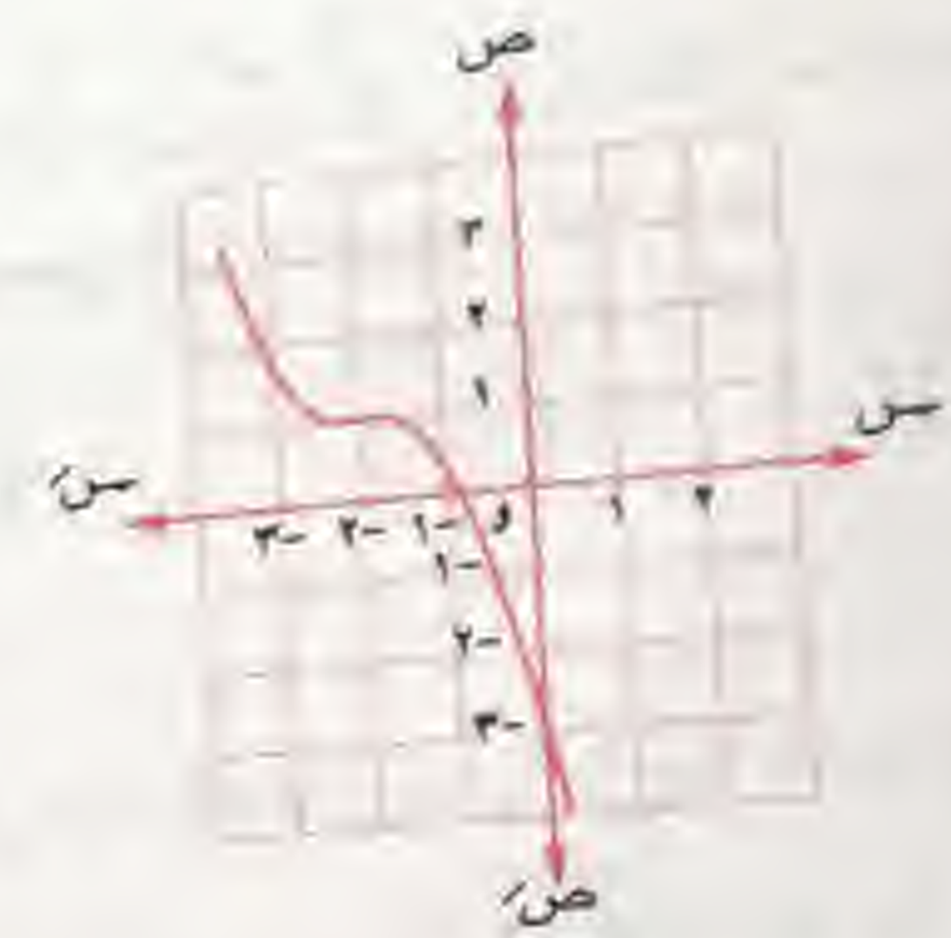


أوجد (د ∘ ر) ومثلها بيانيًا مبينًا المجال وكونها زوجية أم فردية وابحث تماثلها وكونها أحادية أم لا.

٢٢ إذا كانت : د (س) = ٢ − (س − ١)^٣ فإن الشكل الذى يمثل الدالة د هو ....

(أ)

(ب)



(جـ)

(د)

٢٣ نهـــا (س ← ١) (٢ س − ٥) = ...

(أ) ٢ (ب) −٣ (جـ) ٧ (د) صفر

٢٤ مجموعة حل المعادلة : لو_س (س + ٦) = ٢ فى ح هى ....

(أ) {٣ ، −٢} (ب) {٣} (جـ) {٣ ، ١} (د) {٦ ، ١}

٢٥ الدالة العكسية للدالة د : د (س) = ٨ س^٣ − ١ هى د^{-١} (س) = ...

(أ) $\sqrt[3]{س^3 - \frac{1}{8}}$ (ب) $\frac{\sqrt[3]{س + 1}}{2}$

(جـ) ٨ $\sqrt[3]{س}$ − ١ (د) $\frac{\sqrt[3]{س - 1}}{2}$

٢٦ △ ل م ن فيه ق(∠ل) = ٣٠° ، م ن = ٧ سم فإن طول قطر الدائرة [illegible] برؤوسه يساوى ....

(أ) ٧ سم (ب) ٣,٥ سم (جـ) ١٤ سم (د) [illegible]

٢٧ مجموعة حل المعادلة : ٢$^{س^٢}$ = ١٦ فى ح هى ....

(أ) {٢} (ب) {−٢} (جـ) {٢ ، −٢} (د) [illegible]

٢٨ ابحث اتصال الدالة د : د(س) = { (س + جا س) / (٣ س − ٢ جا س) ، س > ٠ ؛ ٣ س − ١ ، س ≤ ٠ } عند [illegible]

٢٩ الدالة د : د(س) = ٥ − س^٢ − ٤ س تزايدية عندما س ∈ ....

(أ)]٢ ، ∞[(ب)]−٢ ، ∞[(جـ)]−∞ ، ٢[(د)]−[illegible]

٣٠ نهـــا (س ← π) (جا ٢ س) / (٤ س − π) = ...

(أ) ١/٢ (ب) −١/٢ (جـ) ١/٤ (د) −١/٤

٣١ فى △ ا ب حـ إذا كان : ٣ جا ا = ٤ جا ب = ٢ جا حـ فإن جيب تمام أصغر [illegible] فى △ ا ب حـ = ...

(أ) ١١/٢٤ (ب) ٤٣/٤٨ (جـ) ٢٩/٣٦ (د) ١١/٣٦

٣٢ مجموعة حل المتباينة : √(س^٢ − ٦ س + ٩) + ٢ ≥ ٩ هى ....

(أ) ح −]−٤ ، ١٠[

(ب) ح −]−٨ ، ١٠[

(جـ) [−٤ ، ١٠]

(د) [−٨ ، ١٠]

النمــوذج السادس

امتحان الكترونى ٦

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ إذا كانت : $نهـا_{س \leftarrow ١} \frac{س^{٢} + ٧ س + ب}{س^{٢} - ٦ س + ٨} = \frac{١٥}{٢}$ فإن : ب = ...

(أ) −٤٤ (ب) ٧ (جـ) −٨ (د) ٨

٢ إذا كان : $لو_{ب} س + لو_{ب} ٣ = لو_{ب} ٢٧ - ١$ فأى مما يأتى يعبر عن س بدلالة ب ؟

(أ) س = ٩ ب (ب) س = $\frac{١}{٩}$ ب (جـ) س = $\frac{٩}{ب}$ (د) س = $\frac{١}{٩ ب}$

٣ إذا كان : $لو_{٢} (س + ٢) - لو_{٢} (س - ١) = لو_{٢} ٤$ فإن : س = ...

(أ) −٢ (ب) ٢ (جـ) ١ (د) −١

٤ ابحث نوع كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

① $د_{١} (س) = س جتا س$

② $د_{٢} (س) = \begin{cases} س^{٢} & ، س \geq ٠ \\ |س| & ، س < ٠ \end{cases}$

٥ $نهـا_{س \leftarrow ٠} \frac{س^{٢} - ١}{س} =$ ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) غير موجودة. (د) −١

٦ إذا كان : $س^{\frac{٢}{٣}} = ٦٤$ فإن : س = ...

(أ) ٥١٢ (ب) ١٦ (جـ) ٤ (د) ٢

٧ مساحة سطح الدائرة المارة برؤوس △ أ ب حـ المتساوى الأضلاع الذى طول ضلعه ٩ سم تساوى .... سم^{٢}

(أ) ٩ π (ب) $٩ \sqrt{٣}$ π (جـ) ٢٧ π (د) ٨١ π

8 إذا كانت : د (س) = ٢ س − ١ ، ر (س) = س^٢

فإن : (ر ∘ د) (−٢) = ...

(أ) −٧ (ب) ١١ (جـ) −٤٩ (د) ٤٩

---

9 $\lim_{هـ \to 0} \frac{(س + هـ)^٧ - س^٧}{هـ}$ = ...

(أ) س^٧ (ب) ٧ س^٦ (جـ) صفر (د) ١

---

10 فى Δ أ ب جـ يكون : أ^٢ + ب^٢ − جـ^٢ = ...

(أ) جتا أ (ب) أ ب جتا جـ (جـ) جتا جـ (د) ٢ أ ب [illegible]

---

11 منحنى ر (س) = | س + ٣ | هو نفس منحنى د (س) = | س |

بإزاحة مقدارها ٣ وحدات فى اتجاه ....

(أ) $\overrightarrow{و س}$ (ب) $\overleftarrow{و س}$ (جـ) $\overleftarrow{و ص}$ (د) $\overrightarrow{و ص}$

---

12 مجموعة حل المتباينة : | ٣ − ٢ س | ≥ ١ فى ح هى ....

(أ) [١ ، ٢] (ب)]١ ، ٢[(جـ) ح −]١ ، ٢[(د) ح − [١ ...

---

13 إذا كانت د : ح^+ ← ح حيث د (س) = $\frac{١}{س^٢ + ١}$

أوجد : د^{−١} (س) وعين مجال د^{−١} ومداها.

---

14 الشكل المقابل يوضح منحنيي الدالتين د ، ر

فإن : (ر ∘ د) (١) = ...

(أ) −٨ (ب) −٢ (جـ) ٤ (د) ٥

---

15 نقطة تماثل الدالة د : د (س) = $\frac{٢ س - ١}{س}$ هى ....

(أ) (١ ، ٢) (ب) (٢ ، ١) (جـ) (٢ ، ٢) (د) (٠ ، ٢)

١٦ $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}}$ $\frac{\text{جا } ٢س^٢ + \text{ظا}^٢ ٢س}{٣س^٢}$ = ...

(أ) $\frac{٨}{٣}$ (ب) $\frac{٤}{٣}$ (جـ) ٢ (د) ٣

١٧ إذا كان : لو (٢س + ص) = $\frac{١}{٢}$ (لو س + لو ص) + لو ٢ حيث س ≠ ص

وكانت : ص = ك س فإن : ك = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) -٤

١٨ $\underset{س \to \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}}$ (٢س − جتا س) = ...

(أ) صفر (ب) ٢ (جـ) π (د) $\frac{\pi}{٢}$

١٩ الدالة الزوجية المتصلة عند النقطة (أ ، ب) تكون متصلة أيضًا عند النقطة ....

(أ) (أ ، ب) (ب) (−أ ، ب) (جـ) (أ ، −ب) (د) (−أ ، −ب)

٢٠ مدى الدالة د : د (س) = $\begin{cases} ٠ &، س \geq ٠ \\ ١ &، س < ٠ \end{cases}$ هو ....

(أ) {١} (ب) {٠} (جـ) ح (د) {٠ ، ١}

٢١ طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث س ص ع الذى فيه :

سَ = ٣ سم ، صَ = ٥ سم ، عَ = ٧ سم يساوى .... سم.

(أ) $\frac{٧}{٣}\sqrt{٣}$ (ب) ٢$\sqrt{٣}$ (جـ) ٤,٤ (د) $\frac{١٤}{٣}\sqrt{٣}$

٢٢ فى الشكل المقابل :

إذا كان محيط Δ أ ب جـ = ٤٢ سم

، الدائرة م تمس أضلاع المثلث من الداخل

فإن : ق (∠ أ) = ...

(أ) ٥٣° ٧َ (ب) ٦٧° ٢٣َ (جـ) ٣٦° ٥٣َ (د) ٢٢° ٣٧َ

النمــوذج السابع

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ إذا كانت : د (س) = $(١٠)^{٢س}$ ، ر (س) = لو ($\sqrt[٢]{س}$) فإن : (ر ∘ د) (س) = ...

(أ) $١٠^{٢س}$ (ب) لو $\sqrt[٢]{س}$ (جـ) $١٠^{٢س}$ لو $\sqrt[٢]{س}$ (د) س

٢ فى Δ أ ب جـ يكون : $\frac{أ}{أ + ب} = \frac{جا أ}{.......}$

(أ) جا ب (ب) جا جـ (جـ) جا أ + جا ب (د) جا أ + جا جـ

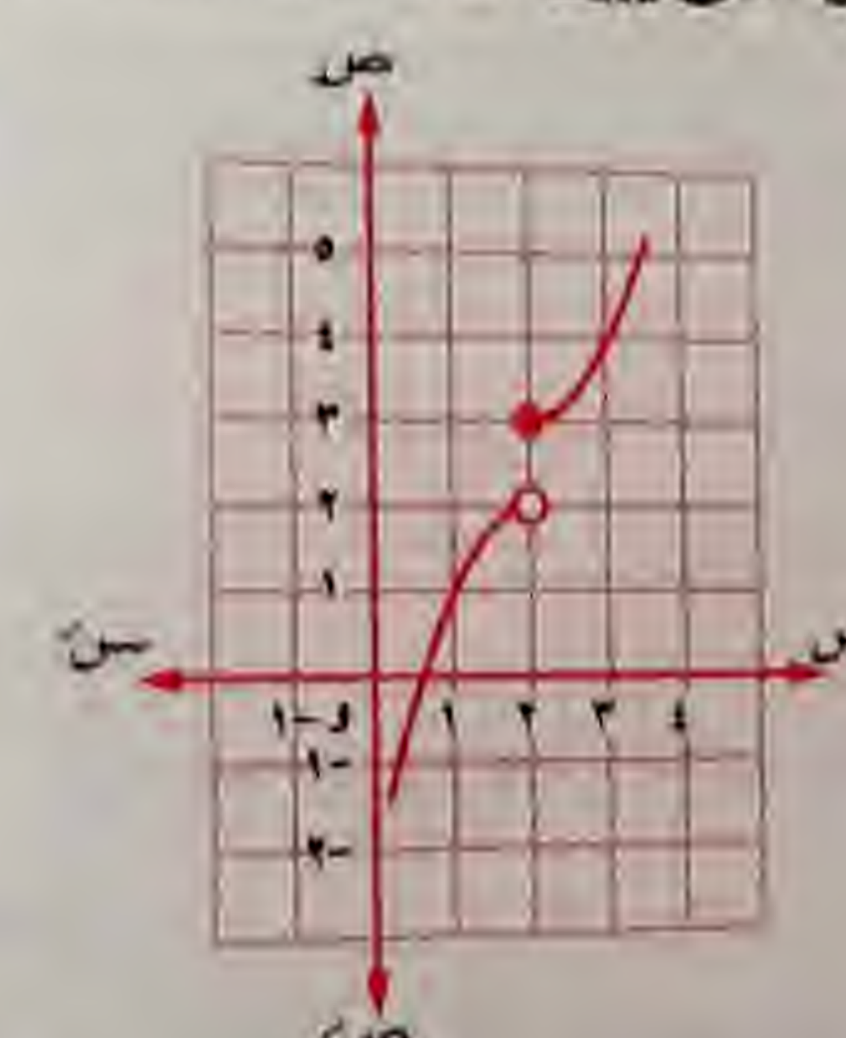
٣ فى Δ أ ب جـ إذا كان : جا أ = ٢ جا جـ ، ب جـ = ٦ سم فإن : أ ب = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٦

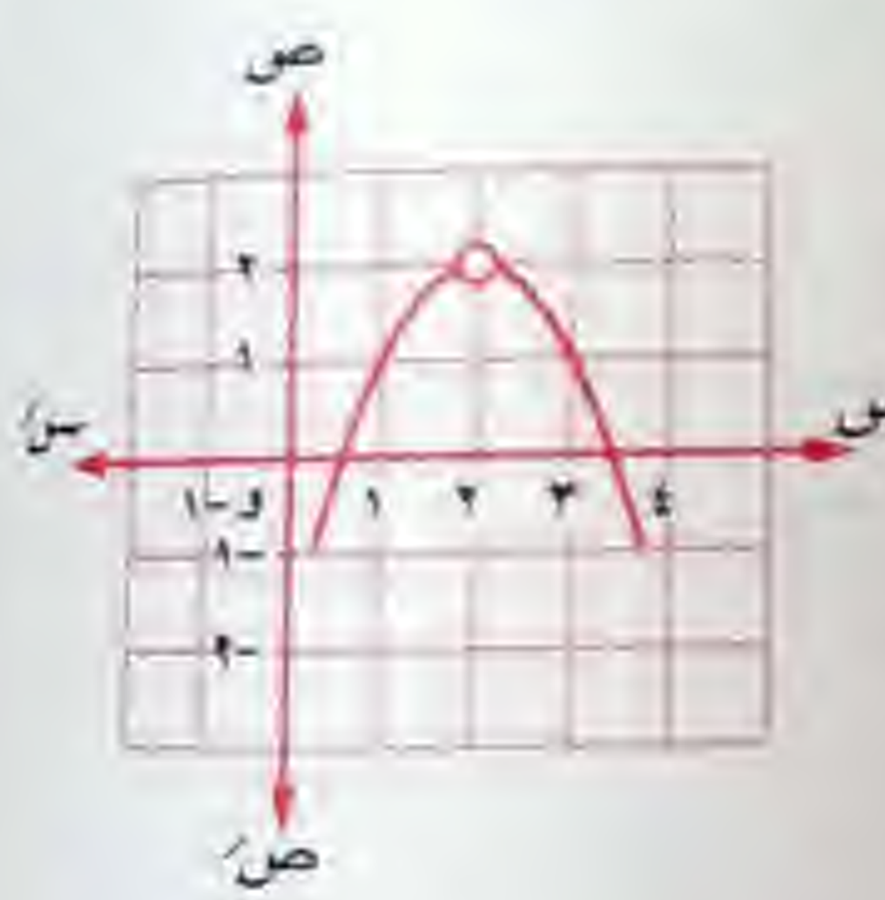
٤ **أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة : $س^{\frac{٤}{٣}} - ١٠ س^{\frac{٢}{٣}} + ٩$ = صفر**

٥ الشكل الذى يبين الدالة المتصلة عندما س = ٢ هو الشكل ....

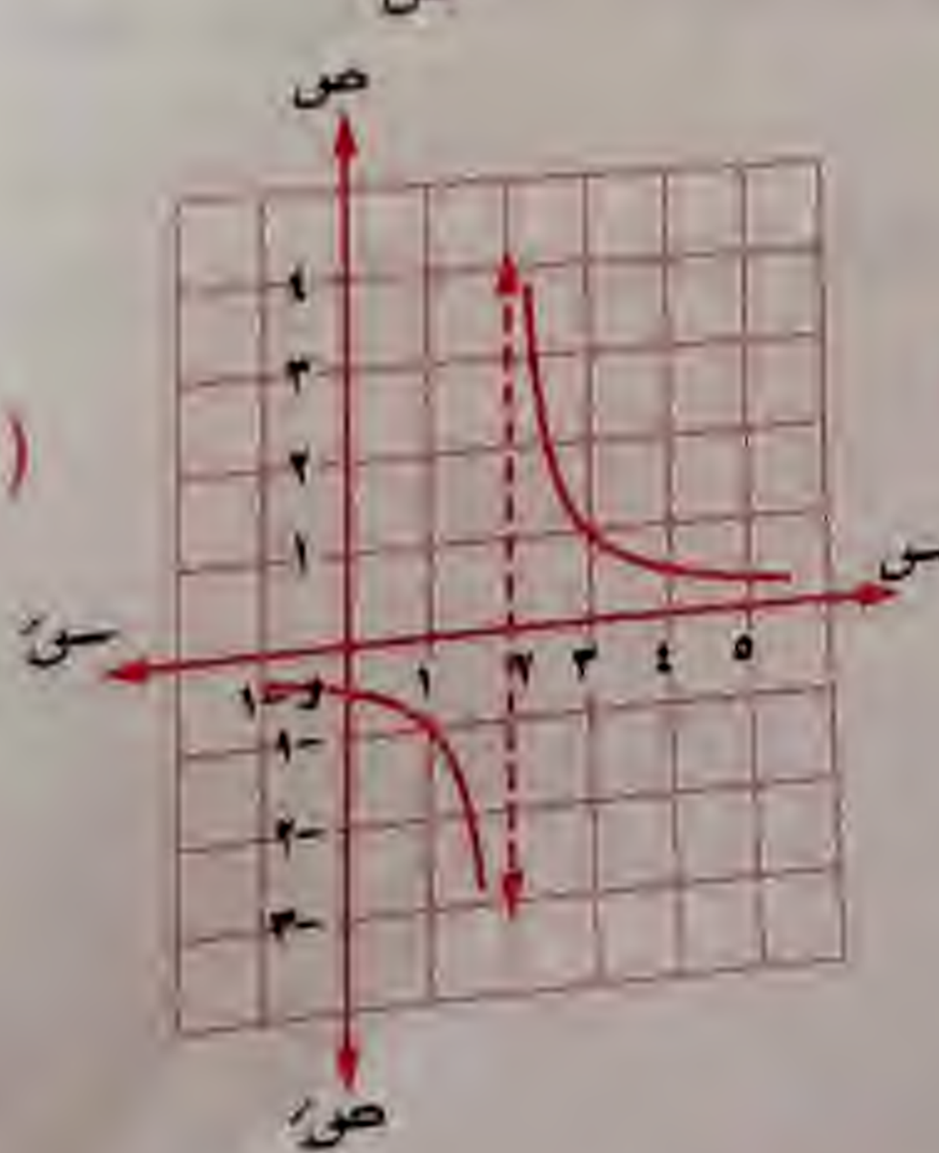
(أ)



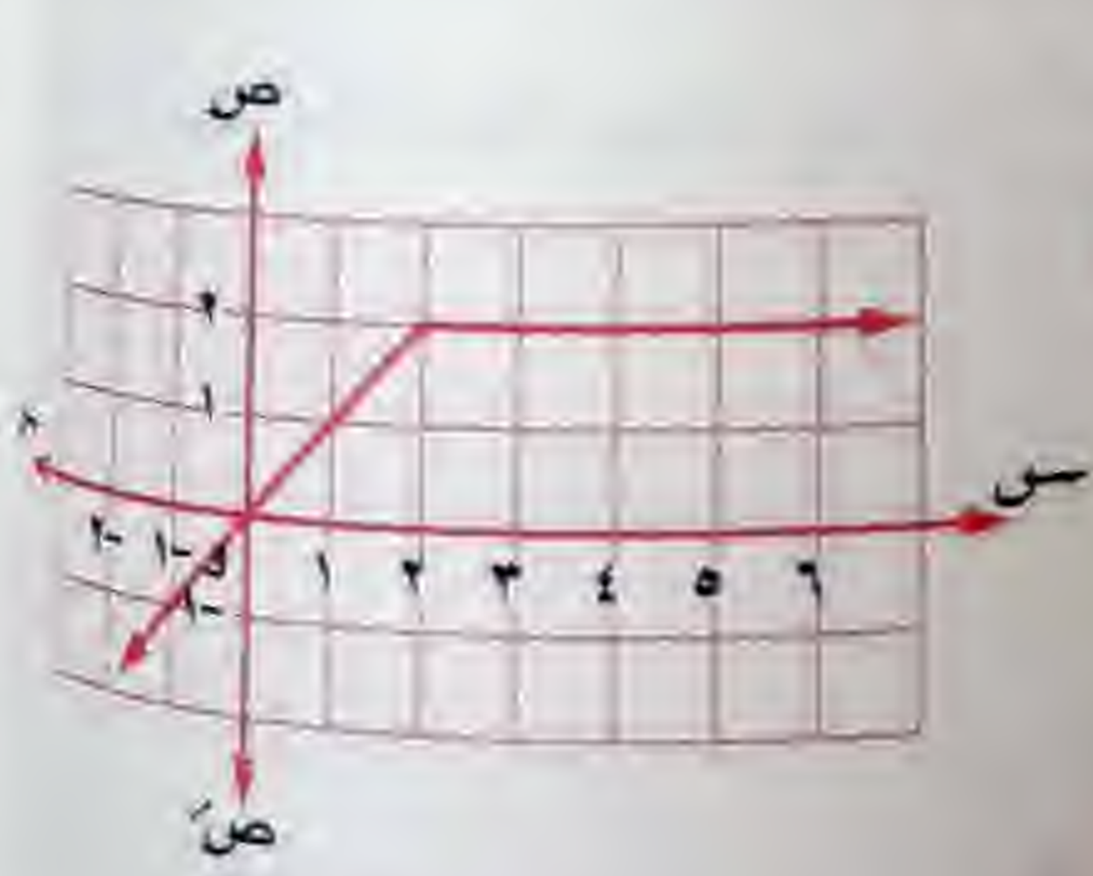
(ب)



(جـ)



(د)



٦ مجال الدالة د : د (س) = $\sqrt{س + ٢} + \sqrt{٥ - س}$ هو ....

(أ)]-٢ ، ∞[(ب)]-٢ ، ٥[(جـ) [-٢ ، ٥] (د)]٣ ، ∞[

٧ في Δ أ ب حـ يكون : $ب^٢ + حـ^٢ - أ^٢ = ٢$ ب حـ × ....

(أ) جا (٩٠° - ب) (ب) جا (٩٠° - أ)

(جـ) جتاب (د) جتا (٩٠° - ب)

٨ عدد الحلول الممكنة للمثلث س ص ع الذي فيه :

ق (∠ س) = ٣٠° ، سَ = ٦ سم ، صَ = ٩ سم يساوي ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٠ (د) عدد لا نهائي.

٩ $\lim_{س \to ١} \frac{٤ - \sqrt{س + ١٥}}{١ - س^٢}$ = ...

(أ) $\frac{١}{١٦}$ (ب) ١٦ (جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) ٤

١٠ إذا كان طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس Δ أ ب حـ يساوي ٦ سم

فإن : $\frac{٢ أَ}{جا أ}$ = ... سم

(أ) ١٢ (ب) ٦ (جـ) ١٨ (د) ٢٤

١١ مجموعة حل المعادلة : $(لو_٥ ص)^٢ - ٧ لو_٥ ص + ١٢ = ٠$ في ح هي ....

(أ) {٢٥ ، ١٢٥} (ب) {٢٥ ، ٦٢٥}

(جـ) {$\frac{١}{٢٥}$ ، ٦٢٥} (د) {١٢٥ ، ٦٢٥}

١٢ إذا كانت : د (س) = $\frac{س - ٥}{|س - ٥|}$ فإن : $[د (٥^+)]^٢ + [د (٥^-)]^٢$ = ...

(أ) ٥٠ (ب) صفر (جـ) ٤ (د) ٢

١٣ $لو_٢ \frac{٣}{٢٥} + ٥ لو_٢ ٥ + لو_٢ ٢٧ - لو_٢ \frac{١٢٥}{١٢} - لو_٢ ٢٤٣$ = ...

(أ) ٤ (ب) $لو_٣ ٩$ (جـ) لو ٢٥ (د) لو $\frac{١}{١٠٠}$

١٤ إذا كانت : $\underset{س \to [illegible]}{\text{نها}} \frac{س^٢ - أ^٢}{س + ٢} = -١٠$ فإن : أ = ...

(أ) ٢ (ب) −٢ (جـ) ٤ (د) ±٢

١٥ إذا كانت د : د(س) = $س^٣ + ١$ فأي العبارات الآتية غير صحيحة ؟

(أ) د دالة أحادية.

(ب) د دالة فردية.

(جـ) د تزايدية على مجالها.

(د) منحنى الدالة د يقطع محور السينات عند س = −١

١٦ س ص ع مثلث فيه : سَ = ٥ سم ، صَ = ٧ سم ، ق(∠ ع) = °٦٥

احسب : عَ ثم أوجد : محيط Δ س ص ع

١٧ إذا كان : $لو_٢$ س = ٢ فإن : $لو_س$ ٢ = ...

(أ) ٢ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) ٨ (د) ٩

١٨ إذا كانت : $د^{-١}$ هي الدالة العكسية للدالة د فإن : ....

(أ) مجال $د^{-١}$ = مجال د

(ب) مجال $د^{-١}$ = مدى د

(جـ) مدى $د^{-١}$ = مدى د

(د) مدى $د^{-١}$ = مجال $د^{-١}$

١٩ $\underset{ص \to ٢}{\text{نها}} \frac{ص^٥ - ٣٢}{ص - ٢} = ...$

(أ) ٣١ $ص^٤$ (ب) ٣٢ × $٢^٤$ (جـ) ٦٤ (د) ٥ × $٢^٤$

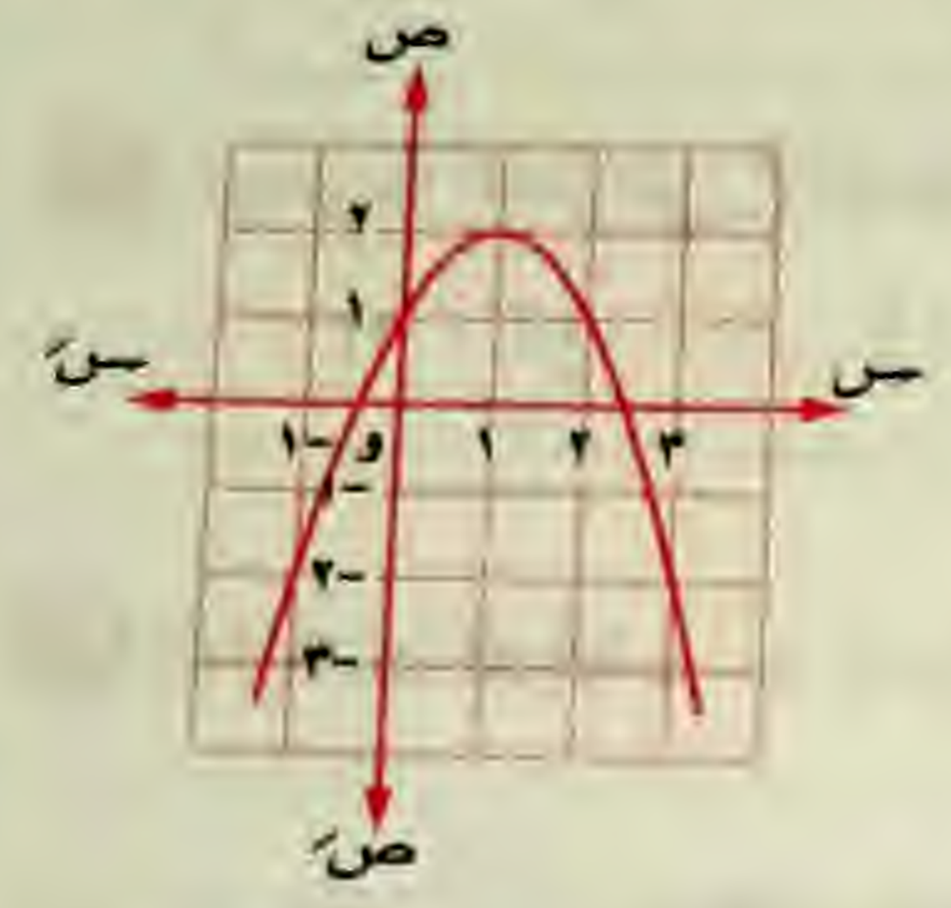
٢٠ ابحث وجود نهاية للدالة د حيث :

$$د(س) = \begin{cases} \frac{طا ٢ س}{جا س} & عندما\ س < ٠ \\ \frac{٥ س + ٦}{س + ٣} & عندما\ س > ٠ \end{cases}$$

عندما س تؤول إلى الصفر.

---

٢١ قاعدة الدالة التى تمثل الشكل المقابل هى



د (س) = ...

(أ) $(س - ٢)^٢ + ١$

(ب) $-(س - ٢)^٢ + ١$

(جـ) $-(س - ١)^٢ + ٢$

(د) $(-س + ١)^٢ + ٢$

---

٢٢ مجموعة حل المعادلة : $|٢ س - ١| = ٥$ فى ح هى ....

(أ) {٣} (ب) {−٢} (جـ) ∅ (د) {٣ ، −٢}

---

٢٣ إذا كانت : $د(س) = \begin{cases} س - ٤ & ، س \geq ٤ \\ ر(س) & ، س < ٤ \end{cases}$ متماثلة حول المستقيم س = ٤

فإن : الدالة ر تكون ....

(أ) تزايدية. (ب) تناقصية. (جـ) زوجية. (د) ثابتة.

---

٢٤ إذا كان $د(س) = س^٢ - ٣$ ، $ر(س) = \sqrt{س - ٢}$ أوجد : (د ∘ ر) (س)

فى أبسط صورة محددًا المجال ثم أوجد : (د ∘ ر) (٣)

---

٢٥ $\lim_{س \to ٠} \frac{٣ س + ٢ س^{-١}}{س + ٤ س^{-١}} =$ ....

(أ) $\frac{١}{٤}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) ٢ (د) ٤

---

٢٦ إذا كان : أ ∈]٠ ، ٩[فإن : $لو_٣$ أ ∈ ....

(أ)]−∞ ، ٢[(ب)]٢ ، ٨١[(جـ)]٢ ، ∞[(د)]−∞ ، ٠[

(ظا ... + ٢) = ...

(أ) ٢ (ب) ١ (ج) صفر (د) ∞

مجموعة الحل في ح للمعادلة : $\sqrt{س^2 - ٦س + ٩} + ٢س = ٩$ تساوي ......

(أ) {٤ ، ٦} (ب) {٦} (ج) {٤} (د) ∅

مجموعة الحل في ح للمتباينة : |س − ٣| ≥ ٢ هي ......

(أ)]١ ، ٥[(ب) [١ ، ٥] (ج) ح −]١ ، ٥[(د) ح − [١ ، ٥]

إذا كانت الدالة د : د (س) = $\begin{cases} \frac{س^2 - ٤}{س - ٢} &، س \neq ٢ \\ ك &، س = ٢ \end{cases}$

متصلة عند س = ٢ فإن : ك = ...

(أ) صفر (ب) ٨ (ج) ٢ (د) ٤

٢١ إذا كانت : $ب^{س} - ٢ب^{-س} = ١$ حيث ب > ١ فإن : س = ...

(أ) ٢ (ب) لو ٢ (ج) $لو_٢ ب$ (د) $لو_ب ٢$

٢٢ إذا كان : أ ب جـ مثلث مساحته ٢٤ سم^2 ، وطول نصف قطر الدائرة الخارجة عنه ٥ سم

فإن : جا أ جا ب جا (أ + ب) = ...

(أ) $\frac{٣}{٢٥}$ (ب) $\frac{٦}{٢٥}$ (ج) $\frac{٩}{٢٥}$ (د) $\frac{١٢}{٢٥}$

النمــوذج الثامن

امتحان الكترونى ٨

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ لو_أ س ÷ لو_أب س = ...

(أ) ١ - لو_أ ب (ب) ١ + لو_أ ب (جـ) ١ - لو_ب أ (د) ١ + لو_ب أ

---

٢ إذا كانت : د (س) = { ٢ س² + أ س - ٢ ، س < ٣ ؛ ٢ س + ب ، س > ٣ }

وكان : نهــا_{س ← ٣} د (س) = ١٦ فإن : أ + ب = ...

(أ) ٤ (ب) ١٠ (جـ) -١٣ (د) ٧

---

٣ طول قطر الدائرة الداخلة للمثلث المتساوى الأضلاع الذى طول ضلعه ٤ √٣ سم يساوى .... سم.

(أ) ٢ √٣ (ب) ٤ √٣ (جـ) ٤ (د) ٨

---

٤ قيمة : لو_٣ ٥٤ - لو_٣ $\frac{٨}{١٥}$ + لو_٣ $\frac{٤}{٥}$ = ...

(أ) لو_٣ (ب) ٣ (جـ) ٢٧ (د) ٤

---

٥ إذا كانت : ص = د (س) منحنى دالة حقيقية فإن صورته بإزاحة قدرها ٢ وحدة جهة اليمين هى ر (س) = ...

(أ) د (س - ٢) (ب) د (س + ٢) (جـ) د (س) + ٢ (د) د (س) - ٢

---

٦ عدد الحلول الممكنة للمثلث أ ب جـ حيث : ق (∠ أ) = ٦٠° ، ب = ٣ سم ، أ = ٤ سم هو ....

(أ) ١ (ب) ٢

(جـ) لا يوجد مثلث. (د) عدد لا نهائى من المثلثات.

---

٧ نهــا_{س ← صفر} $\frac{س^٢ + س}{س}$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

٨ إذا كان : د (س) = ٥^س فأوجد في ح مجموعة حل المعادلة : د (س) + د (س − ١) = ١٥٠

٩ في Δ أ ب جـ يكون : جتا (أ + ب) = ...

(أ) $\frac{أ^2 + ب^2 - جـ^2}{٢ أ ب}$ (ب) $\frac{أ^2 + جـ^2 - ب^2}{٢ أ جـ}$ (جـ) $\frac{ب^2 + جـ^2 - أ^2}{٢ ب جـ}$ (د) $\frac{جـ^2 - أ^2 - ب^2}{٢ أ ب}$

---

١٠ إذا كان : ١ < س < ٢ فإن : $\sqrt{س^2 - ٢س + ١} + \sqrt{س^2 - ٤س + ٤}$ = ...

(أ) ٢ س − ٣ (ب) ٢ س − ١ (جـ) ١ (د) ٣

---

١١ $\lim_{س \to ٣} \frac{س^2 - ٧س + ١٢}{س - ٣}$ = ...

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) −٢ (د) ٣

---

١٢ مجال الدالة د : د (س) = $\sqrt{\frac{س - ٥}{س + ٤}}$ = ...

(أ) [٥ ، ∞[(ب) [−٤ ، ٥] (جـ) ح −]−٤ ، ٥] (د) ح − [−٤ ، ٥[

---

١٣ في الشكل المقابل :

إذا كان : أ جـ = ٢٠ سم

فإن محيط Δ أ جـ م = ... سم.

(أ) ٤١٫٥ (ب) ٤٣٫٥ (جـ) ٤٥ (د) ٤٧٫٥

---

١٤ $٣^{لو_٣ ٤}$ + لو$_٥$ ٢٥ = ...

(أ) ٦ (ب) ٤ (جـ) ٢ (د) ١

---

١٥ مجال الدالة د : د (س) = $\sqrt{٩ - س}$ هو ......

(أ) ح (ب) ح − {٩} (جـ)]−∞ ، ٩] (د) [٩ ، ∞[

---

١٦ $\lim_{س \to ٥} \frac{س^2 - ٥س}{\sqrt{س + ٤} - ٣}$ = ...

(أ) ٣٠ (ب) ٦ (جـ) ٥ (د) ٢٥

١٧ أ ب حـ مثلث فيه : ب حـ = ١٩ سم ، ق(∠ أ) = ١١٢° ، ق(∠ ب) = ٣٢°

أوجد مساحة Δ أ ب حـ لأقرب سم² وطول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه لأقرب سم.

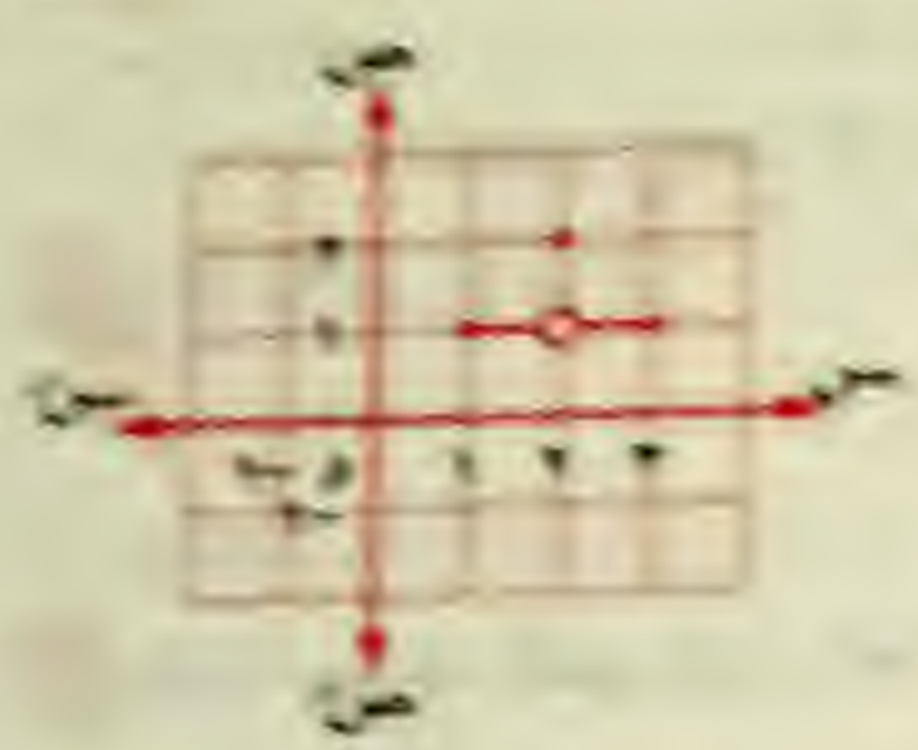
---

١٨ مجال الدالة د : د (س) = لو$_{س}$ س هو ....

(أ) س > ٠ (ب) س > ١ (جـ) ٠ < س < ١ (د) ٠ ≤ س ≤ ١

---

١٩ الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د



فأى من الجمل الآتية صحيح ؟

(أ) د متصلة على الفترة [١ ، ٢]

(ب) د متصلة على الفترة]١ ، ٢[

(جـ) نهـا$_{س ← أ}$ د (س) موجودة حيث أ ∈ [١ ، ٢]

(د) نهـا$_{س ← أ}$ د (س) موجودة حيث أ ∈]١ ، ٢[

---

٢٠ نهـا$_{س ← ∞}$ $\left(\frac{٣س^٢ + ٢س + ١}{س^٢ - ٣س + ٢}\right)^٤$ = ...

(أ) ٣ (ب) ٩ (جـ) ٢٧ (د) ٨١

---

٢١ إذا كانت د : ح ← ح حيث د (س) = ٤ س − ٢ ، ن : [−٢ ، ٣] ← ح

حيث ن (س) = ٤ − ٣ س ارسم الدالة (د + ن) محدداً مجالها ومداها وابحث اطرادها.

---

٢٢ أى مما يأتى لا يساوى ($\sqrt[٥]{س^٤}$) ؟

(أ) $(\sqrt[٥]{س})^٤$ (ب) $\sqrt[٤]{س^٥}$ (جـ) س$^{\frac{٤}{٥}}$ (د) (س$^{\frac{١}{٥}}$)^٤

---

٢٣ إذا كانت الدالة د دالة زوجية فى الفترة [حـ ، ٤] فإن : حـ + ٤ = ...

(أ) ٢ حـ (ب) ٢ ٤ (جـ) حـ − ٤ (د) صفر

---

٢٤ أوجد قيمة أ التى تجعل الدالة د متصلة عند أ حيث د (س) = $\begin{cases} ٢ - س^٢ & ، س ≤ أ \\ س & ، س > أ \end{cases}$

٢٥ إذا كانت: $د(س) = (س - ٥)(س + ٥)$ ، $ى(س) = س - ٥$

فإن: $\frac{د}{ى}(٥) = $ ....

(أ) ١٠ (ب) ١ (جـ) $\frac{د}{ى}(-٥)$ (د) غير معرفة.

---

٢٦ $نهــا_{س \to [illegible]} \frac{[illegible] + \sqrt[3]{س}}{\sqrt[3]{س}} = $ ....

(أ) ٨ (ب) −٢ (جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) ٢

---

٢٧ إذا كان: $\left(\frac{١}{٢}\right)^{أ^٢ - ٢أ - ٣} = ١$ حيث أ > صفر فإن: أ = ...

(أ) ١ (ب) −٣ (جـ) ٢ (د) ٣

---

٢٨ Δ أ ب جـ الذى فيه: ق(∠جـ) = ١١٦° ، جـ = ١٢ سم ، أ = ١٠ سم

يكون: ب = ... سم (لأقرب جزء من عشرة).

(أ) ٢,٦ (ب) ٣,٦ (جـ) ٤,٦ (د) ٥,٦

---

٢٩ $نهــا_{س \to ٠} \frac{١ - جتا س + ظا ٥ س}{١ - جتا س - ظا س} = $ ....

(أ) −٥ (ب) ٥ (جـ) صفر (د) غير معرفة.

---

٣٠ Δ أ ب جـ فيه: $جتا ب = \frac{جـ}{٢أ}$ فإن: Δ أ ب جـ يكون ....

(أ) متساوى الأضلاع. (ب) متساوى الساقين.

(جـ) مختلف الأضلاع. (د) غير ذلك.

---

٣١ مجموعة حل المتباينة: $\frac{١}{|٢س - ٣|} > ٢$ فى ح هى ....

(أ) $[\frac{٥}{٤} ، \frac{٧}{٤}] - \{\frac{٣}{٢}\}$ (ب) $]\frac{٥}{٤} ، \frac{٧}{٤}[$

(جـ) $]\frac{٥}{٤} ، \frac{٧}{٤}[- \{\frac{٣}{٢}\}$ (د) $[\frac{٥}{٤} ، \frac{٧}{٤}]$

---

٣٢ الدالة الأحادية من بين الدوال المعرفة بالقواعد التالية هى ....

(أ) $د_١(س) = س + ٥$ (ب) $د_٢(س) = س^٢$

(جـ) $د_٣(س) = |س - ٢|$ (د) $د_٤(س) = -٣$

النموذج التاسع

امتحان إلكتروني ٩

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ مجموعة حل المعادلة : لو$_{(س + ٢)}$ ١٢٥ = ٣ فى ح هى ....

(أ) {٥}　(ب) {٣}　(جـ) ∅　(د) {٢}

---

٢ Δ ل م ن الذى فيه : ق (∠ ل) = ٣٠° ، مَ = ٩ سم يكون له حلان عندما

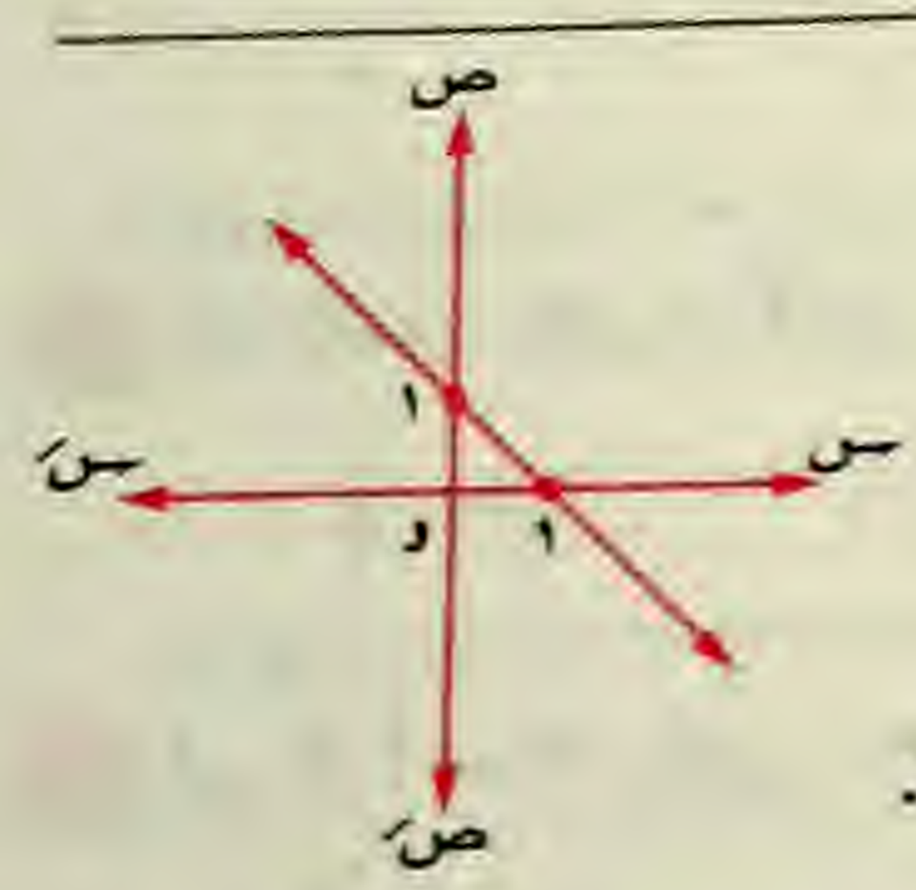
لَ = ... سم.

(أ) ٦　(ب) ١٠　(جـ) ١١　(د) ٢

---

٣ إذا كان الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د

فإن : $\lim_{س \to ٢}$ | د (س) | = ...



(أ) -١　(ب) صفر

(جـ) ١　(د) غير موجودة.

---

٤ إذا كانت : د (س) = ٢ + $\sqrt{س - ١}$ أوجد الدالة العكسية.

---

٥ إذا كانت د : ح ⟵ ح حيث د (س + ١) - د (س) = س - ١

فإن : د (١٠) - د (٩) = ...

(أ) ١　(ب) ٩　(جـ) ٨　(د) ١٨

---

٦ $\lim_{س \to ٠} \frac{٢ س}{جا ٢ س}$ = ...

(أ) $\frac{٢}{٣}$　(ب) $\frac{٣}{٢}$　(جـ) ٦　(د) ليس لها وجود.

بالانتقال ٢ وحدات في اتجاه و س

٧ صورة المنحنى : ص = |س| − ٥ بالانتقال ٣ وحدات في اتجاه و س ، ٥ وحدات في اتجاه و ص هي ....

(أ) ص = |س − ٣| + ٨ (ب) ص = |س − ٣|

(ج) ص = |س − ٣| − ١٠ (د) ص = |س + ٣|

---

٨ إذا كانت الدالة د : د (س) = { س² + أ س − ٢ ، س < ٢ ؛ ٤ ، س = ٢ ؛ ٥ أ + ب س ، س > ٢ } متصلة عند س = ٢

أوجد قيمة كل من : أ ، ب

---

٩ نهـا (س ← ∞) $\frac{\sqrt{س + ٥} - \sqrt{٥}}{\sqrt{س} - \sqrt{٥}}$ = ...

(أ) ١ (ب) −١ (ج) ∞ (د) −∞

---

١٠ إذا كانت : ص = $\sqrt[٥]{س}$ فإن الدالة العكسية لها ص = ...

(أ) $\frac{١}{٥}$ س⁵ (ب) س⁵ (ج) س⁵ − ١ (د) ٥ س⁵

---

١١ في Δ أ ب حـ يكون : حـَ (أَ جتا ب + بَ جتا أ) = ...

(أ) أ² (ب) ب² (ج) حـ² (د) ٢ حـ²

---

١٢ أ ب حـ ء متوازي أضلاع فيه : أ ب = ٩ سم ، ب حـ = ١٣ سم ، أ حـ = ٢٠ سم

فإن : طول ب ء = ... سم.

(أ) ٥ (ب) ١٠ (ج) ٢,٥ (د) ٤

---

١٣ إذا كان : د (س) = س − ١ ، ر (س) = $\sqrt{س}$ فإن مجال (ر ○ د) هو ....

(أ) ح (ب)]−∞ ، ١] (ج) [١ ، ∞[(د) ح − {١}

---

١٤ نهـا (س ← ٤) $\frac{س^٣ \sqrt{س} - ١٢٨}{س - ٤}$ = ...

(أ) ١١٢ (ب) ٩٦ (ج) ٨٤ (د) ٧٢

١٥ إذا كانت : د (س) = $\frac{\sqrt{س^{٢} - ٢س + ١}}{س - ١}$ فإن مدى الدالة د هو ....

(أ) {١} (ب) ح (جـ)]-١ ، ١[(د) {-١ ، ١}

---

١٦ ارسم منحنى الدالة د : د (س) = $\sqrt{س^{٢} - ٤س + ٤}$ وعين مداها وابحث اطرادها.

---

١٧ مجموعة الحل فى ح للمعادلة :

$لو_{٢} س - \frac{٣}{لو_{٢} س} = ٢$ تساوى ....

(أ) {-١ ، ٣} (ب) {٨ ، $\frac{١}{٢}$} (جـ) {٨ ، ٢} (د) {$\frac{١}{٨}$ ، ٢}

---

١٨ $\lim_{هـ \to ٠} \frac{(س + هـ)^{٩} - س^{٩}}{هـ}$ = ...

(أ) $س^{٩}$ (ب) ٩ $س^{٨}$ (جـ) صفر (د) غير موجودة.

---

١٩ إذا كان : أ > ب > حـ > ١ فإن : $لو_{حـ} لو_{ب} لو_{أ} أ^{بحـ}$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) أ ب حـ

---

٢٠ إذا كان أ ب حـ مثلث فيه : أ = ٤ سم ، ب = ٤ $\sqrt{٣}$ سم ، حـ = ٨ سم

فإن جيب قياس أصغر زاوية فيه يساوى ....

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (جـ) ١ (د) صفر

---

٢١ حل المثلث أ ب حـ الحاد الزوايا الذى فيه : أ = ٢١ سم ، ب = ٢٥ سم

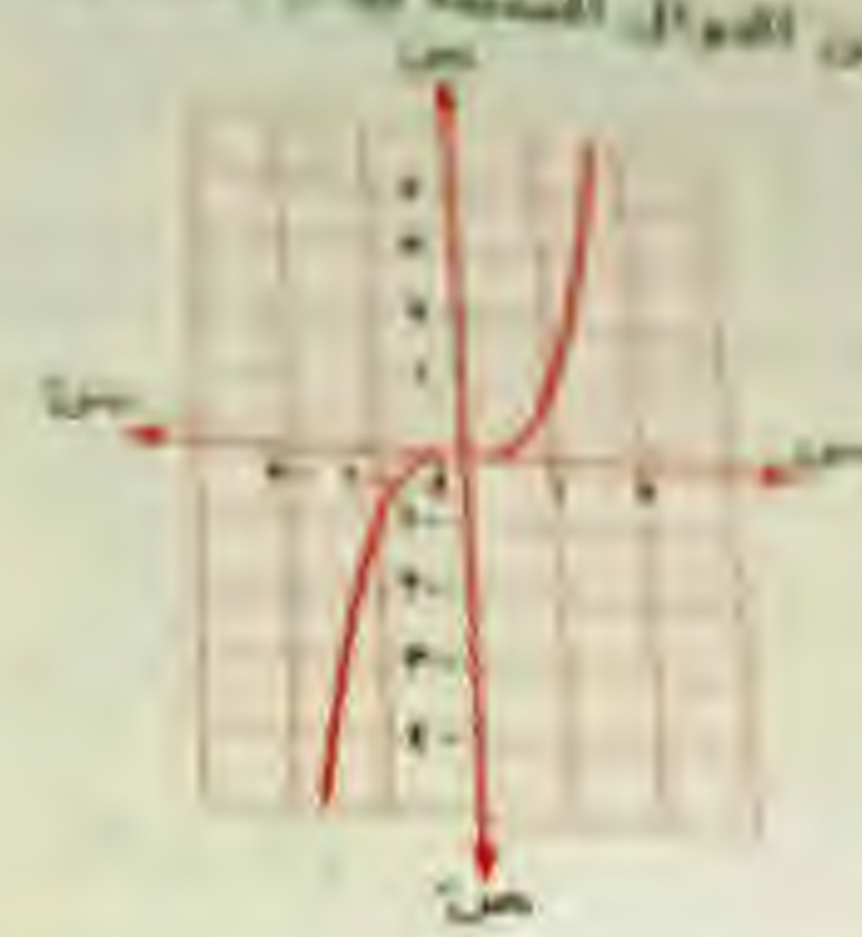
وطول قطر الدائرة المارة برؤوسه ٢٨ سم

---

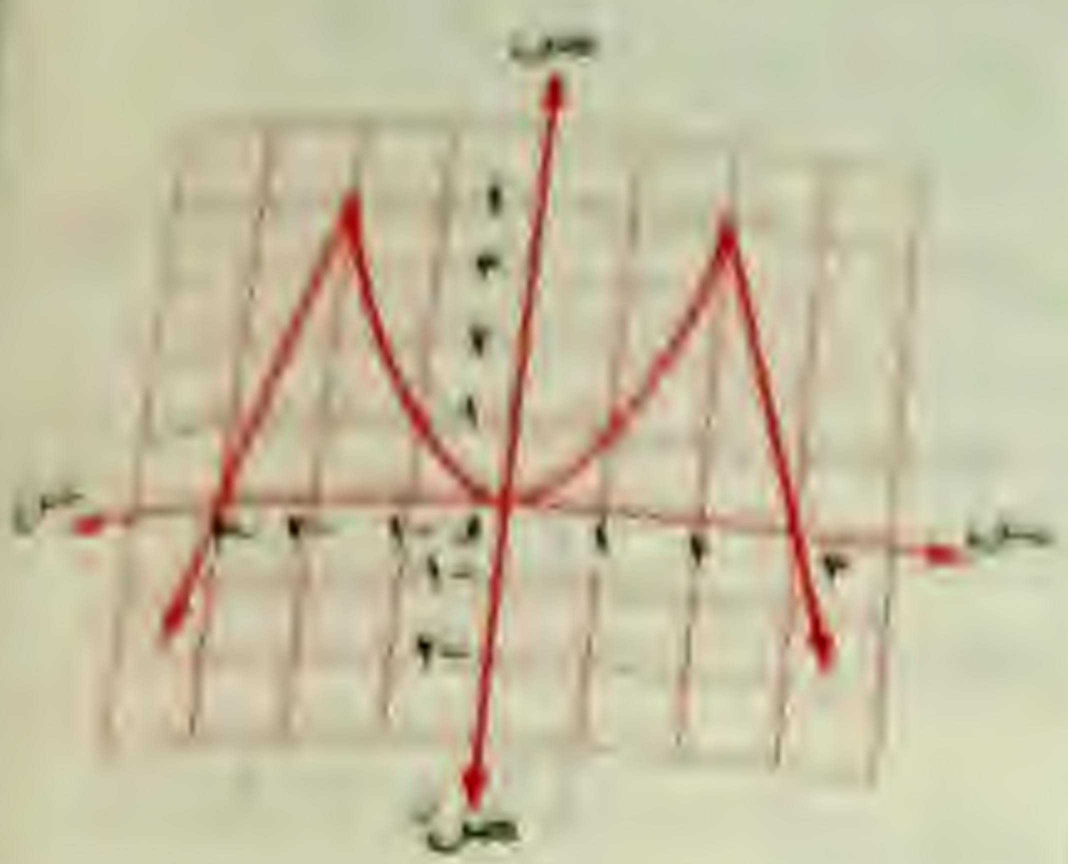
٢٢ إذا كان : س = ٥ + ٢ $\sqrt{٦}$ فإن : لو $(\frac{١}{س} + س)$ = ...

(أ) ١ (ب) ٥ - ٢ $\sqrt{٦}$ (جـ) ١٠ (د) ٥ + ٢ $\sqrt{٦}$

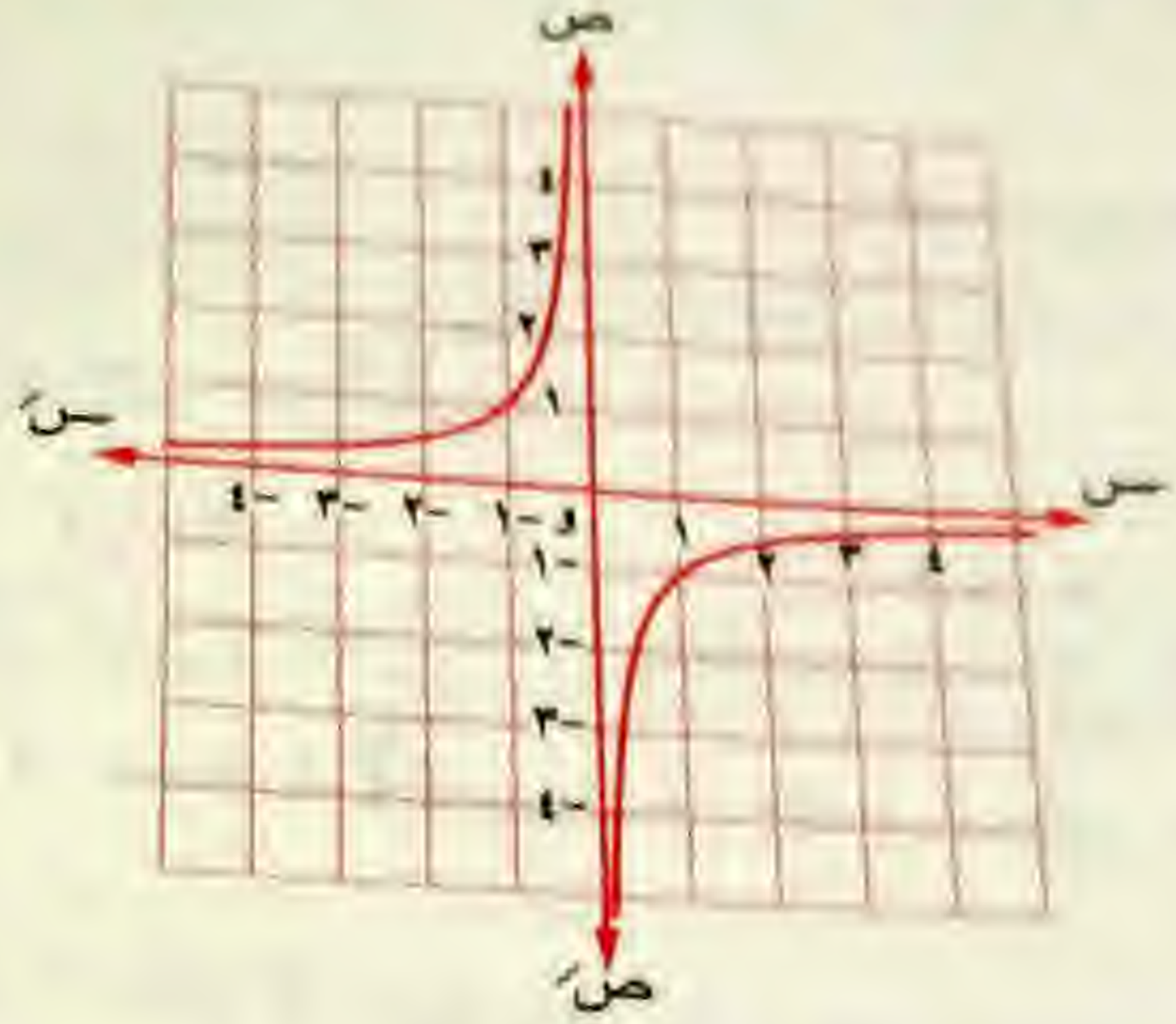
٢٣ أى من الدوال الممثلة بيانياً بالتالى تكون ليست زوجية وليست فردية ؟



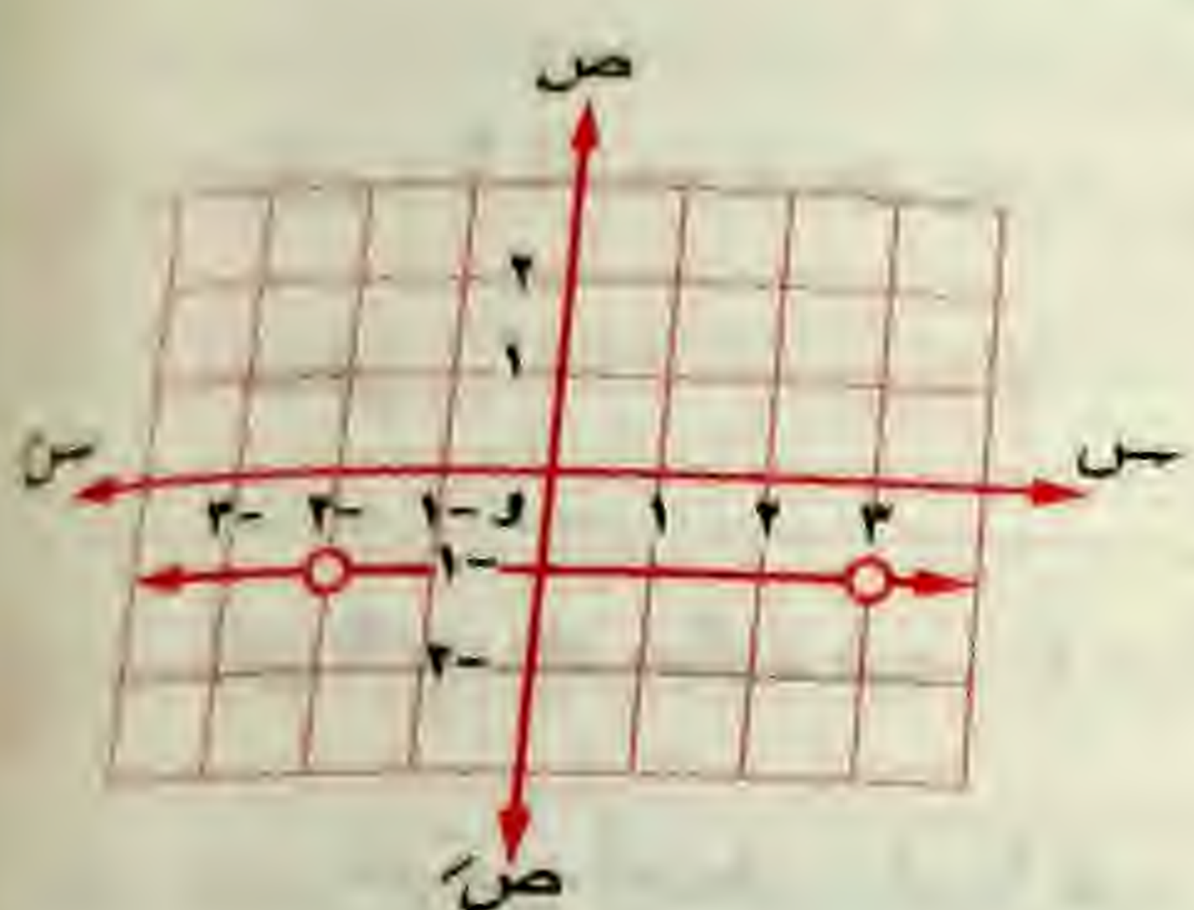
(أ)



(ب)



(جـ)



(د)

٢٤ في الشكل المقابل :

إذا كان : طا (د ء هـ حـ) = $\frac{٣}{٤}$

فإن طول نصف قطر الدائرة المارة

برؤوس Δ ا ب حـ = ... سم.

(أ) ٩ (ب) ٥,٧ (جـ) ٤ $\frac{٣}{٤}$ (د) ٣,٧٥

٢٥ إذا كانت : د (س) = س^٢ + |س| حيث س عدد حقيقي

فإن مجموعة حل المعادلة د (س) = ٢ في ح تساوي ....

(أ) {-٢} (ب) {-٢ ، -١ ، ١}

(جـ) {١ ، -١} (د) {١}

---

٢٦ نها (س ← ٢) √(٤ - س^٢) = ...

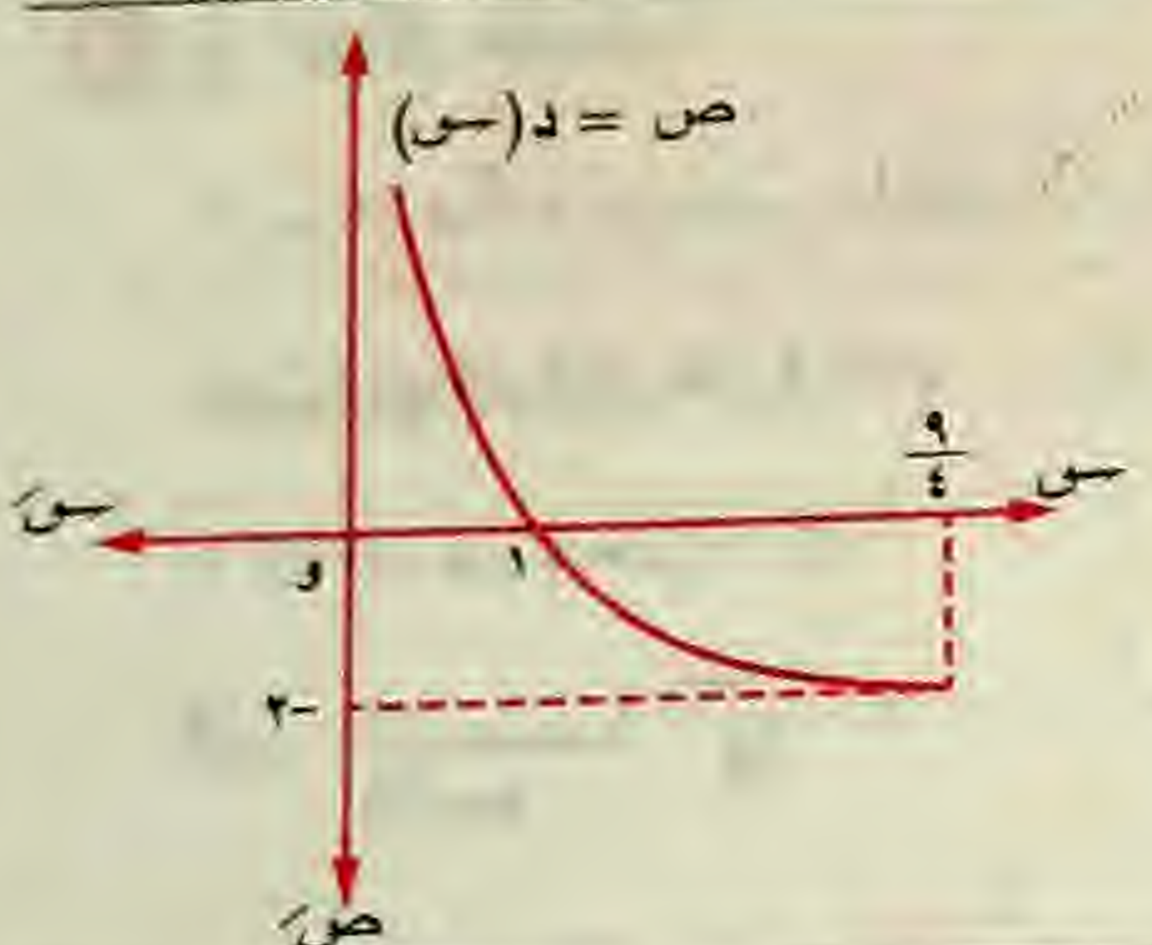
(أ) -١ (ب) صفر (جـ) ٢ (د) غير موجودة.

---

٢٧ إذا كان الشكل المقابل يمثل منحنى

الدالة د : د (س) = لو_م س

فإن : لو_م (١٦/٨١) = ...



(أ) -٢ (ب) ١

(جـ) ٢ (د) ٤

---

٢٨ نها (س ← ٠) (١ - جتا س + جا س) / (١ - جتا س - جا س) = ...

(أ) ١ (ب) -١ (جـ) ٠ (د) ∞

---

٢٩ إذا كان محيط المثلث أ ب جـ = ٣٣ سم ، جا أ + جا جـ = ٢/٣ ، جا ب = ١/٤

فإن : أ جـ = ... سم

(أ) ٦ (ب) ٩ (جـ) ١٢ (د) ١٥

---

٣٠ مدى الدالة د : د (س) = (س + ١) / (س + ٢) يساوي ....

(أ) ح (ب) ح - {-٢} (جـ) ح - {١} (د) ح₊

---

٣١ إذا كانت : د (س) = أ س + ب ، د^{-١} (٩) = ٣ ، د^{-١} (٥) = ٢

فإن : أ + ب = ...

(أ) -١ (ب) ١ (جـ) ٧ (د) -٧

---

٣٢ نها (س ← -١) (٢ |س + ١|) / (س + ١) = ...

(أ) ٢ (ب) -٢ (جـ) ٠ (د) غير موجودة.

النمـوذج العاشر

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ لو ظا ١° + لو ظا ٢° + لو ظا ٣° + ... + لو ظا ٨٨° + لو ظا ٨٩° = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ١٠ (د) ٨٩

---

٢ في الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث مرسوم داخل دائرة

طول نصف قطرها ٤ سم

، ق (د ب أ حـ) = $\theta^{ء}$

فإن : $\lim_{\theta \to 0} \frac{\text{ب حـ}}{\theta^{ء}}$ = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

---

٣ إذا كانت النسبة بين قياسات زوايا المثلث هى ٨ : ٣ : ١ فإن النسبة بين طولى أكبر ضلعين فى المثلث هى ....

(أ) $\sqrt{3}$: ٢ (ب) $\sqrt{6}$: ٢ (جـ) ٨ : ٣ (د) ٨ : ٥

---

٤ $\lim_{\text{س} \to -2} \frac{\sqrt{\text{س} + 7} - 2}{\text{س} + 3}$ = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) $\frac{1}{4}$ (د) $\frac{1}{2}$

---

٥ إذا كان : $3^{\text{أ}} = 4^{\text{ب}}$ فإن : $9^{\frac{\text{أ}}{\text{ب}}} + 16^{\frac{\text{ب}}{\text{أ}}}$ = ...

(أ) ٧ (ب) ١٢ (جـ) ٢٠ (د) ٢٥

---

٦ إذا كانت : $\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{3\,\text{ك}\,|\text{س}|}{4\,\text{س} + 3} = 6$ فإن : ك = ...

(أ) ٦ (ب) $\frac{3}{4}$ (جـ) ٨ (د) ٣

٧ إذا كانت د : د (س) = س² فإن صورة منحنى د بالانعكاس فى محور السينات والانتقال ٣ وحدات فى اتجاه و س ووحدتين فى اتجاه و ص هى ....

(أ) − (س − ٣)² − ٢ (ب) − (س + ٣)² + ٢

(جـ) − (س + ٣)² − ٢ (د) − [(س + ٣)² + ٢]

---

٨ إذا كانت الدالة د : د (س) = { س² + أ س − ٢ ، س < ٢ ؛ ٤ ، س = ٢ ؛ ٥ أ + ب س ، س > ٢ } متصلة عند س = ٢

أوجد قيمتى : أ ، ب

---

٩ أ ب جـ مثلث محيطه ٧٠ سم ، أ = ٢٦ سم ، ق (∠ أ) = ٦٠° أوجد مساحة سطحه.

---

١٠ إذا كان : د (س) = س + ١ ، ر (س) = $\frac{س^2 - ١}{س - ١}$

فإن : نهـا (ر ∘ د) س = ... عندما س ← ١

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) −٢ (د) ٣

---

١١ إذا كان : لو٢ ٣ × لو٣ ٤ × لو٤ ٥ × ... × لوν (ν + ١) = ١٠ فإن : ν = ...

(أ) ٩ (ب) ١٠ (جـ) ١١ (د) ١٠٢٣

---

١٢ مجال الدالة د : د (س) = $\sqrt{س^2 - ١}$ هو ....

(أ)]−١ ، ١[(ب) [−١ ، ١] (جـ) ع −]−١ ، ١[(د) ع − {−١ ، ١}

---

١٣ أ ب جـ مثلث فيه : ق (∠ أ) = ١١٢° ، ق (∠ ب) = ٣٣° ، ب جـ = ١٩ سم

فإن طول قطر الدائرة المارة برؤوسه = ... سم

(أ) ١٦ (ب) ١٧ (جـ) ٣٢ (د) ٣٣

---

١٤ إذا كان : ٢^س = ٢٠ ، ν < س < ν + ١ ، ν عدداً صحيحاً فإن : ν = ...

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ١٠

١٥ فى Δ س ص ع يكون ص² + ع² − س² = ٢ ص ع × ....

(أ) جتا س (ب) جا ع (جـ) جتا ع (د) جا س

---

١٦ إذا كانت : د (س) = { ٣ س − ١ ، س ≠ ٢ ؛ ٦ ، س = ٢ } فإن : نهـــا (س ← ٢) د (س) = ...

(أ) −٥ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ليس لها وجود.

---

١٧ إذا كان : د (س) = لو٢ (س + أ) وكان : د⁻¹ (٢) = −٣ فإن : أ = ...

(أ) −٧ (ب) ٧ (جـ) ٣ (د) ١

---

١٨ تكون الدالة الأسية التى أساسها أ تزايدية إذا كانت ....

(أ) أ > ٠ (ب) أ > ١ (جـ) ٠ < أ < ١ (د) أ = ١

---

١٩ نهـــا (س ← ∞) (٤ − ٣ س − س³) = ...

(أ) ∞ (ب) غير موجودة. (جـ) −١ (د) −∞

---

٢٠ إذا كانت د دالة فردية ، أ ∈ مجال د فإن : د (أ) + د (−أ) = ...

(أ) ٢ د (أ) (ب) ٢ د (−أ) (جـ) صفر (د) د (أ)

---

٢١ أوجد جبريًا فى ح مجموعة حل المعادلة : | س − ٣ | = | ٩ − ٢ س |

---

٢٢ إذا كانت : د دالة فردية فإن : (٢ د (٣) + ٧ د (−٣)) / (١٠ د (−٣)) = ...

(أ) ٣ (ب) −٣ (جـ) ١/٢ (د) −١/٢

---

٢٣ إذا كانت : د (س) = √(س + ٣) ، ر (س) = √(٦ − س)

فإن : (د ∘ ر) (٥) = ...

(أ) غير معرفة. (ب) صفر (جـ) ٥ (د) ٢

---

٢٤ مدى الدالة د : د (س) = { ٢ س + ٣ ، س > ٣ ؛ ٩ ، س < ٣ } هو ....

(أ) {٣} (ب) ح (جـ)]٩ ، ∞[(د) [٩ ، ∞[

٢٥ فى Δ ا ب حـ إذا كان : ق(∠ب) = ٦٠° ، ق(∠حـ) = ٣٠° ، حـَ = ٤ سم
فإن : بَ = ... سم.

(أ) ٤ (ب) ٨ (جـ) ٢ $\sqrt{٣}$ (د) ٤ $\sqrt{٣}$

---

٢٦ نهـا (س ← $\frac{\pi}{4}$) $\frac{١ - ظا س}{جا س - جتا س}$ = ...

(أ) ١ (ب) -١ (جـ) صفر (د) ليس لها وجود.

---

٢٧ إذا كانت مساحة Δ ا ب حـ هى م ، نق طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه
فإن : $\frac{٤ \text{ نق} \times م}{أَ بَ حـَ}$ = ...

(أ) $\frac{أ}{جا ا}$ (ب) جتا ا (جـ) ١ (د) نق

---

٢٨ إذا كانت : د(س) = ٧س + ١

فأوجد قيمة س التى تحقق : د(٢س - ١) + د(س - ٢) = ٥٠

---

٢٩ إذا كان : نهـا (س ← ٢⁺) د(س) = ل ، نهـا (س ← ٢⁻) د(س) = م وكانت الدالة متصلة
عند س = ٢ فإن : ل^{٢} + م^{٢} - ٢ ل م = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) صفر (د) ٦

---

٣٠ إذا كان : أَ = جا ب ، بَ = جا حـ ، حـَ = جا ا فإن محيط الدائرة المارة برؤوس
المثلث ا ب حـ يساوى ....

(أ) ١ (ب) ٢ π (جـ) $\frac{١}{٢}$ π (د) π

---

٣١ مجموعة الحل فى ح للمتباينة : $\sqrt{٩س^{٢} - ١٢س + ٤}$ + ٢ | ٤ - ٦س | ≥ ٢٠
هى ....

(أ) ح -] $\frac{-٢}{٣}$ ، ٢ [(ب)] - $\frac{٢}{٣}$ ، ٢ [

(جـ) ح - [$\frac{-٢}{٣}$ ، ٢] (د) [$\frac{-٢}{٣}$ ، ٢]

---

٣٢ إذا كانت : د(س) = س^{٣} + ٣س^{٢} + ٣س + ١ فإن : د$^{-١}$(س) = ...

(أ) (س + ١)^{٣} (ب) $\sqrt[٣]{س}$ - ١ (جـ) $\sqrt[٣]{س}$ + ١ (د) س^{٣} - ١

١ محافظة القاهرة

أجب عن الأسئلة الآتية :

استخدم الشكل المقابل في الإجابة عن الأسئلة من (١ – ٣) :

١ مدى الدالة هو ....

(أ) ح − {٠}　　(ب) ح −]−٢ ، ٢[

(ج) ح　　(د)]−٢ ، ٢[

٢ الدالة تكون متزايدة في ....

(أ)]−∞ ، ٠[فقط.　　(ب)]٠ ، ∞[فقط.

(ج)]−∞ ، ٠[∪]٠ ، ∞[　　(د) ح −]−٢ ، ٢[

٣ الدالة تكون ....

(أ) زوجية.　　(ب) فردية.

(ج) ليست زوجية وليست فردية.　　(د) زوجية وأحادية.

---

٤ مجال الدالة د حيث د : $ح^+$ ⟵ ح ، د (س) = $\frac{س - ١}{س - ٤}$ هو ....

(أ) ح　　(ب) ح − {٠}　　(ج) $ح^+$　　(د) ح − {١}

---

٥ المنحنى د (س) = $س^٢$ − ٢ هو نفس منحنى د (س) = $س^٢$ بإزاحة مقدارها ٢ وحدات في اتجاه ....

(أ) $\overleftarrow{و س}$　　(ب) $\overleftarrow{و ص}$　　(ج) $\overrightarrow{و س}$　　(د) $\overrightarrow{و ص}$

---

٦ العبارة الخطأ فيما يلي هي ....

(أ) |س ص| = |س| × |ص|　　(ب) |س| = |− س|

(ج) |س + ص| = |س| + |ص|　　(د) $\sqrt{س^٢}$ = |س|

٧ مجموعة حل المعادلة : | س | = − س هي ....

(أ) ∅ (ب) [٠ ، ∞[(جـ)]−∞ ، ∞[(د)]−∞ ، ٠]

---

٨ إذا كان الجدول المقابل يمثل بيان كل من الدالتين د ، ر

فإن (ر ∘ د) (١) = ...

س	١	٢	٣	٤
د (س)	٣	١	٤	٢
ر (س)	٤	٣	٢	١

(أ) ١ (ب) ٢

(جـ) ٣ (د) ٤

---

٩ إذا كانت الدالة د زوجية في [أ ، ب] ، أ > ٠ فإن : ب = ...

(أ) أ (ب) − أ (جـ) ٢ أ (د) $أ^٢$

---

١٠ إذا كانت د دالة حيث د :]−٥ ، ٥[⟵ ح ، د (س) = $س^٣$ فإن الدالة د (س) تكون ....

(أ) زوجية. (ب) فردية.

(جـ) أحادية. (د) ليست زوجية وليست فردية.

---

١١ مجال الدالة د : د (س) = $\frac{٥}{\sqrt{س - ٤}}$ هو ....

(أ) [٤ ، ∞[(ب)]٤ ، ∞[(جـ)]−∞ ، ٤] (د)]−∞ ، ٤[

---

١٢ نقطة رأس منحنى الدالة د : د (س) = | س + ٣ | − ٢ هي ....

(أ) (٣ ، ٢) (ب) (−٣ ، −٢) (جـ) (−٣ ، ٢) (د) (٣ ، −٢)

---

١٣ إذا كانت : د (س) = $٣^س$ ، ر (س) = $٩^س$

فإن قيمة س التي تحقق د (٢ س − ١) + ر (س + ١) = ٧٥٦ هي ....

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٧

١٤ مجموعة حل المتباينة : $|س - ٢| \geq -١$ هى ....

(أ) $]-٢ ، ٦[$ (ب) $[-٢ ، ٦]$ (جـ) ع (د) $\emptyset$

١٥ لو $\left(\frac{أ^٢}{ب جـ}\right) =$ .... حيث ب ، جـ $\in$ $ع^+$

(أ) ٢ لو أ + لو ب + لو جـ (ب) ٢ لو أ − لو ب + لو جـ

(جـ) ٢ لو أ − لو ب − لو جـ (د) ٢ (لو أ − لو ب − لو جـ)

١٦ إذا كان : $٣^{س - ٢} = ٢^{س - ٢}$ فإن : س = ...

(أ) ٣ (ب) −٢ (جـ) صفر (د) ٢

١٧ إذا كانت د دالة فردية على [− س ، س] فإن : د (− س) + د (س) = ...

(أ) ٢ س (ب) − $س^٢$ (جـ) −٢ س (د) صفر

١٨ الدالة الأحادية من بين الدوال المعرفة بالقواعد الآتية هى ....

(أ) د (س) = س + ١ (ب) د (س) = $س^٢$

(جـ) د (س) = |س| (د) د (س) = ٥

١٩ مجموعة حل المتباينة : $\frac{١}{|س|} \geq ١$ هى ....

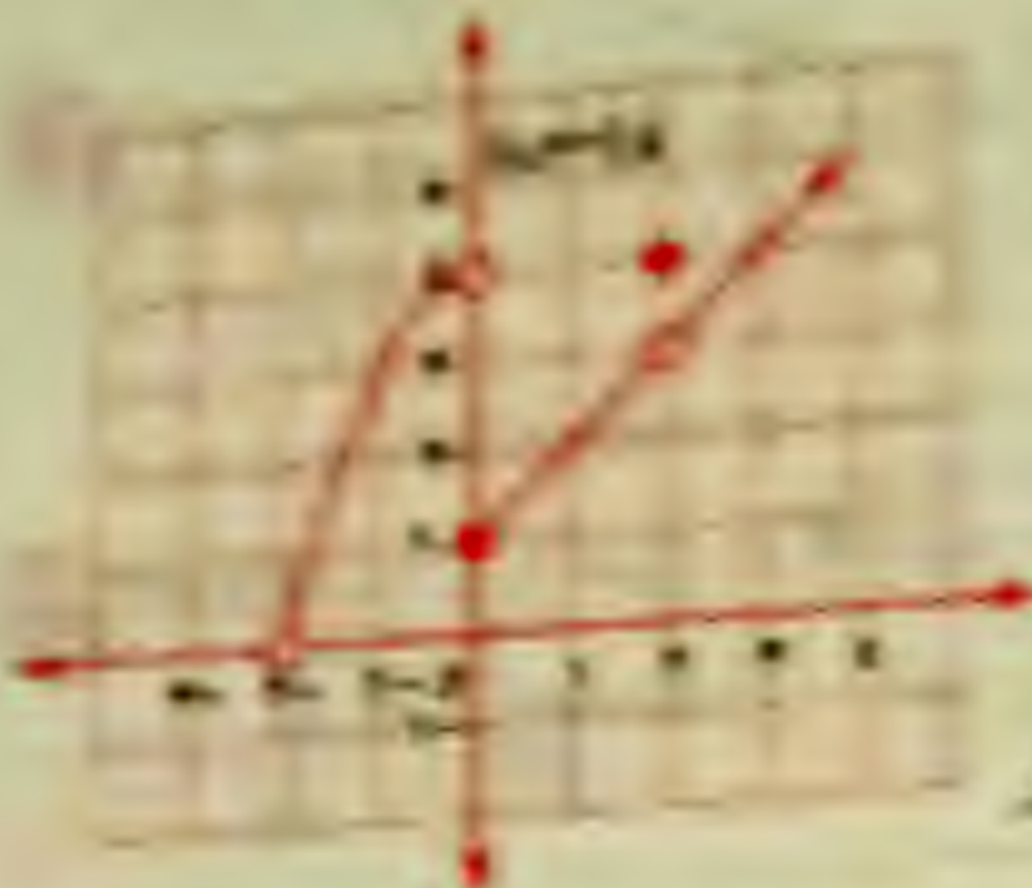
(أ) $[-١ ، ١]$ (ب) $]-١ ، ١[$

(جـ) $[-١ ، ١] - \{٠\}$ (د) $]-١ ، ١[- \{٠\}$

٢٠ إذا كانت : $٣^{د(س)} = ٢ س - ١$ فإن : $د^{-١} (٠) =$ ....

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) ٢ (د) ٥

استخدم الشكل المقابل في الإجابة عن الأسئلة من (٢١ - ٢٣)،



٢١ د(٢) = ...

(أ) صفر   (ب) ٣   (ج) ١   (د) غير معرفة

٢٢ نهـا د(س) = ...

(أ) صفر   (ب) ٣   (ج) ١   (د) غير موجودة

٢٣ د(س) متصلة عند س = ...

(أ) ١   (ب) ٢   (ج) صفر   (د) -٢

---

٢٤ نهـا $\frac{س^٢ - ٤}{س - ٢}$ = ...

(أ) صفر   (ب) غير موجودة   (ج) ٤   (د) ٢

---

٢٥ نهـا $\frac{٢ س}{ظا ٣ س}$ = ...

(أ) صفر   (ب) ١   (ج) $\frac{٢}{٣}$ (د) $\frac{٣}{٢}$

---

٢٦ نهـا $\frac{\sqrt{س + ١} - ٢}{س - ٣}$ = ...

(أ) ٤   (ب) $\frac{١}{٤}$ (ج) $\frac{١}{٢}$ (د) ٢

---

٢٧ نهـا $\frac{س^٢ - ٣٦}{س^٣ - ٨}$ = ...

(أ) $\frac{٣}{٢}$ (ب) $\frac{١٠}{٣}$ (ج) $\frac{٤}{٣}$ (د) $\frac{٢٤}{٣}$

---

٢٨ نهـا $\frac{س^٣ + س^٢ - ٢}{س - ١}$ = ...

(أ) ٥   (ب) صفر   (ج) ٨   (د) -٣

٢٩ نهـــا (٣ + ٢ س ... = [illegible]

(أ) ∞ (ب) − ∞ (ج) صفر (د) ٢

٣٠ نهـــا [illegible] = ...

(أ) $\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (ج) صفر (د) ٣

٣١ الدالة د : د (س) = $\sqrt{س - ١}$ متصلة في ....

(أ) [١ ، ∞[(ب) [−١ ، ∞[(ج)]−∞ ، ١] (د)]−∞ ، −١]

٣٢ $\underset{س \to ٠}{\text{نهـــا}} \frac{س \text{ جا } ٢س}{س^٢}$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (ج) ٢ (د) ٤

٣٣ في Δ أ ب حـ إذا كان : $\frac{\text{جا أ}}{٤} = \frac{\text{جا ب}}{٩} = \frac{\text{جا حـ}}{٧}$ فإن أكبر زاوية قياسًا تكون ....

(أ) ∠ أ (ب) ∠ ب (ج) ∠ حـ (د) قائمة.

٣٤ Δ س ص ع فيه : $\frac{سَ}{\text{جا س}}$ = ٦ فإن طول قطر الدائرة المارة برؤوسه = ... وحدة طول.

(أ) ٦ (ب) ١٢ (ج) ٣ (د) ٩

٣٥ إذا كان : ٢ جا أ = ٣ جا ب = ٤ جا حـ

فإن : أَ : بَ : حـَ = ... : .... : ....

(أ) ٢ : ٣ : ٤ (ب) ٤ : ٣ : ٢ (ج) ٦ : ٤ : ٣ (د) ٣ : ٤ : ٦

٣٦ أ ب حـ مثلث فيه : حـَ = ٤,٥ سم ، ق (∠ أ) = ١٠٠° ، ق (∠ ب) = ١٥°

فإن أصغر الأضلاع طولًا ≃ .... (لأقرب جزء من عشرة).

(أ) ١ سم (ب) ١,٣ سم (ج) ١,٥ سم (د) ١,٧ سم

٣٧ قياس أكبر زاوية فى المثلث الذى أطوال أضلاعه ٣ سم ، ٥ سم ، ٧ سم يساوى ....

(أ) ١٥٠° (ب) ١٢٠° (جـ) ٦٠° (د) ٣٠°

٣٨ إذا كان : أ ب جـ ء شكل رباعى دائرى فإن : جتا أ + جتا جـ = ...

(أ) ١ (ب) صفر (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) -١

٣٩ أ ب جـ مثلث فيه : أ = ٢٧ سم ، ق (∠ب) = ٨٢° ، ق (∠جـ) = ٥٦°

فإن مساحة سطحه لأقرب سم^{٢} = ...

(أ) ٥٤٠ (ب) ٤٤٧ (جـ) ٣٥٠ (د) ٤٠٠

٤٠ أ ب جـ مثلث فيه : ب = ٤ سم ، أ + جـ = ١١ سم ، أ - جـ = ١ سم

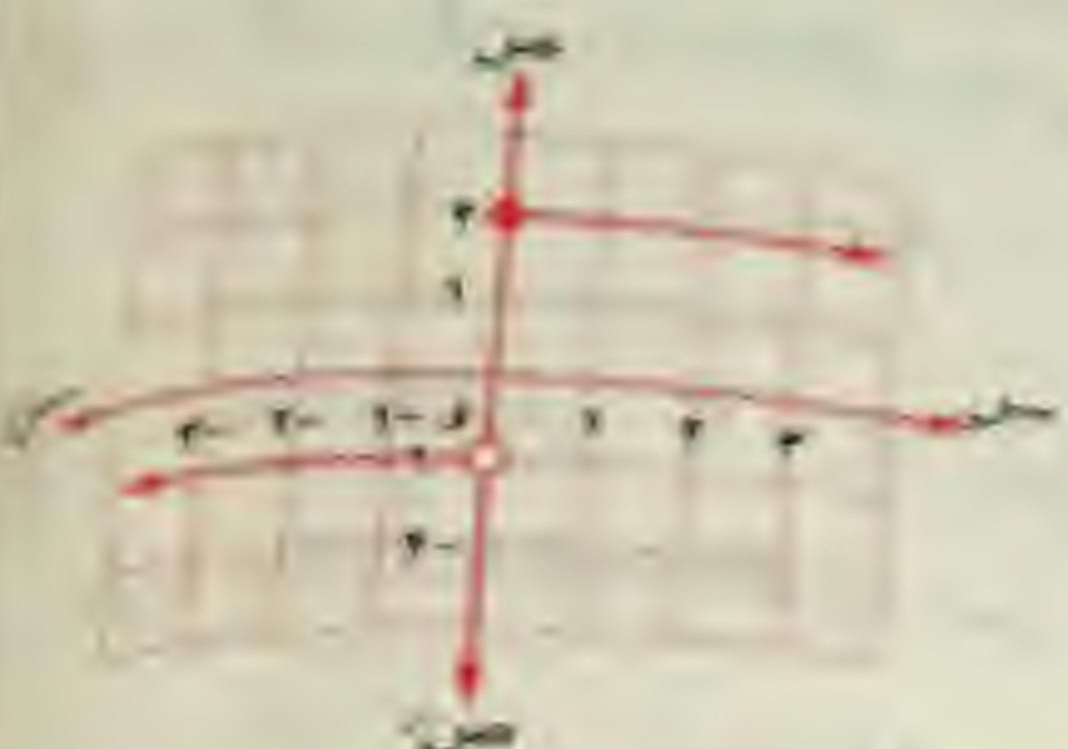
فإن : ....

(أ) المثلث منفرج الزاوية. (ب) المثلث قائم الزاوية.

(جـ) ق (∠ب) = ٢ ق (∠أ) (د) ق (∠أ) = ٢ ق (∠ب)

٢ محافظة الجيزة

أجب عن الأسئلة الآتية :



١ مدى الدالة الممثلة بالشكل المقابل هو ....

(أ) {−١ ، ٢}

(ب) {٢}

(جـ) {−٢ ، ٢}

(د) {−١}

---

٢ إذا كان : لو$_{٣}$ س = لو$_{٩}$ ٩ فإن : س = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٩ (د) ١٢

---

٣ إذا كانت : د (س) = (٥)$^{-س}$ فإن : $\frac{د(س - ١)}{د(س + ١)}$ = ...

(أ) ٥ (ب) $\frac{١}{٥}$ (جـ) ٢٥ (د) $\frac{١}{٢٥}$

---

٤ نهـا (س ← ٠) $\frac{\sqrt{١ - جا^{٢} س}}{س}$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) −١ (د) غير ذلك.

---

٥ الدالة الزوجية المتصلة عند النقطة (أ ، ب) تكون متصلة أيضاً عند النقطة ....

(أ) (−أ ، ب) (ب) (−أ ، −ب) (جـ) (أ ، −ب) (د) غير ذلك.

---

٦ المثلث أ ب جـ الذي فيه : أ ب = ٣ سم ، ب جـ = ٥ سم

، أ جـ = ٧ سم فإن : ق (∠ ب) = ...°

(أ) ٣٠ (ب) ٦٠ (جـ) ١٢٠ (د) ١٥٠

٧ نقطة تماثل الدالة د : د (س) = $\frac{س + ١}{س}$ هى ....

(أ) (١ ، ٠) (ب) (٠ ، ١) (جـ) (٠ ، ٠) (د) (١ ، -١)

---

٨ مجموعة حل المعادلة : لو$_{\sqrt{٢}}$ س + لو$_{\sqrt{٢}}$ (س + ١) = ٢ هى ....

(أ) {١ ، ٢} (ب) {-٢} (جـ) {١ ، -٢} (د) {١}

---

٩ لو$_{س ص}$ $\left(\frac{١}{س}\right)$ + لو$_{س ص}$ $\left(\frac{١}{ص}\right)$ = ...

(أ) ١ (ب) -١ (جـ) س ص (د) - س ص

---

١٠ نهـا$_{س \leftarrow ١٦}$ $\frac{\sqrt[٤]{س^{٧}} - ١٢٨}{س - ١٦}$ = ...

(أ) ١٢ (ب) ١٤ (جـ) ١٦ (د) ٢٠

---

١١ إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} \frac{٢ س + جا س}{طا ٢ س + ٤ س} & ، س < ٠ \\ ٥ س + \frac{١}{٢} & ، س > ٠ \end{cases}$

فإن : نهـا$_{س \leftarrow ٠}$ د (س) = ...

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) غير موجودة.

---

١٢ فى المثلث س ص ع إذا كان : سَ = ٢٠ سم ، عَ = ١٦ سم

، جتا ص = ٠,٤ فإن : صَ = ... سم

(أ) ٢٠ (ب) ١٦ (جـ) ٢٥ (د) ١٥

---

١٣ منحنى الدالة ر : ر (س) = |س + ٣| هو نفسه منحنى د (س) = |س| بإزاحة

مقدارها ٣ وحدات فى اتجاه ....

(أ) $\overleftarrow{و س}$ (ب) $\overleftarrow{و س}$ (جـ) $\overleftarrow{و ص}$ (د) $\overleftarrow{و ص}$

١٤ إذا كانت : د(س) = ٣^س ، فإن : $د^{-١}$(س) = ...

(أ) لو$_{س}$ ٣ (ب) لو$_{٣}$ س (جـ) $س^{-٣}$ (د) ٣س

١٥ الدالة د : د(س) = $\sqrt{س + ٣}$ مجالها هو ....

(أ)]−٣ ، ∞[(ب)]−∞ ، ٣[(جـ) [٣ ، ∞[(د) [−٣ ، ∞[

١٦ $\lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{طا س}{س}$ = ...

(أ) ١ (ب) $\frac{\pi}{٣}$ (جـ) $\frac{\pi}{٤}$ (د) $\frac{٤}{\pi}$

١٧ $\lim_{ن \to \infty} \frac{\sqrt[ن]{٣}}{٩}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) ∞ (جـ) $\frac{١}{٩}$ (د) صفر

١٨ فى الشكل المقابل إذا كان محيط Δ أ ب حـ = ٢٠ سم

فإن طول قطر الدائرة المارة برؤوسه يساوى = ... سم.

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

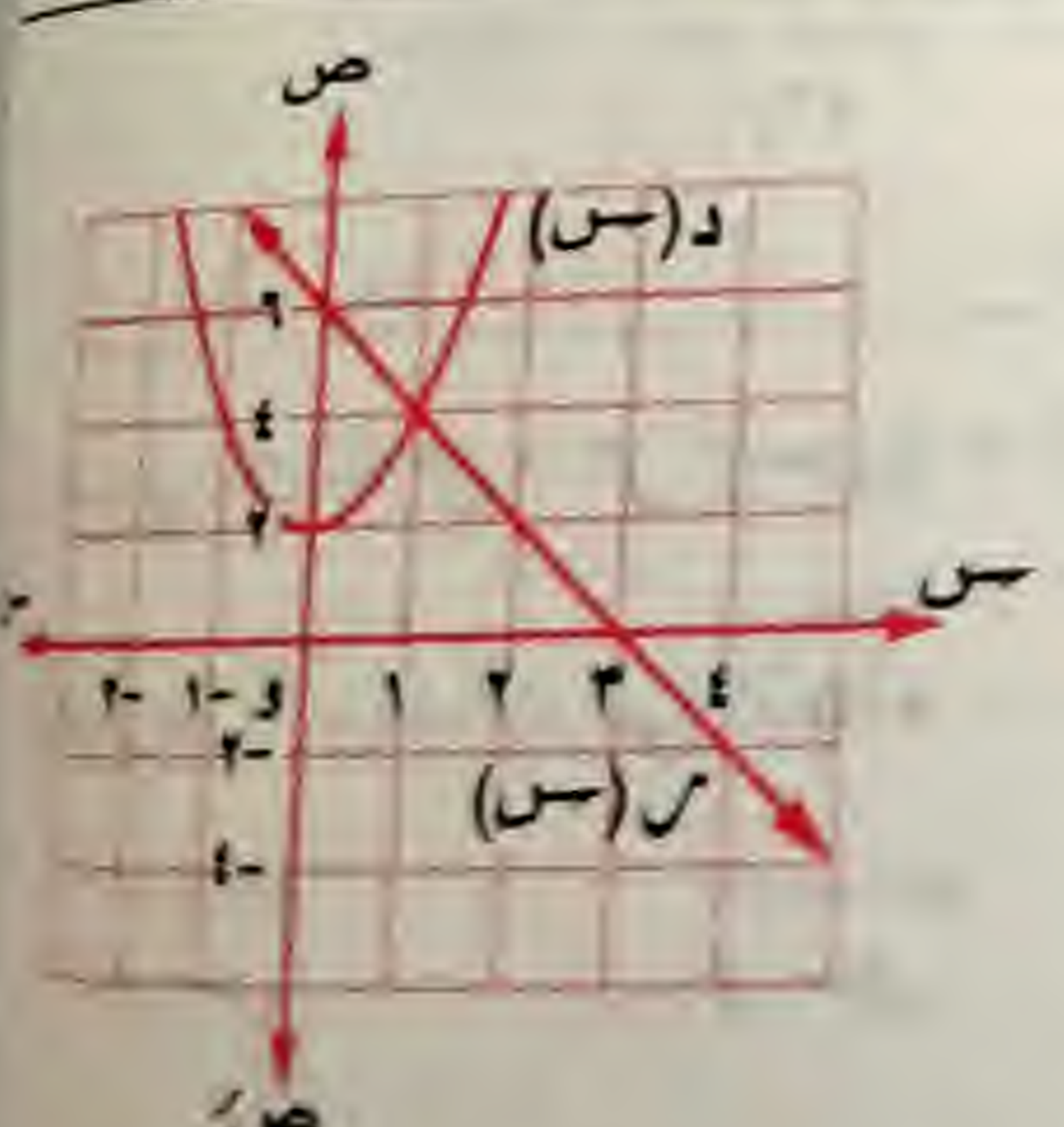
١٩ مجموعة حل المعادلة : لو$_{س}$ ٣ = −٢ فى ح هى ....

(أ) $\{\frac{١}{٩}\}$ (ب) {٩} (جـ) $\{\sqrt{٣}\}$ (د) $\{\frac{١}{\sqrt{٣}}\}$

٢٠ الشكل المقابل يوضح منحنى

الدالتين د ، ر

فإن : (ر ∘ د) (١) = ...



(أ) ٥ (ب) −٢

(جـ) −٤ (د) ٦

[illegible] نها ... $\frac{(س^٣) - ٢٧}{س - ٣}$ = ٢٧ فإن [illegible] = ...

(أ) [illegible] (ب) ٤ (جـ) ٩ (د) ١٢

[illegible] نها ... = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) غير ذلك

في المثلث س ص ع يكون ص^٢ + ع^٢ - س^٢ = ٢ ص ع × ....

(أ) جا س (ب) جا ع (جـ) جتا ع (د) جتا س

الدالة : د(س) = $\frac{س جا س}{|س|}$ من حيث نوعها تكون ....

(أ) فردية. (ب) زوجية.

(جـ) ليست فردية وليست زوجية. (د) غير ذلك.

إذا كانت : د(س) = $\sqrt{س^٢}$ + |س| فإن مجموعة حل المعادلة : د(س) = ٢ في ح ....

(أ) {٢ ، -٢} (ب) {١ ، -١} (جـ) {٢ ، ٠} (د) {-١ ، ٠}

إذا كان |س| < ٢ ، ٢ ∈ ح فإن : س ∈ ....

(أ) ح - [-٢ ، ٢] (ب) [-٢ ، ٢]

(جـ) ح -]-٢ ، ٢[(د)]-٢ ، ٢[

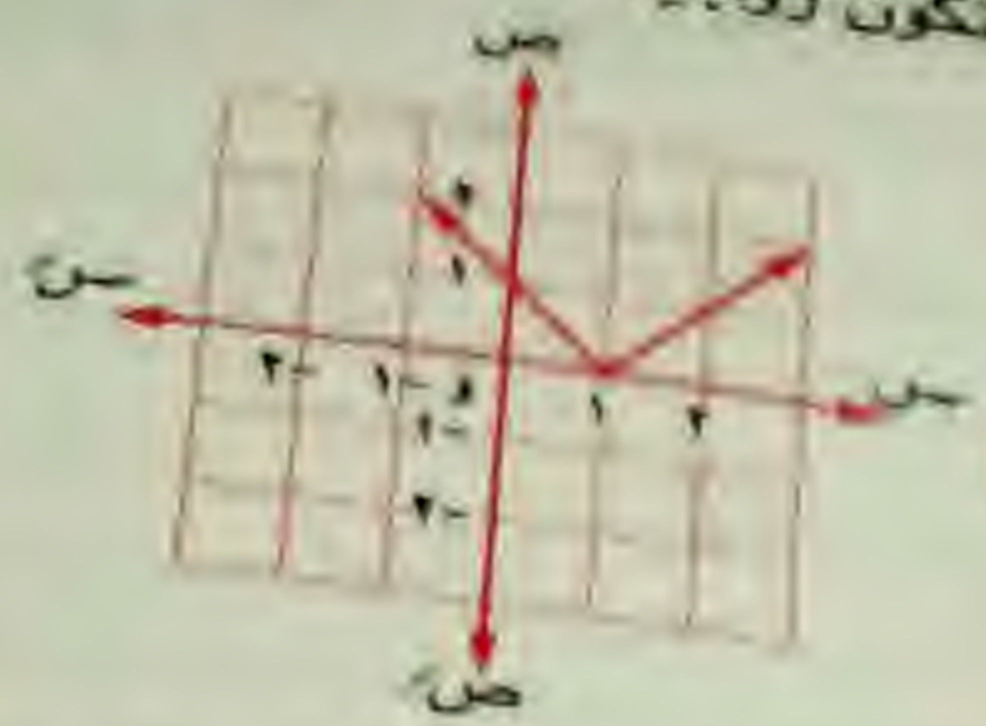
نها$_{س \to ٣}$ $\frac{س^٢ - ١١ س + ٢٤}{٤ س - ١٢}$ = ...

(أ) -٥ (ب) ٤ (جـ) $\frac{-٥}{٤}$ (د) $\frac{١١}{٤}$

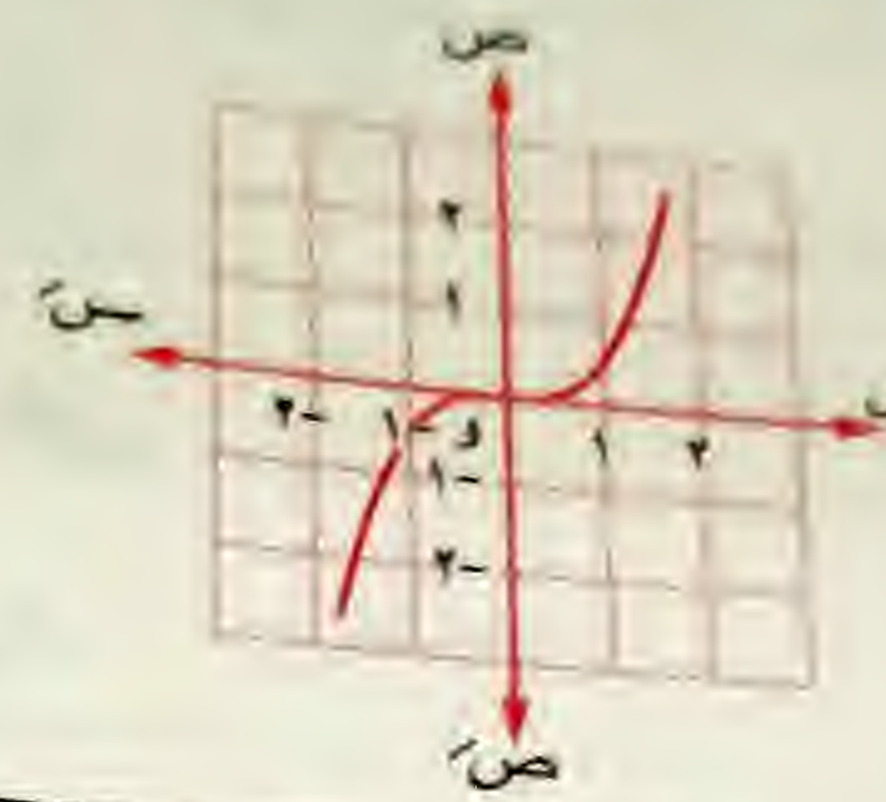
٢٨ أى من الدوال الممثلة بيانياً بالأشكال الآتية تكون زوجية ؟

(أ)

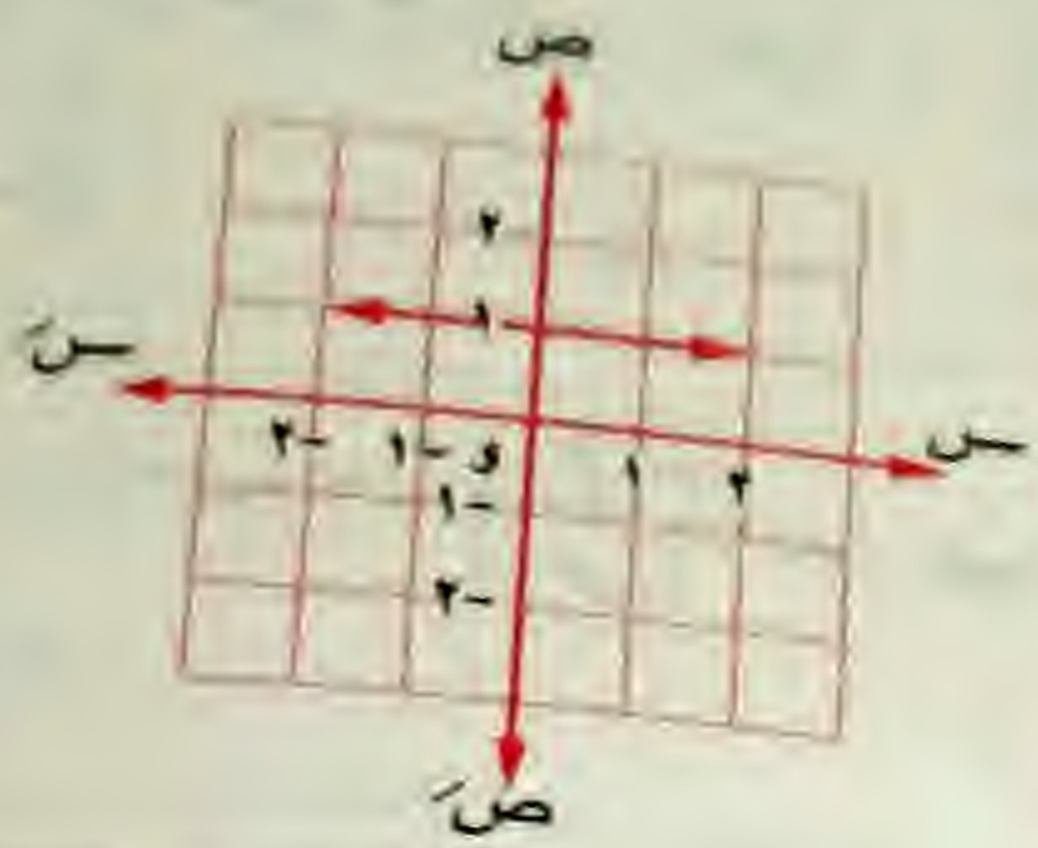
(ب)



(جـ)



(د)



---

٢٩ مجموعة حل المعادلة : $٣^{س+١} + ٣^{س} = ١٢$ فى ح هى ....

(أ) $\{٠\}$ (ب) $\{٣\}$ (جـ) $\{١\}$ (د) $\{١ ، ٠\}$

---

٣٠ عدد الحلول الممكنة للمثلث أ ب حـ الذى فيه : أ = ٨ سم ، ب = ١٠ سم ، ق (∠ أ) = ٤٢° هو ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) عدد لا نهائى. (د) لا يوجد.

---

٣١ مجموعة حل المتباينة : $\frac{١}{|س|} \geq ٢$ هى ....

(أ) $[٠ ، \frac{١}{٢}]$ (ب) $]-\frac{١}{٢} ، ٠[$

(جـ) $[-\frac{١}{٢} ، \frac{١}{٢}] - \{٠\}$ (د) $[-\frac{١}{٢} ، \frac{١}{٢}]$

---

٣٢ الدالة د : د (س) = $\begin{cases} ٣ & ، س > ٠ \\ -٣ & ، س < ٠ \end{cases}$ متماثلة بالنسبة للنقطة ....

(أ) (٠ ، ٠) (ب) (٣ ، ٠) (جـ) (-٣ ، ٠) (د) (-٣ ، ٣)

إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} \text{أ} - \text{س}^{2} & \text{، س} \geq -2 \\ \text{س} & \text{، س} < -2 \end{cases}$ متصلة عند س = −٢

فإن : أ = ...

(أ) −٢ (ب) −٤ (جـ) ٢ (د) ٤

مجموعة حل المعادلة : $\frac{|\text{س}|}{\text{س}} = 1$ فى ح هى ....

(أ) {٠} (ب) ح^{+} (جـ) ح^{-} (د)]٠ ، ∞[

فى المثلث أ ب جـ يكون : $\frac{\text{٥ جـ}}{\text{جا جـ}}$ = ... نق

(أ) ٥ (ب) ١٠ (جـ) ١٥ (د) ٢٠

فى المثلث س ص ع إذا كان : $\frac{\text{جا س}}{3} = \frac{\text{٢ جا ص}}{5} = \frac{\text{جا ع}}{4}$

فإن : سَ : صَ : عَ = ...

(أ) ٣ : ٥ : ٤ (ب) ٣ : ٤ : ٥ (جـ) ٧ : ١٠ : ٨ (د) ٦ : ٥ : ٨

محور تماثل الدالة د : د (س) = $\text{س}^{2} - 1$ هو المستقيم ....

(أ) س = ١ (ب) س = ٠ (جـ) ص = ١ (د) ص = ٠

$\underset{\text{س} \to \frac{1}{2}}{\text{نها}} \frac{8\text{س}^{3} - 1}{32\text{س}^{5} - 1}$ = ...

(أ) $\frac{3}{5}$ (ب) $\frac{5}{3}$ (جـ) $\frac{3}{20}$ (د) $\frac{1}{4}$

فى المثلث أ ب جـ يكون : جتا (أ + ب) = ...

(أ) جتا أ + جتا ب (ب) جا أ + جا ب

(جـ) جتا جـ (د) − جتا جـ

$\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نها}} \frac{\text{أ س}^{2} - 5\text{س}}{2\text{س} + 3\text{س}^{2}} = 3$ فإن : أ = ...

(أ) ٢ (ب) ٦ (جـ) ٩ (د) ١٢

٣ محافظة الإسكندرية

أجب عن الأسئلة الآتية : (يسمح باستخدام الآلة الحاسبة)

١ مجموعة حل المعادلة : | س − ٢ | = ٥ في ح هي ....

(أ) {٧}　(ب) {−٣}　(جـ) {٧ ، −٣}　(د) [٧ ، −٣]

٢ $\lim_{س \to ١} \frac{س^{٢} - ١}{س - ١}$ = ...

(أ) ١　(ب) ٢　(جـ) ٣　(د) ٤

٣ المثلث أ ب حـ متساوي الأضلاع طول ضلعه ٨ $\sqrt{٣}$ سم فإن طول قطر الدائرة الخارجة = ... سم

(أ) ٨　(ب) ١٦ $\sqrt{٣}$　(جـ) ١٦　(د) ٤ $\sqrt{٣}$

٤ الدالة د : د (س) = ٥ مجالها هو ....

(أ) ح　(ب) $ح^{+}$　(جـ) {٥}　(د) {٠ ، ٥}

٥ $\lim_{س \to \infty} \frac{٢ س^{٢} + ١}{س^{٢} + ١}$ = ...

(أ) صفر　(ب) غير موجودة.　(جـ) ∞　(د) ٢

٦ المثلث أ ب حـ فيه : جا (ب + حـ) : جا أ + جا ب = ...

(أ) ١　(ب) حَـ : أَ + بَ　(جـ) أَ : بَ + حَـ　(د) أَ : أَ + بَ

٧ إذا كان : $لو_{٣}$ (٢ س + ٣) = ٢　فإن : س = ...

(أ) ٣　(ب) ٢　(جـ) ٩　(د) ٤

٨ $\lim_{س \to ٠} \frac{جا ٣ س}{ظا \frac{١}{٣} س}$ = ...

(أ) ٩　(ب) $\frac{١}{٣}$　(جـ) ٣　(د) ١

٨ إذا كان المثلث أ ب جـ فيه: ق(∠أ) = ١٢٠° ، أ جـ = ٦ سم ، أ ب = ١٠ سم فإن: ب جـ = ... سم

(أ) ١٤ (ب) ٢١ (جـ) ٣٥ (د) ٧

---

٩ د(س) = (س − ١)^{٢} + ٢ تكون متزايدة في الفترة ....

(أ) ح (ب)]١ ، ∞[(جـ)]−∞ ، ١[(د)]−١ ، ١[

---

١٠ إذا كان: د(س) = س^{٢} ، ر(س) = س + ٣ فإن: (د + ر)(س) تكون ....

(أ) أحادية. (ب) فردية. (جـ) زوجية. (د) خطية.

---

١١ إذا كانت د: د(س) = $\begin{cases} \frac{س^{٢} - ٩}{س - ٣} & \text{عندما س} \neq ٣ \\ ٢أ & \text{عندما س} = ٣ \end{cases}$ متصلة عند س = ٣

فإن: أ = ...

(أ) ٢ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) −٣ (د) ٣

---

١٢ قياس أكبر زاوية في المثلث الذي أطوال أضلاعه ٣ سم ، ٥ سم ، ٧ سم = ...°

(أ) ١٢٠ (ب) ١٥٠ (جـ) ١٣٥ (د) ٩٠

---

١٣ نقطة تماثل الدالة د: د(س) = س^{٣} − ٢ هي ....

(أ) (٠ ، ٢) (ب) (٠ ، −٢) (جـ) (٢ ، ٠) (د) (−٢ ، ٠)

---

١٤ $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٢} + س - ٦}{س^{٢} - ٤}$ = ...

(أ) $\frac{٤}{٥}$ (ب) $\frac{٥}{٤}$ (جـ) $\frac{٢}{٥}$ (د) $\frac{-٢}{٥}$

---

١٥ المثلث ل م ن فيه: ل = ٥ سم ، م = ٧ سم ، ق(∠ن) = ٦٠°

فإن: ن = ... سم (لأقرب جزء من عشره).

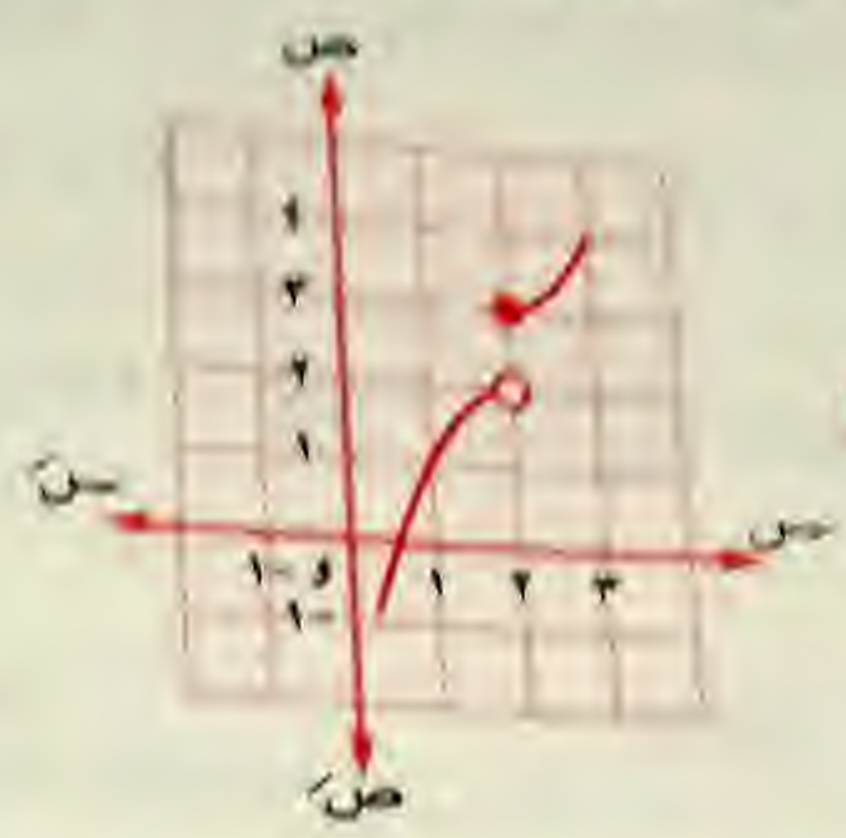
(أ) ٦,٢ (ب) ٥ (جـ) ٤,٣ (د) ٣,٥

١٧ إذا كانت : $س^{\frac{٢}{٣}} = ٤$ ، فإن : س = ...

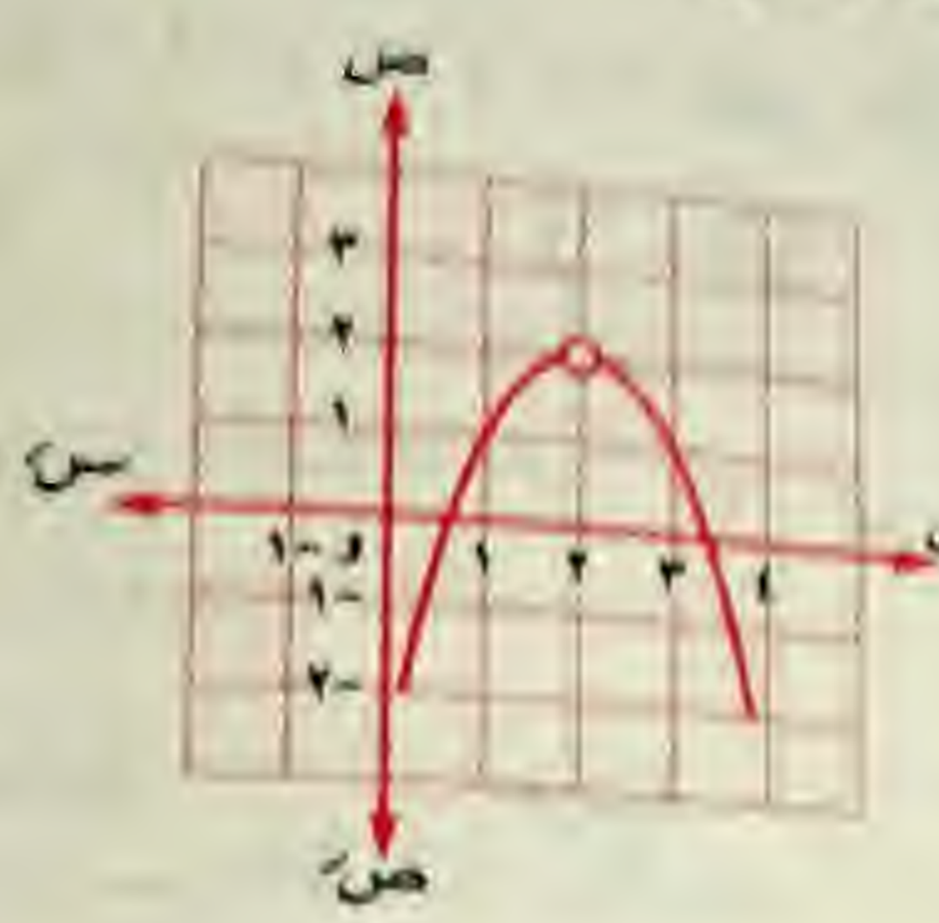
(أ) ٤ (ب) ١٦ (جـ) ± ٤ (د) ± ٣٢

١٨ الشكل الذى يوضح أن الدالة متصلة عند س = ٢ هو ....

(أ)

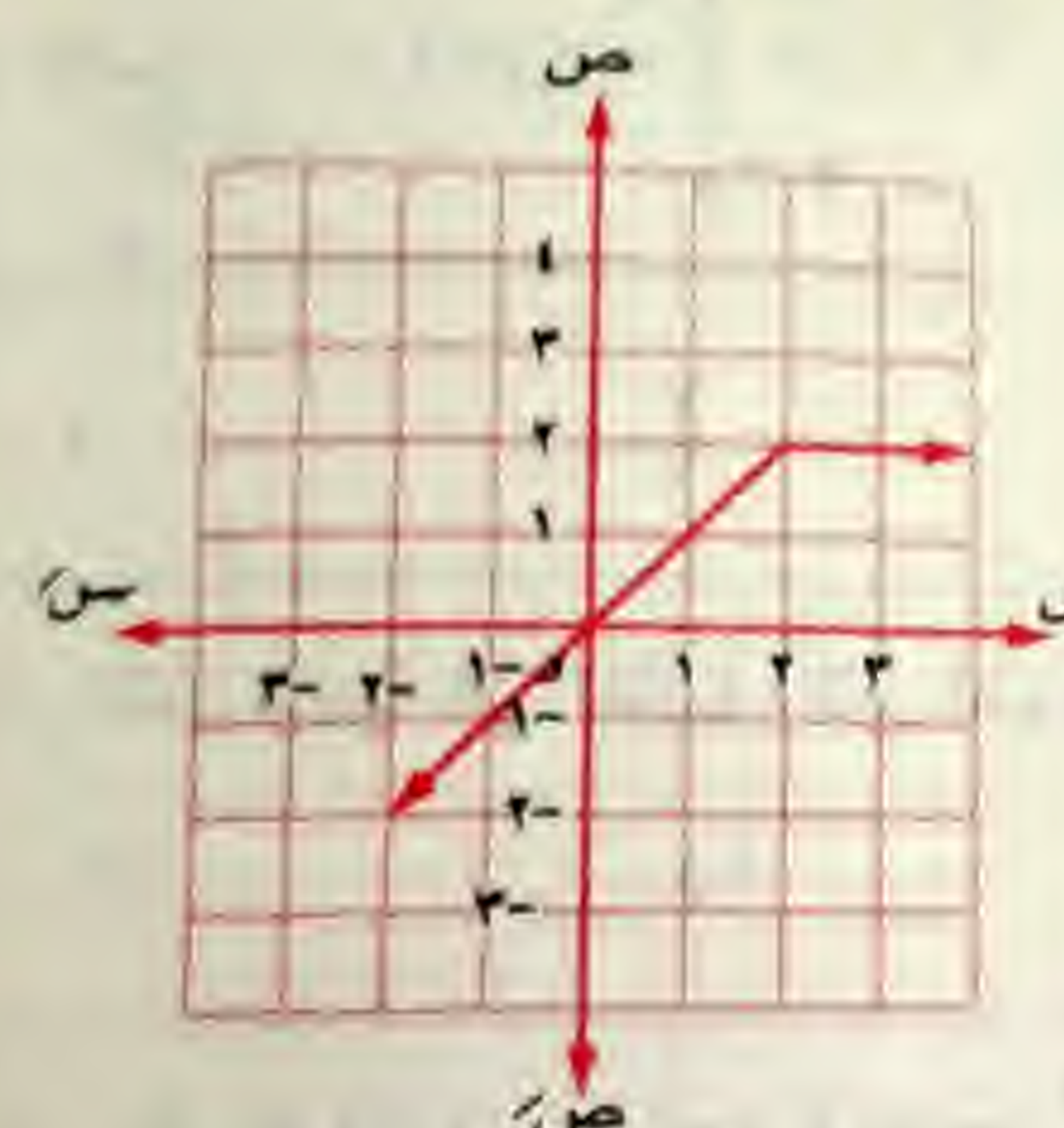


(ب)



(جـ)

(د)



١٩ المثلث أ ب حـ مساحته ٢٤ سم^{٢} وطول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه = ٥ سم

فإن : حا أ حا ب حا (أ + ب) = ...

(أ) $\frac{٣}{٢٥}$ (ب) $\frac{٩}{٢٥}$ (جـ) $\frac{٦}{٢٥}$ (د) $\frac{١٢}{٢٥}$

٢٠ المثلث أ ب حـ فيه : حتا حـ = $\frac{ب}{٢ أ}$ فإن : أ = ...

(أ) ب (ب) حـ (جـ) $\frac{١}{٢}$ ب (د) $\frac{١}{٢}$ حـ

... $\frac{٢ س + جا ٣ س}{٥ س + ظا ٢ س}$ = ...

(أ) ١ (ب) $\frac{٥}{٧}$ (ج) $\frac{٧}{٥}$ (د) −١

... إذا كانت د دالة فردية وكان : س د (س) + س^{٢} د (− س) = ٢

فإن : د (٢) = ...

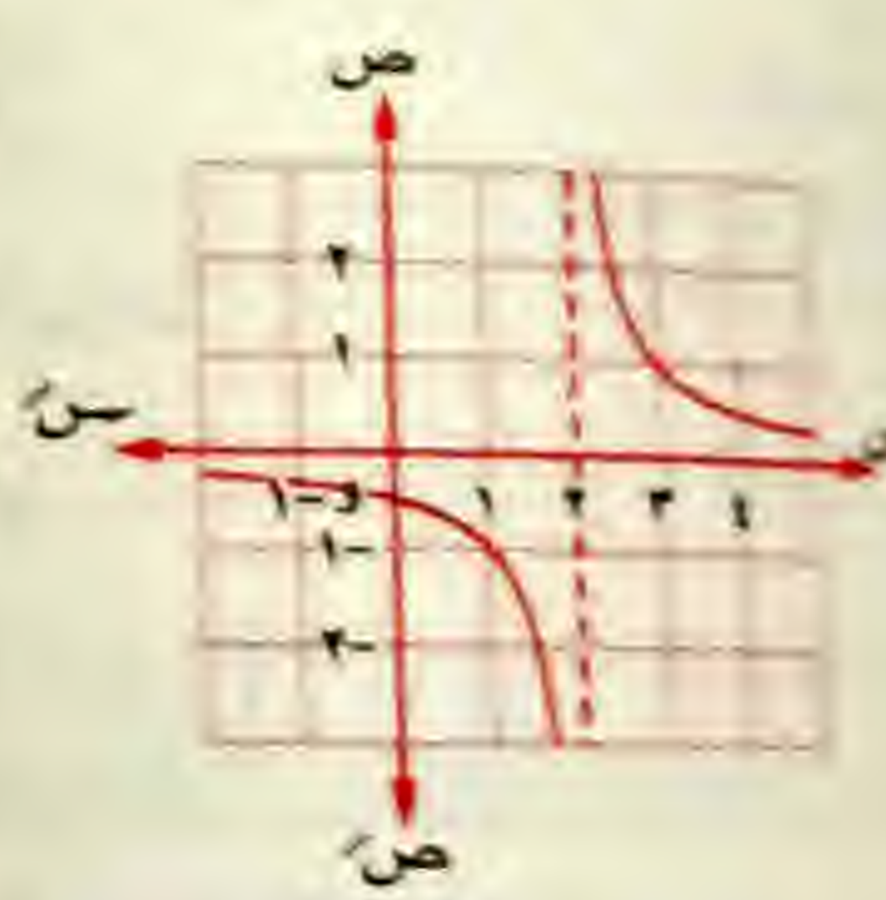
(أ) ٢ (ب) $\frac{١}{٢}$ (ج) $\frac{-١}{٢}$ (د) −٢

... مجموعة حل المعادلة : | ٢ س − ١ | = س + ٢ هى ....

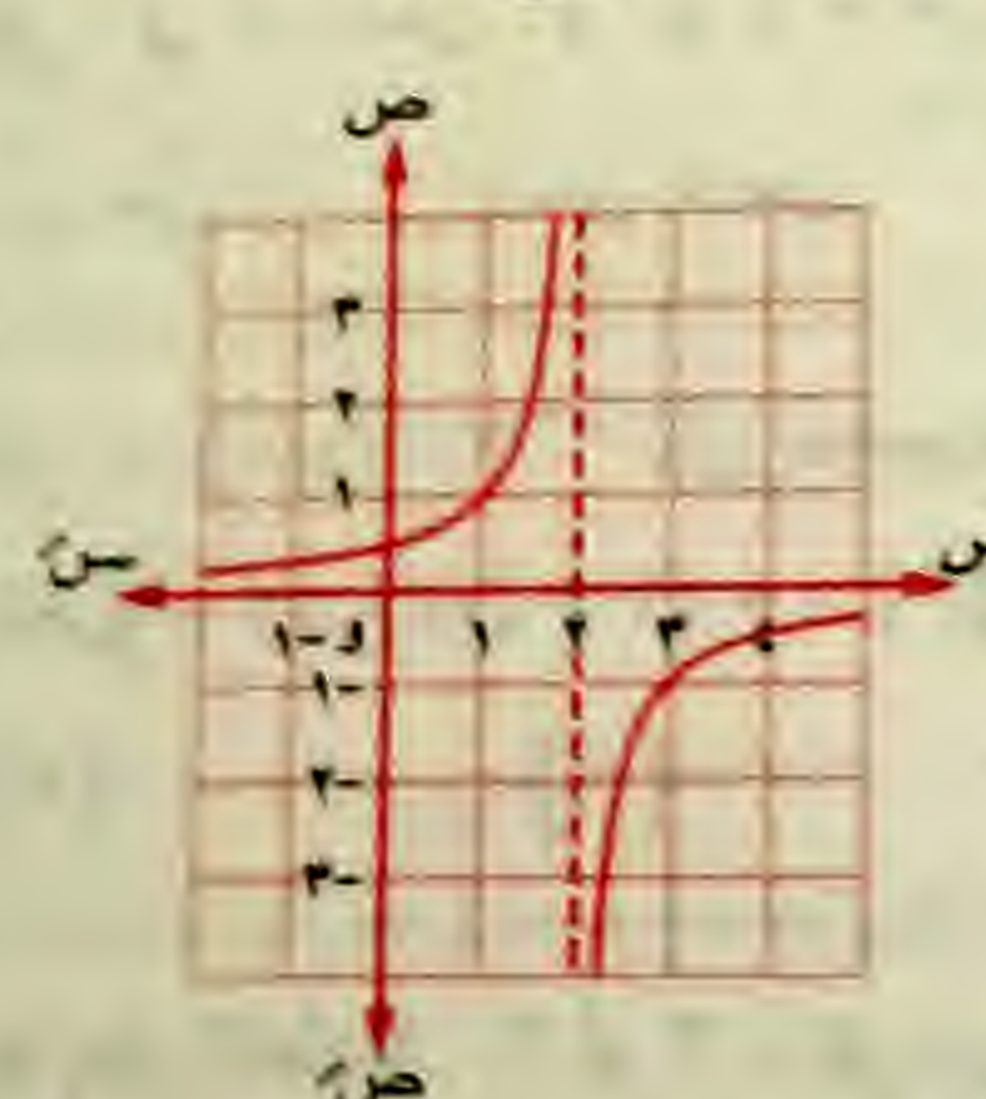
(أ) ... ٣ (ب) $\{٣ ، \frac{١}{٣}\}$ (ج) $\{٣ ، \frac{-١}{٣}\}$ (د) $\varnothing$

... أى من الأشكال البيانية الآتية يمثل الدالة د : د (س) = $\frac{١}{س - ٢}$ ؟

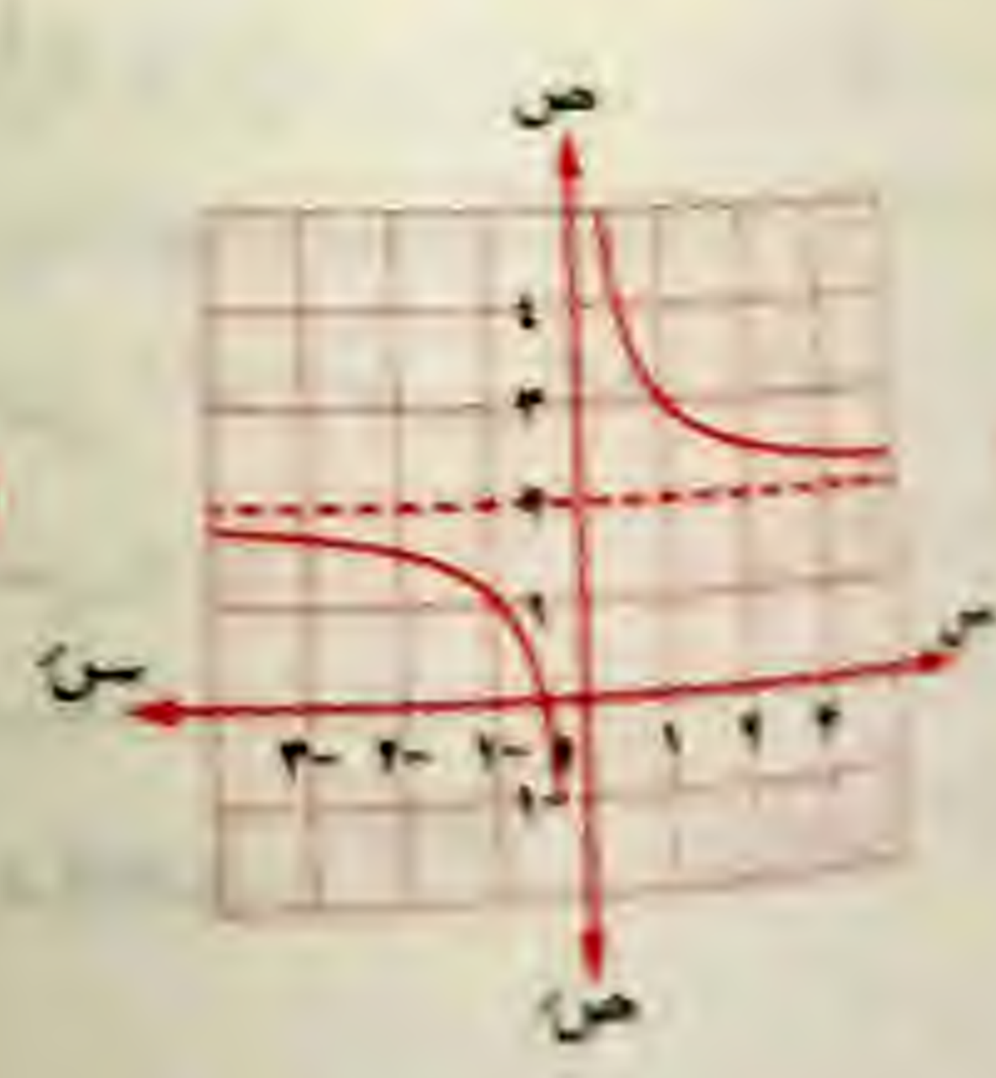
(أ)



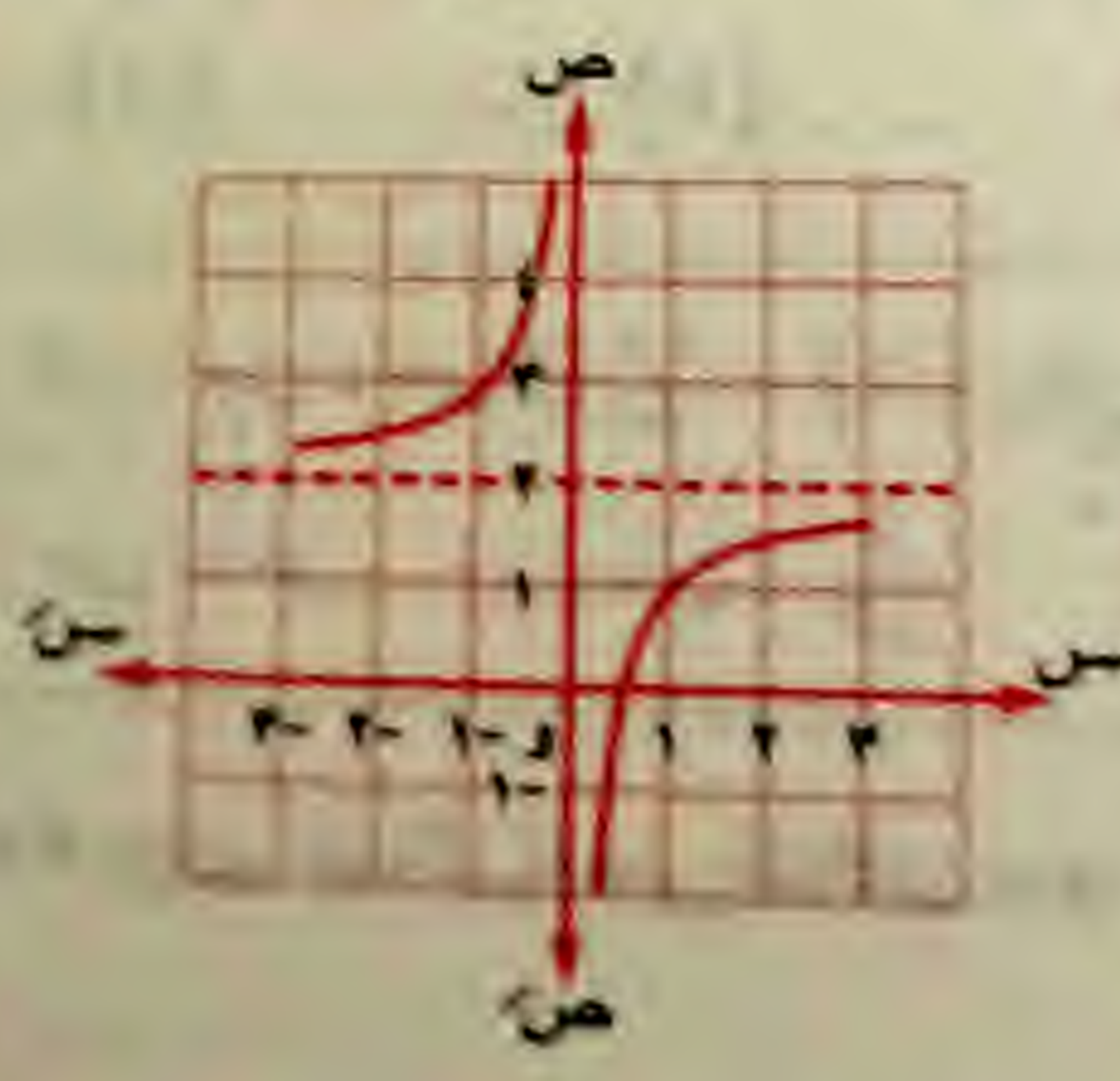
(ب)



(ج)



(د)



٢٥ $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{(س + ١)^{٤} - ٨١}{س - ٢} = \dots\dots\dots$

(أ) ١٨ (ب) ٨١ (جـ) −١٠٨ (د) ١٠٨

٢٦ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{أ\,س + ٧}{٥\,س + ٧} = ١$ فإن : أ = ... حيث أ ≠ صفر

(أ) ٥ (ب) ١ (جـ) −٥ (د) ٢٥

٢٧ $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}\,(س - ١)}{س^{٢} - ١} = \dots\dots\dots$

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ١ (جـ) −١ (د) صفر

٢٨ $\underset{س \to \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}} \dfrac{٣\,\text{جتا}\,س}{\pi - ٢\,س} = \dots\dots\dots$

(أ) ٣ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) $\frac{-٣}{٢}$ (د) −٣

٢٩ إذا كان : لو ٣ = س ، لو ٥ = ص فإن : لو ١٥ = ...

(أ) س ص (ب) س + ص (جـ) $\frac{س}{ص}$ (د) لو س ص

٣٠ إذا كان : د (س) = $٢^{س}$ فإن مجموعة حل المعادلة :

د (٢ س) − ٣ د (س + ١) + د (٣) = ٠ هي ....

(أ) {٢} (ب) {١} (جـ) {٢ ، ١} (د) {٠ ، ٢}

٣١ مجموعة حل المعادلة : ٢ لو ٢ − لو س = لو (س + ٣) − لو ٧ هي ....

(أ) {٧} (ب) {٤} (جـ) {٧ ، ٤} (د) ∅

٣٢ إذا كان : س ، ص ∈ $ع^{+}$ − {١} وكان : $\text{لو}_{ص}\,س = \text{لو}_{س}\,ص$ فإن : ....

(أ) س = ص (ب) س = $\frac{١}{ص}$ (جـ) س = ± ١ (د) أ ، ب معًا

٣٣ معادلة محور التماثل لمنحنى الدالتين د ، ر : د (س) = $٣^{س}$ ، ر (س) = $\left(\frac{١}{٣}\right)^{س}$

هو ....

(أ) ص = ٠ (ب) س = ٠ (جـ) ص = س (د) ص = −س

الدالة د : د $(س) = \frac{1}{\sqrt{س + 2}}$ متصلة لكل س $\in$ ....

(أ) ع (ب) ع $- \{-2\}$ (جـ) $[-2 ، \infty[$ (د) $]-2 ، \infty[$

مثلث مساحته $\frac{أ^2 \text{ جا ب جا حـ}}{ك \text{ جا أ}}$ فإن : ك = ... ، ك $\neq$ ٠.

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

إذا كانت د : ع $- \{2\} \longrightarrow$ ع $- \{1\}$ حيث د $(س) = \frac{س + 1}{س - 2}$

فإن : $د^{-1}(4) =$ ....

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

إذا كان : د (س + ٢) = $5^{س}$ فإن : د (س) = ...

(أ) $5^{س}$ (ب) $5^{2 - س}$ (جـ) $5^{س - 2}$ (د) $5^{2س}$

مجموعة حل المتباينة : $|س| > -1$ هي ....

(أ) $]0 ، \infty[$ (ب) ع (جـ) $\varnothing$ (د) ع $- \{0\}$

مجموعة حل المعادلة : $\sqrt{س^2} - 3\sqrt{س} + 2 = 0$ هي ....

(أ) $\{1 ، 8\}$ (ب) $\{9 ، 3\}$ (جـ) $\{8\}$ (د) $\{1\}$

مدى الدالة د : د (س) = س $|س|$ هي ....

(أ) $ع^+$ (ب) $ع^-$ (جـ) ع (د) $[0 ، \infty[$

٤ محافظة القليوبية

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ إذا كان : $٥^{٣س} = ٢$ فإن : $٢٥^{٣س} =$ ....

(أ) ١٠ (ب) ٦ (جـ) ٥ (د) ٤

---

٢ إذا كان منحنى : ص = $لو_{٤}$ (١ − أ س) يمر بالنقطة $\left(\frac{١}{٤} ، -\frac{١}{٢}\right)$

فإن : أ = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٨

---

٣ $\underset{س \to \infty}{نهـا} \frac{س^{٢} + ٥}{س(٢س^{٢} + ٣)} =$ ....

(أ) $\frac{٥}{٨}$ (ب) ١ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{٥}{٣}$

---

٤ فى Δ أ ب جـ إذا كان : ٤ جا أ = ٣ جا ب = ٦ جا جـ

فإن : ق (∠ جـ) = ... (لأقرب درجة)

(أ) °٨٩ (ب) °٢٩ (جـ) °٥٧ (د) °٨٢

---

٥ أبسط صورة للمقدار : $لو_{ب} أ^{٢} \times لو_{جـ} ب^{٣} \times لو_{أ} جـ =$ ....

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٦ (د) ١

---

٦ إذا كان : ص = $\sqrt[٣]{س}$ لكل س ≥ ٠ فإن الدالة العكسية لها هى ص = ...

(أ) $\frac{١}{٣}$ $س^{٣}$ (ب) $س^{٣}$ (جـ) $س^{٣} - ١$ (د) $س^{-\frac{١}{٣}}$

---

٧ إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} \frac{س^{٢} - ١}{س - ١} & ، س \neq ١ \\ ٢أ & ، س = ١ \end{cases}$ متصلة عند س = ١

فإن : أ = ...

(أ) ٠ (ب) −٢ (جـ) ٢ (د) ١

في Δ أ ب حـ يكون : حتا (أ + ب) = ...

(أ) $\frac{\text{أ}^2 + \text{ب}^2 - \text{حـ}^2}{2\,\text{أ ب}}$ (ب) $\frac{\text{حـ}^2 - \text{أ}^2 - \text{ب}^2}{2\,\text{أ ب}}$

(جـ) $\frac{\text{ب}^2 + \text{حـ}^2 - \text{أ}^2}{2\,\text{ب حـ}}$ (د) $\frac{\text{أ}^2 + \text{حـ}^2 - \text{ب}^2}{2\,\text{أ حـ}}$

مجموعة حل المعادلة : لو$_4$ س = ١ − لو$_4$ (س − ٣) هي ....

(أ) {٤} (ب) {−١} (جـ) {٤ ، −١} (د) {١}

مدى الدالة د : د (س) = | س − ٢ | هو ....

(أ) [٠ ، ∞[(ب) [٢ ، ∞[(جـ)]٠ ، ∞[(د)]٢ ، ∞[

نهـــا$_{\text{س} \leftarrow 2}$ $\frac{\text{س}^5 - 32}{\text{س}^2 + 3\,\text{س} - 10}$ = ...

(أ) ٨٠ (ب) $\frac{80}{7}$ (جـ) $\frac{7}{80}$ (د) $\frac{1}{80}$

Δ أ ب حـ فيه : أ = ٩ سم ، ب = ١٥ سم

، ق(∠حـ) = ١٠٦° فإن محيطه ≃ .... سم

(أ) ٤٤ (ب) ٢٤ (جـ) ٣٤ (د) ٢٨

مجموعة حل المتباينة : | ٣ س − ٢ | ≤ ٧ هي ....

(أ) $[\frac{-5}{3} ، 3]$ (ب) ح − $[\frac{-5}{3} ، 3]$

(جـ) ح − $]\frac{-5}{3} ، 3[$ (د) ∅

إذا كانت د دالة فردية على [− س ، س]

فإن : د (− س) + د (س) = ...

(أ) ٢ س (ب) غير معرفة. (جـ) −٢ س (د) صفر

نهـــا$_{\text{س} \leftarrow 0}$ $\frac{\text{حا}\,2\,\text{س} + 5\,\text{حا}\,3\,\text{س}}{\text{س}}$ = ...

(أ) ٧ (ب) ٥ (جـ) ١٧ (د) ١٠

١٦ أ ب جـ مثلث فيه: $\frac{\text{جا أ}}{٢} = \frac{٢ \text{ جا ب}}{٤} = \frac{\text{جا جـ}}{٤}$ فإن: أ : ب جـ : جـ أ = ...

(أ) ٦ : ٥ : ٨ (ب) ٨ : ٥ : ٦ (جـ) ٧ : ٣ : ٤ (د) ٣ : ٤ : ٦

---

١٧ مجموعة حل المعادلة: |س| + س = ٠ هي ....

(أ) {٠} (ب)]-∞ ، ٠] (جـ)]-∞ ، ٠[(د) ∅

---

١٨ نقطة تماثل الداله د : د (س) = $\frac{١}{\text{س}}$ + ٢ هي ....

(أ) (٢ ، ٠) (ب) (١ ، ٢) (جـ) (٠ ، ٢) (د) (١ ، ٠)

---

١٩ $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{٤ - \sqrt{\text{س} + ١٥}}{١ - \text{س}^٢}$ = ...

(أ) ٤ (ب) $\frac{١}{٨}$ (جـ) $\frac{١}{١٦}$ (د) −٤

---

٢٠ إذا كان أ ب جـ مثلث فيه ق (∠ أ) : ق (∠ ب) : ق (∠ جـ) = ٣ : ٥ : ٤

فإن: جـ² : أ² = ...

(أ) $\sqrt{٦}$: ٢ (ب) ٢ : ٣ (جـ) ٤ : ٣ (د) ٣ : ٢

---

٢١ مجموع جذرى المعادلة: ٢٥^س − ١٢ × ٥^س + ٢٧ = ٠ يساوى ....

(أ) لو$_٥$ ١٢ (ب) ١٢ (جـ) لو$_٥$ ٢٧ (د) ٢٧

---

٢٢ إذا كانت د : ح ← ح حيث د (س) = (أ + ١) س + ب − ٢ وكانت: د (س) تربط كل عدد حقيقى بنفسه فإن: (أ ، ب) = ...

(أ) (١ ، ٢) (ب) (٠ ، ٣) (جـ) (٠ ، ٢) (د) (٠ ، ٠)

---

٢٣ $\underset{\text{س} \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \frac{٥ + \text{س}^{-٢}}{١ + ٣\text{س}^{-٢}}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{٥}{٤}$ (جـ) $\frac{٥}{٣}$ (د) ٥

ا ب حـ مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ٥ $\sqrt{3}$ سم فإن طول قطر الدائرة المارة برؤوسه يساوى .... سم

(أ) ٥ $\sqrt{3}$ (ب) ١٠ $\sqrt{3}$ (جـ) ١٠ (د) ٥

مجال الدالة د : د (س) = $\sqrt{س + ٣}$ هو ....

(أ)]−٣ ، ∞[(ب) [−٣ ، ∞[(جـ) {−٣} (د) {٠}

المساحة المحصورة بين منحنيى الدالتين د : د (س) = |س + ٢| − ٢ ، ر (س) = صفر هى .... وحدة مربعة.

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

متوازى أضلاع ا ب حـ ء فيه : ق (∠ ا) = ٥٠° ، ق (∠ ء ب حـ) = ٧٠° ، ب ء = ٨ سم فإن محيطه = ... سم

(أ) ٢٨ (ب) ١٩ (جـ) ٨,٥ (د) ٨٦

إذا كان : د (س) = ٤ س − ٥ ، ر (س) = ٣ س

فإن : (د ∘ ر) (٢) = ...

(أ) ٣ (ب) ٩ (جـ) ٢٧ (د) ٣١

إذا كان : ٥ $^{س + ١}$ = ٧ $^{س + ١}$ فإن : ٣ $^{س + ١}$ = ...

(أ) صفر (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) ١

$\lim_{س \to ٢} \frac{س^٢ - ٧ س + ٦}{٢ س^٢ - ٨ س + ٤}$ = ...

(أ) $\frac{٥}{٤}$ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) $\frac{٤}{٥}$ (د) $\frac{١}{٢}$

فى أى مثلث Δ س ص ع يكون : $\overline{س}^٢ + \overline{ص}^٢ - ٢ \overline{س} \, \overline{ص}$ جتا ع = ...

(أ) ع (ب) $\overline{ع}^٢$ (جـ) $\overline{ص}^٢$ (د) $\overline{س}^٢$

٣٢ إذا كان $س^{\frac{3}{2}} = 8$ فإن : س = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٨ (د) ٩

٣٣ مجموعة حل المتباينة : $\sqrt{4س^2 - 12س + 9} \geq 9$ هى ....

(أ) $[-6 ، 12]$ (ب) $[-3 ، 6]$ (جـ) $ح - [-3 ، 6]$ (د) $ح -]-3 ، 6[$

٣٤ $\lim_{س \to \infty} \frac{1}{س} \sqrt{3 + 4س - 4س^2} =$ ....

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) −٢ (د) −٣

٣٥ $\lim_{س \to -2} \frac{(س + 3)^5 - 1}{س^2 - 4} =$ ....

(أ) $\frac{5}{4}$ (ب) $-\frac{5}{4}$ (جـ) $\frac{1}{4}$ (د) $-\frac{1}{4}$

٣٦ مدى الدالة د : $د(س) = \frac{1}{|س|}$ هو ....

(أ) $ح - \{0\}$ (ب) $]0 ، \infty[$ (جـ) $[0 ، \infty[$ (د) $\{0\}$

٣٧ مجموعة حل المعادلة : $لو_2 س + لو_4 س = 3$ هى ....

(أ) $\{2\}$ (ب) $\{4\}$ (جـ) $\{2 ، 4\}$ (د) $\{0\}$

٣٨ $\lim_{س \to 0} \frac{1 - جتا س + جا 2س}{1 - جتا س - جا س} =$ ....

(أ) ٢ (ب) −٢ (جـ) ١ (د) صفر

٣٩ $\lim_{هـ \to 0} \frac{(2 - 3هـ)^7 - 128}{4هـ} =$ ....

(أ) ٣٣٦ (ب) −٣٣٦ (جـ) ٤٤٨ (د) −٤٤٨

٤٠ $\lim_{س \to 0} 5س \, قتا 2س =$ ....

(أ) $\frac{5}{2}$ (ب) ١٠ (جـ) $\frac{2}{5}$ (د) صفر

٥ محافظة الشرقية

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ أ ب حـ مثلث فيه : ق(∠ أ) = ٤٥° وطول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه = ٦ سم فإن : أ = ...

(أ) ١٣ (ب) $6\sqrt{2}$ (جـ) ١٢ (د) $\sqrt{2}$

---

٢ مجموعة حل المعادلة : لو٢ (٢^(س - ٤)) = ٥ - س هى ....

(أ) {٤} (ب) {٥، ٤} (جـ) {٥} (د) {٤، ٥}

---

٣ الدالة د : د (س) = س جتا س ....

(أ) زوجية. (ب) فردية.

(جـ) ليست زوجية ولا فردية. (د) لا شئ مما سبق.

---

٤ مجموعة حل المتباينة : $\sqrt{س^2 - 2س + 1} \leq 4$ هى ....

(أ) [-٣ ، ٥] (ب) ح -]-٣ ، ٥[

(جـ)]-٣ ، ٥[(د) ح - [-٣ ، ٥]

---

٥ أ ب حـ مثلث فيه : ٣ جا أ = ٤ جا ب = ٦ جا حـ فإن أ : ب : حـ = ...

(أ) ٣ : ٤ : ٦ (ب) ٤ : ٣ : ٢ (جـ) ٦ : ٣ : ٤ (د) ٢ : ٣ : ٤

---

٦ فى Δ أ ب حـ إذا كان : أ = حـ فإن : جتا حـ = ...

(أ) $\frac{أ ب}{حـ}$ (ب) $\frac{حـ}{2 ب}$ (جـ) $\frac{ب}{2 أ}$ (د) $\frac{حـ}{2 أ}$

---

٧ $\lim_{س \to 0} \frac{س^2 - س}{س}$ = ...

(أ) صفر (ب) -١ (جـ) غير موجودة. (د) ١

٨ إذا كان : د (س) = $س^٢$ + ٦ ، ر (س) = ٣ س

فإن : (د ∘ ر) (٣) = ...

(أ) ٧٥ (ب) ٨٧ (جـ) ٩٠ (د) ١٠٠

---

٩ مجال الدالة د : د (س) = $\sqrt{٤ - س}$ هو ....

(أ)]٤ ، ∞[(ب)]−٤ ، ∞[(جـ)]٤ ، ∞[(د)]−∞ ، ٤]

---

١٠ إذا كانت : $٧^{س + ١} = ٣^{٢س + ٢}$ فإن : س = ...

(أ) −١ (ب) صفر (جـ) ٣ (د) ٧

---

١١ مجال الدالة د : د (س) = $\sqrt{٩ - س^٢}$ هو ....

(أ)]−٣ ، ٣[(ب) ع (جـ) ع −]−٣ ، ٣[(د) [−٣ ، ٣]

---

١٢ الدوال المعرفه بالقواعد الآتية كلها أحادية ما عدا ؟

(أ) د (س) = $س^٣$ (ب) ر (س) = ٣ س

(جـ) ق (س) = $\frac{١}{س}$ (د) هـ (س) = |س|

---

١٣ فى Δ أ ب حـ يكون المقدار : ٢ نق جا أ = ...

(أ) أ (ب) ب (جـ) حـ (د) مساحة (Δ أ ب حـ)

---

١٤ $\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{س + ٨} - ٣}{س - ١}$ = ...

(أ) ٦ (ب) $\frac{١}{٦}$ (جـ) −٦ (د) −$\frac{١}{٦}$

---

١٥ د (س) = $\begin{cases} س + ١ & \text{عندما س > أ} \\ ٣ س - ١ & \text{عندما س < أ} \end{cases}$ ، $\lim_{س \to أ}$ د (س) موجودة

فإن : أ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

١٦ إذا كانت : د (س) = ٧^س ، د (س) + د (س - ١) = ٥٦

فإن : قيمة س = ...

(أ) ٦ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

---

١٧ قيمة المقدار : ٢ لو ٢٥ + لو $\frac{٨}{١٥}$ + ٢ لو ٣ - لو ٣٠ = ...

(أ) ٦ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) -١

---

١٨ مجموعة حل المعادلة : | ٢ س - ٧ | = ٥ هى ....

(أ) {-١ ، -٦} (ب) {٦ ، -١} (جـ) {١ ، ٦} (د) {-٦ ، ١}

---

١٩ نهـا (س ← ٠) $\frac{١ - جتا س + جا ٣ س}{١ - جتا س + ظا ٢ س}$ = ...

(أ) صفر (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) ١ (د) $\frac{٤}{٣}$

---

٢٠ نهـا (س ← -٢) $\frac{س^{٧} + ١٢٨}{س^{٤} - ١٦}$ = ...

(أ) ١٤ (ب) $\frac{٧}{٤}$ (جـ) -١٤ (د) ٨

---

٢١ نهـا (س ← ∞) $\frac{٧}{س}$ = ...

(أ) -٧ (ب) ١ (جـ) صفر (د) -١

---

٢٢ طول قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب حـ الذى فيه : أ = ٤ سم ، ق(∠ أ) = ٣٠°

يساوى ....

(أ) ٨ (ب) ٢ (جـ) ٢ $\sqrt{٣}$ (د) ٤

---

٢٣ إذا كان : لو$_{٣}$ س = ٢ فإن : س = ...

(أ) ٩ (ب) ٨ (جـ) ٣ (د) ٥

---

٢٤ نقطة رأس المنحنى : د (س) = (س - ٢)^{٢} + ٣ هى ....

(أ) (٢ ، -٣) (ب) (٢ ، ٣) (جـ) (-٢ ، ٣) (د) (-٢ ، -٣)

منحنى الدالة $س$: $س(س) = |س|$

٢٥ منحنى الدالة د : د (س) = | س + ٣ | هو نفس منحنى الدالة س : س (س) = | س | بإزاحة مقدارها ٣ وحدات ، تجاه ....

(أ) و س← (ب) و س→ (ج) و ص← (د) و ص→

٢٦ $\lim_{س \to \infty} \frac{س^٢ + ٣}{س(٢س^٢ + ٣)} = $ ....

(أ) $\frac{٥}{٨}$ (ب) ١ (ج) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{٥}{٣}$

٢٧ في Δ ٢ ب حـ المقدار : $\frac{٢^٢ + ب^٢ - حـ^٢}{٢ ٢ ب} = $ ....

(أ) حتا ٢ (ب) حتا حـ (ج) حتا ب (د) حا ٢

٢٨ إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} س^٢ - ٢س & \text{عندما } س \geq ١ \\ ك س - ٣ & \text{عندما } س < ١ \end{cases}$ متصلة عند س = ١

فإن : ك = ...

(أ) صفر (ب) ١ (ج) ٢ (د) ٣

٢٩ $\lim_{س \to ٠} \frac{١٢ - ١٢ حتا س}{س} = $ ....

(أ) صفر (ب) ١٢ (ج) ١ (د) ٢٤

٣٠ $٣^{س + ٥} = \frac{١}{٢٧}$ فإن : س = ...

(أ) −٣ (ب) ٨ (ج) −٨ (د) ٣

٣١ س ص ع مثلث فيه : سَ = ٤ سم ، صَ = ٥ سم ، ق(∠ ع) = ٦٠°

فإن : عَ = ... سم

(أ) ٣ (ب) $\sqrt{٢١}$ (ج) ٤,٥ (د) $٢\sqrt{٥}$

٣٢ $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ٩}{س^٢ + س - ١٢} = $ ....

(أ) صفر (ب) $\frac{٧}{٦}$ (ج) $\frac{٦}{٧}$ (د) $\frac{٣}{٤}$

٣٣ $\lim\limits_{س \to \infty} \left(\frac{٢}{س^٢} - ٢\right) =$ ....

(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) −٣ (د) −٢

٣٤ $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{جا ٣س}{٥س^٢ - ٤س} =$ ....

(أ) $\frac{٣}{٤}$ (ب) $\frac{-٣}{٤}$ (جـ) ٣ (د) $\frac{٣}{٥}$

٣٥ مجموعة حل المتباينة : $|س + ٢| \geq ٢$ هي ....

(أ) [−٤ ، ٠] (ب)]−٤ ، ٠[(جـ) [٠ ، ٤] (د) ح − [−٤ ، ٠]

٣٦ إذا كان منحنى الدالة د : د (س) = $لو_{م}$ س يمر بالنقطة (٨ ، ٣)

فإن : د (٤) = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) −٢ (د) ٤

٣٧ مجموعة حل المعادلة : لو (س + ٨) − لو (س − ١) = ١ هي ....

(أ) {١} (ب) {٢} (جـ) {−١} (د) {٣}

٣٨ مجموعة حل المعادلة : $٣^{س} + ٣^{٣ - س} = ١٢$

(أ) {١ ، ٢} (ب) {٠ ، ٣} (جـ) {٣ ، ٤} (د) {−١ ، −٢}

٣٩ مجموعة حل المعادلة : |س + ٧| = |س − ٥|

(أ) {٥ ، −٧} (ب) ∅ (جـ) {−١} (د) {١}

٤٠ أ ب جـ مثلث فيه : أ = ٧ سم ، جـ = ٩ سم ، ق(∠جـ) = ٦٠°

فإن عدد حلول Δ أ ب جـ هو ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) صفر (د) ٣

٦ محافظة الغربية

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ $\underset{[illegible]}{\text{نهـــا}}\ \frac{ص^٥ - ٣٢}{ص - ٢} = $ ....

(أ) ٢٦ $ص^٤$ (ب) ٣٢ × ١٢ (ج) ٦٤ (د) [illegible]

---

٢ إذا كانت : د (س) = ٤ س − ٥ ، ر (س) = $٣^س$

فإن : (د ∘ ر) (٢) = ...

(أ) ٣ (ب) ٩ (ج) ٢٧ (د) ٣١

---

٣ في Δ أ ب حـ إذا كان نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث = ٤ سم

فإن : $\frac{أ + ب + حـ}{حا أ + حا ب + حا حـ}$ = ...

(أ) ٤ (ب) ٢ (ج) ٨ (د) ١٦

---

٤ إذا كان : د (س) = $٢^س$ فإن : $لو_٢$ د (س) = ...

(أ) ١ (ب) س (ج) د (س) (د) ٢

---

٥ إذا كان : $لو_ب$ س + $لو_ب$ ٣ = $لو_ب$ ٢٧ − ١ فإن قيمة س بدلالة ب = ...

(أ) س = ٩ ب (ب) س = $\frac{١}{٩}$ ب (ج) $\frac{٩}{ب}$ (د) $\frac{١}{٩ ب}$

---

٦ $\underset{س \to ٠}{\text{نهـــا}}\ \frac{٢ س + ٢ س^{-١}}{س + ٤ س^{-١}}$ = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (ج) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{١}{٤}$

---

٧ إذا كان : د (س) = $س^٣$ + ٧ فإن : $د^{-١}$ (−١) = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (ج) −٢ (د) ٨

---

٨ مجموعة حل المعادلة : | ٢ س − ٤ | = | س + ١ | = ...

(أ) {١ ، ٥} (ب) {٥ ، −١} (ج) {١ ، −٥} (د) {−٥ ، −١}

٩ كل الدوال المعرفة بالقواعد الآتية ليست أحادية ما عدا ....

(أ) د (س) = $س^2$ (ب) د (س) = ٥

(جـ) د (س) = س + ٢ (د) د (س) = |س|

١٠ عدد حلول Δ ا ب جـ الذى فيه : ق (∠ جـ) = ١١٥° ، ب جـ = ١٢ سم ، ا ب = ٩ سم

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) صفر

١١ $\lim_{س \to \infty}$ (١ + ٢ $س^2$ − $س^3$) = ...

(أ) ∞ (ب) −∞ (جـ) صفر (د) −١

١٢ Δ س ص ع فيه : س ص = ٥ سم ، ص ع = ٣ سم

، ق (∠ ع) = $\frac{٢}{٣}$ π فإن : س ع = ...

(أ) ٧ (ب) ٨ (جـ) ٩ (د) ٤

١٣ $\frac{لو ٢٥}{لو ٥}$ = ...

(أ) ٢ (ب) لو ٥ (جـ) لو ٢ (د) لو ٢٠

١٤ مجال الدالة د : د (س) = $\frac{١}{|س| + ٢}$ هو ....

(أ) ح (ب) {٢ ، −٢} (جـ) ح − {٢ ، −٢} (د) ح − {٢}

١٥ نقطة رأس المنحنى : د (س) = $(س + ٣)^2$ − ٢ هى ....

(أ) (−٣ ، ٢) (ب) (٣ ، −٢) (جـ) (٣ ، ٢) (د) (−٣ ، −٢)

١٦ لو حا (θ) + لو قا (θ) = ... حيث θ ∈]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[

(أ) ١ (ب) صفر (جـ) ٢ (د) −١

١٧ $\lim_{هـ \to صفر}$ $\frac{(س + هـ)^7 - س^7}{هـ}$ = ...

(أ) $س^7$ (ب) ٧ $س^6$ (جـ) صفر (د) ١

مجموعة حل المتباينة : |٢ - ٣ س| ≤ ٧ في ح هي ....

(أ)]$-\frac{٥}{٣}$ ، ٣[(ب) [$-\frac{٥}{٣}$ ، ٣]

(ج) ح -]$-\frac{٥}{٣}$ ، ٣[(د) ح - [$-\frac{٥}{٣}$ ، ٣]

١٩ إذا كان منحنى الدالة د : د (س) = لو $_٢$ (١ - أ س) يمر بالنقطة ($\frac{١}{٨}$ ، $-\frac{١}{٢}$)

فإن : أ = ...

(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) ٨

٢٠ إذا كانت : د (س) = $٣^{س}$ فإن قيمة س التى تحقق المعادلة :

د (س + ١) - د (س - ١) = ٢٤ هى ....

(أ) ٢ (ب) صفر (جـ) ٣ (د) ٨

٢١ محور تماثل الدالة د : د (س) = $س^٢$ هو المستقيم ....

(أ) ص = صفر (ب) ص = س (جـ) ص = - س (د) س = صفر

٢٢ فى جميع العلاقات التالية تكون ص دالة ماعدا ....

(أ) ص = جتا س (ب) ص = ٢

(جـ) ص = $س^٢$ - ١ (د) $ص^٢$ = $س^٢$ + ١

٢٣ كل الكميات الآتية غير معينة ماعدا ....

(أ) صفر ÷ صفر (ب) ∞ - ∞ (جـ) ∞ + ∞ (د) ∞ ÷ ∞

٢٤ إذا كان △ أ ب جـ قائم الزاوية ومتساوى الساقين ، نق طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه فإن مساحة △ أ ب جـ = ...

(أ) نق (ب) ٢ نق (جـ) $نق^٢$ (د) π $نق^٢$

$$\lim (٥ + ٥ س^{-١} - ٢ س^{-٢}) = \text{.......}$$

(أ) ... (ب) ٥ (جـ) -٢ (د) ٤

الدوال الآتية زوجية ماعدا ....

(أ) د (س) = ماس (ب) د (س) = جتاس

(جـ) د (س) = س² - ١ (د) د (س) = |س|

في △ أ ب جـ إذا كان : جـ² = أ² + ب² + أ ب فإن : ق (∠ جـ) = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (د) ١٢٠°

إذا كان : ٢^س = ٥ فإن : س = ...

(أ) لو ٥ (ب) لو ٢ (جـ) لو$_{٢}$ ٥ (د) لو$_{٥}$ ٢

مجموعة حل المتباينة : |س - ١| < ٥ في ح هي ....

(أ) ح (ب) ح⁺ (جـ)]-٤ ، ٦[(د) [-٤ ، ٦]

إذا كانت : د (س - ١) = ٢^{س + ١} فإن : د (س) = ...

(أ) ٢^س (ب) ٢^{س - ١} (جـ) ٢^{س + ٢} (د) ٢^{س - ٢}

$$\lim_{س \to \infty} \left(\frac{٣ س^٢ + ٢ س + ١}{س^٢ - ٣ س + ٢} \right)^٤ = \text{..........}$$

(أ) ٣ (ب) ٩ (جـ) ٢٧ (د) ٨١

$$\lim_{س \to ٢} \frac{جا (س - ٢)}{س^٢ - ٤} = \text{..........}$$

(أ) ١ (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) صفر (د) ٢

الدوال الآتية متصلة على ح ماعدا ....

(أ) د (س) = جاس (ب) د (س) = س² - ٢

(جـ) د (س) = طاس (د) د (س) = $\frac{٥ س + ٣}{س^٢ + ٤}$

٣٤ $\lim\limits_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ٩}{س - ٣} = $ ....

(أ) ٣- (ب) ٦ (جـ) صفر (د) ٩

---

٣٥ في Δ أ ب حـ إذا كان : جتا ب = $\frac{حـ}{٢ أ}$ فإن : Δ أ ب حـ فيه ....

(أ) حـ = أ (ب) حـ = ب (جـ) أ = ٢ ب (د) أ = ب

---

٣٦ $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{ظا س}{س} = $ ....

(أ) ١ (ب) $\frac{٤}{\pi}$ (جـ) ٤ π (د) صفر

---

٣٧ في Δ أ ب حـ إذا كان أ : جا أ = ٦ : ١ فإن طول قطر الدائرة المارة برؤوسه = ... سم

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٥ (د) ٦

---

٣٨ إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} ٣ س^٢ + أ س - ٢ & \text{عند } س > ٣ \\ ٢ س + ب & \text{عند } س < ٣ \end{cases}$

وكانت : $\lim\limits_{س \to ٣}$ د (س) = ١٦ فإن : أ + ب = ...

(أ) ٤ (ب) ١- (جـ) ١٣ (د) ٧

---

٣٩ في Δ أ ب حـ يكون : حـ (أ جتا ب + ب جتا أ) = ...

(أ) ٢ $حـ^٢$ (ب) $حـ^٢$ (جـ) $أ^٢$ (د) $ب^٢$

---

٤٠ في Δ أ ب حـ : جتا (أ + ب) = ...

(أ) جتا حـ (ب) - جتا حـ (جـ) جا حـ (د) - جا حـ

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ إذا كان : د (س) = $٣^{س + ٢}$ فإن : د (−٢) = ...

(أ) ٢ (ب) صفر (جـ) −١ (د) ١

---

٢ مجال الدالة د حيث د (س) = $\sqrt{٤ - س}$ هو ....

(أ) [٤ ، ∞[(ب)]−∞ ، ٤] (جـ)]٤ ، ∞[(د)]−∞ ، ٤[

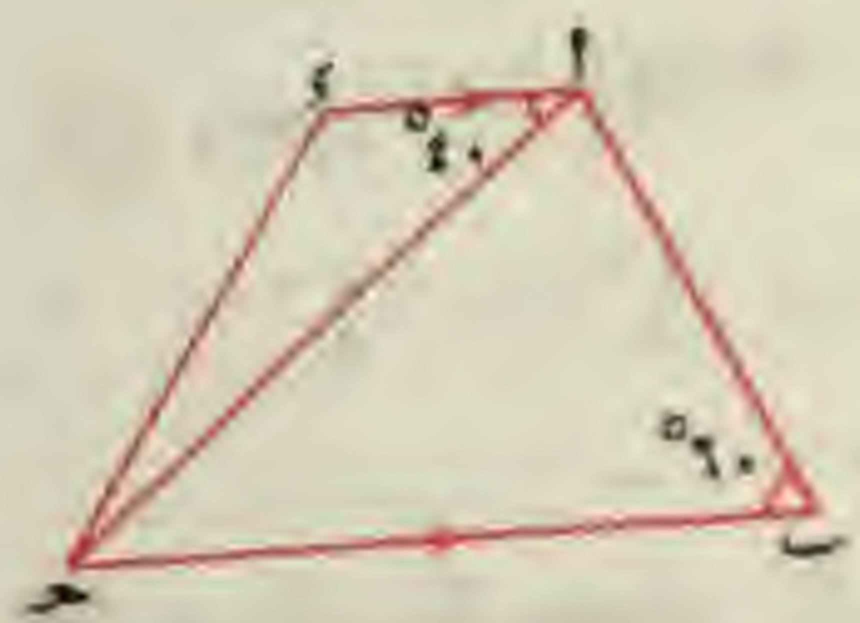
---

٣ فى الشكل المقابل :

أد // بجـ ، أب = ٤ سم

، ق(∠دأجـ) = ٤٠° ، ق (∠ب) = ٦٠°

فإن : طول أجـ = ... سم

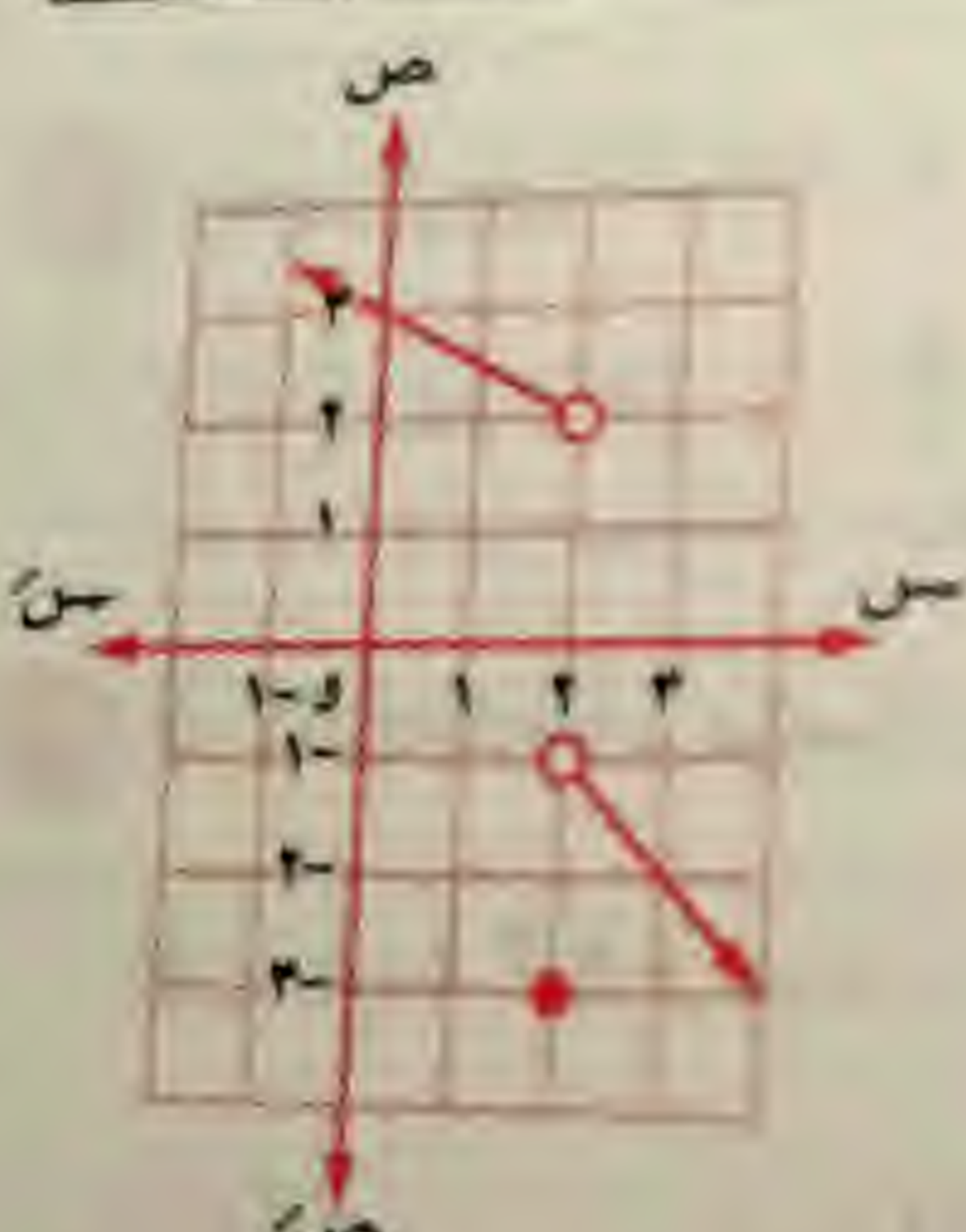


(أ) ٥ (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) ٤

---

٤ فى الشكل المقابل :

نهـــا د (س) = ...
س ← ٢



(أ) −٣

(ب) ٢

(جـ) −١

(د) غير موجودة.

---

٥ مجموعة حل المعادلة : لو٢ (س − ٥) = ٣ هى ....

(أ) {١١} (ب) {٥} (جـ) {١٣} (د) {٨}

٦ إذا كانت : د (س) = $\sqrt{\text{س} + ٥}$ ، ر (س) = $\text{س}^٢$

فإن : (د ∘ ر) (٢) = ...

(أ) ٧ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٩

---

٧ $\lim\limits_{\text{س} \to ٠}$ د (س) = ٤ فإن : $\lim\limits_{\text{س} \to ٠}$ [د (س) − ٤] = ...

(أ) ٤ (ب) صفر (جـ) ٥ (د) ٨

---

٨ طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث المتساوى الأضلاع الذى طول ضلعه ٦ $\sqrt{٣}$ سم يساوى ....

(أ) ١٢ (ب) ٢٤ (جـ) ١٨ (د) ٦

---

٩ مجموعة حل المعادلة : | ٢ س + ٥ | = ٧ فى ح هى ....

(أ) {١ ، −٦} (ب) {٦} (جـ) {١} (د) {−١}

---

١٠ نقطة تماثل منحنى الدالة د : د (س) = ٣ − $(\text{س} + ٢)^٢$ هو ....

(أ) (٣ ، ٢) (ب) (٢ ، ٣) (جـ) (−٢ ، ٣) (د) (−٢ ، −٣)

---

١١ مجموعة حل المتباينة : | ٢ س − ٥ | ≥ ٩ فى ح هى ....

(أ)]−∞ ، ٧] (ب) [−٢ ، ٧] (جـ) ح −]−٢ ، ٧[(د) ح − [−٢ ، ٧]

---

١٢ إذا كانت الدالة د متصلة عند س = ٢ حيث : د (س) = $\begin{cases} \text{أ س}^٢ + ٥ & \text{عندما س} \leq ٢ \\ ٩ - \text{ب س} & \text{عندما س} > ٢ \end{cases}$

فإن : قيمة ٢ أ + ب = ...

(أ) ٧ (ب) ١٤ (جـ) ٢ (د) −٢

---

١٣ مدى الدالة د حيث د (س) = $(\text{س} - ٣)^٢$ + ٤ هو ....

(أ)]−∞ ، ٣] (ب) [−٣ ، ٤] (جـ) [٤ ، ∞[(د)]−∞ ، ٤]

الدالة د(س) = ... تكون تزايدية في ح إذا كانت ... [illegible]

(أ) [illegible] (ب) [illegible] (ج) [illegible] (د) [illegible]

إذا كان محيط المثلث أ ب ح يساوي ١٥ سم ، ق(∠أ) = ٣٢° ، [illegible] فإن : طول $\overline{أب}$ = ... لأقرب سم

(أ) [illegible] (ب) ٧ (ج) [illegible] (د) ٨

نها [illegible] $\frac{\sqrt{س + ١} - ٢}{س - ٣}$ = ...

(أ) ١ (ب) $\frac{١}{٤}$ (ج) ٦ (د) $\frac{١}{٦}$

لو$_أ$ ٢ × لو$_هـ$ حـ × لو$_حـ$ ب × لو$_٢$ هـ = ...

(أ) صفر (ب) ٤ (ج) ١ (د) أ ب حـ هـ

نها$_{هـ \to ٠}$ $\frac{(٣هـ - ١)^٢ + ١}{هـ}$ = ...

(أ) ٣− (ب) $\frac{٣}{٥}$ (ج) ٣ (د) ٥

إذا كان : س$^{\frac{٢}{٣}}$ = ٢ ص$^{\frac{٢}{٣}}$ = ٣٢ فإن : س + ص = ...

(أ) ١٦ (ب) صفر (ج) ١٦ ، −١٦ (د) صفر ، ١٦

أ ب حـ مثلث فيه : أ^٢ + ب^٢ − حـ^٢ + $\sqrt{٣}$ أ ب = ٠ فإن : ق(∠حـ) = ...°

(أ) ٣٠ (ب) ١٥٠ (ج) ٦٠ (د) ١٢٠

نها$_{س \to ٤}$ $\frac{جا(س - ٤)}{س^٢ - ١٦}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٨}$ (ب) $\frac{١}{١٦}$ (ج) $\frac{١}{٤}$ (د) ٨

مجموعة حل المعادلة : لو$_٢$ س − ٢ لو$_س$ ٢ = ١ في ح هي ....

(أ) {٨ ، ٢} (ب) {٨ ، $\frac{١}{٢}$} (ج) {٩ ، $\frac{١}{٣}$} (د) {٨}

٢٣ إذا كانت الدالتين د ، ر حيث : د (س) = ٤ س − ١٢ ، ر (س) = أ س + ٣ كل منها عكسية للأخرى فإن : قيمة أ = ...

(أ) −٤ (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) ٤ (د) ٣

٢٤ إذا كانت : $\lim_{س \to \infty} \frac{أ س + ٥}{٢ س − ٧} = ٣$ فإن : قيمة أ = ... حيث أ ∈ ع

(أ) $\frac{٥}{٧}$ (ب) $\frac{١}{٦}$ (جـ) ٨ (د) ٦

٢٥ إذا كان منحنى الدالة : ص = $لو_{٨}$ (١ − أ س) يمر بالنقطة $\left(\frac{١}{٤} ، −\frac{١}{٣}\right)$

فإن : قيمة أ = ...

(أ) ٢ (ب) ٨ (جـ) ٣ (د) ٤

٢٦ مجال الدالة د حيث د (س) = $لو_{س}$ (٥ − س) هو ....

(أ)]٠ ، ٥[− {١} (ب) [٠ ، ٥]

(جـ)]٠ ، ٥[(د)]−∞ ، ٥[

٢٧ إذا كانت : د (س) = $٣^{س}$ فإن قيمة س التى تحقق العلاقة :

د (٢ س) − ٨ د (س) − د (٢) = ٠ هى ....

(أ) ٢ ، $\frac{١}{٣}$ (ب) ٢ ، صفر (جـ) ٢ (د) ٢ ، −١

٢٨ قياس أكبر زاوية فى المثلث الذى أطوال أضلاعه ٣ سم ، ٥ سم ، ٧ سم

تساوى ....°

(أ) ١١٠ (ب) ١٥٠ (جـ) ١٠٠ (د) ١٢٠

٢٩ إذا كانت : $\lim_{س \to ٠} \frac{جا^٢ أ س − ظا ٢ أ س^٢}{س^٢} = −١$ فإن : قيمة أ = ...

(أ) −١ (ب) ٢ (جـ) ١ (د) ٤

٣٠ مجموعة حل المتباينة : $\sqrt{س^٢ + ٤س + ٤} \le ٧$ في ح هي ....

(أ) $]-٩ ، ٥[$ (ب) ح − $[-٩ ، ٥]$

(ج) ح − $]-٩ ، ٥[$ (د) $[-٩ ، ٥]$

---

٣١ $\lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt[٣]{٨س^٣ + ٥س}}{س + ٦} =$ ....

(أ) ٢ (ب) ٨ (ج) ٤ (د) $\frac{١}{٢}$

---

٣٢ المساحة المحصورة بين منحنى الدالة د : د (س) = | س + ٢ | − ٢ ، محور السينات تساوى .... وحدة مربعة.

(أ) ٣ (ب) ٢ (ج) ٥ (د) ٤

---

٣٣ عدد حلول المثلث س ص ع الذى فيه : $\overline{سص}$ = ٥ سم ، $\overline{صع}$ = ٦ سم ، ق (∠ س) = ٧٠° يساوى ....

(أ) صفر (ب) ٢ (ج) ١ (د) ٣

---

٣٤ $\lim_{س \to ٠} \frac{س - س \, جتا \, س}{س^٢} =$ ....

(أ) صفر (ب) غير موجودة. (ج) ١ (د) ٢

---

٣٥ كل الدوال المعرفة بالقواعد التالية أحادية ما عدا الدالة التى قاعدتها ....

(أ) د (س) = | س | حيث س > ٠ (ب) د (س) = س + ٦

(ج) د (س) = $س^٣$ (د) د (س) = $(س - ٢)^٢$

---

٣٦ مثلث أ ب حـ فيه ق (∠ أ) : ق (∠ ب) : ق (∠ حـ) = ٢ : ٣ : ٤ ، أ ب = ١٢ سم فإن : طول $\overline{أحـ}$ ≃ .... سم

(أ) ١٠ (ب) ١١ (ج) ١٦ (د) ١٨

٣٧ إذا كانت د دالة فردية فإن : $\frac{٢\ د(س) + ٨\ د(-س)}{٣\ د(س)}$ = ...

(أ) صفر (ب) ‎−٢ (جـ) ‎−٤ (د) ٤

---

٣٨ إذا كانت الدالة د نهايتها موجودة عندما س ⟵ −٣ حيث

$$د(س) = \begin{cases} \frac{س^{٢} + ٢س - ٣}{س + ٣} & \text{عندما } س < -٣ \\ س + أ & \text{عندما } س > -٣ \end{cases}$$

فإن : قيمة أ = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٢ (د) ‎−١

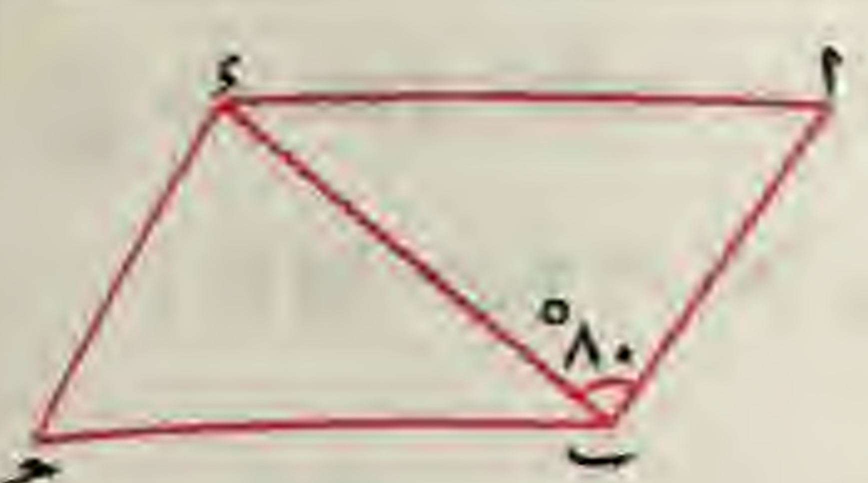
---

٣٩ $\lim_{س \to -٢} \frac{س^{٧} + ١٢٨}{س^{٤} - ١٦}$ = ...

(أ) ٩ (ب) ‎−٩ (جـ) ‎−١٤ (د) ١٤

---

٤٠ فى الشكل المقابل :



أ ب جـ ء متوازى أضلاع فيه : ق(∠ أ ب ء) = ٨٠°

، ب ء = ٧ سم ، أ ب = ٥ سم

فإن محيط متوازى الأضلاع = ... لأقرب سم

(أ) ٢٥ (ب) ٢٦ (جـ) ٢٩ (د) ٣٠

أجب عن الأسئلة الآتية :

1 نقطة رأس منحنى الدالة د : د (س) = $(٢ - س)^٢ + ٣$ هى ....

(أ) (٢ ، ٣) (ب) (٢ ، −٣) (جـ) (−٢ ، ٣) (د) (−٢ ، −٣)

2 مجال الدالة د : د (س) = $\frac{\sqrt{س - ٢}}{س - ٢}$ هو ....

(أ) ح (ب) {٢} (جـ)]٢ ، ∞[(د)]٢ ، ∞[− {٢}

3 أ ب جـ مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ٥ $\sqrt{٣}$ سم فإن طول قطر الدائرة المارة برؤوسه يساوى .... سم

(أ) ٥ $\sqrt{٣}$ (ب) ١٠ $\sqrt{٣}$ (جـ) ١٠ (د) ٥

4 إذا كانت : $\lim_{س \to ∞} \frac{أ س + ٦}{٢ س + ٧} = ٤$ حيث أ ∈ ح فإن : أ = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

5 نوع الدالة د : د (س) = $\frac{جا س}{س}$ هى ....

(أ) زوجية. (ب) فردية. (جـ) لا زوجية ولا فردية. (د) أحادية.

6 المنحنى ر (س) = $س^٢ + ٤$ هو نفس المنحنى د (س) = $س^٢$ بإزاحة مقدارها ٤ وحدات فى اتجاه ....

(أ) $\overleftarrow{و س}$ (ب) $\overleftarrow{و ص}$ (جـ) $\overrightarrow{و س}$ (د) $\overrightarrow{و ص}$

7 قياس أكبر زاوية فى المثلث الذى أطوال أضلاعه ٣ سم ، ٥ سم ، ٧ سم يساوى ....

(أ) °١٥٠ (ب) °١٢٠ (جـ) °٦٠ (د) °٣٠

٨ [illegible]

(أ) [illegible] (ب) [illegible] (جـ) صفر (د) [illegible]

---

٩ إذا كان : د (س) = ٤ س − ٥ ، ر (س) = ٣ س

فإن : (د ∘ ر) (٢) = ...

(أ) ٣ (ب) ٩ (جـ) ٢٧ (د) ٣١

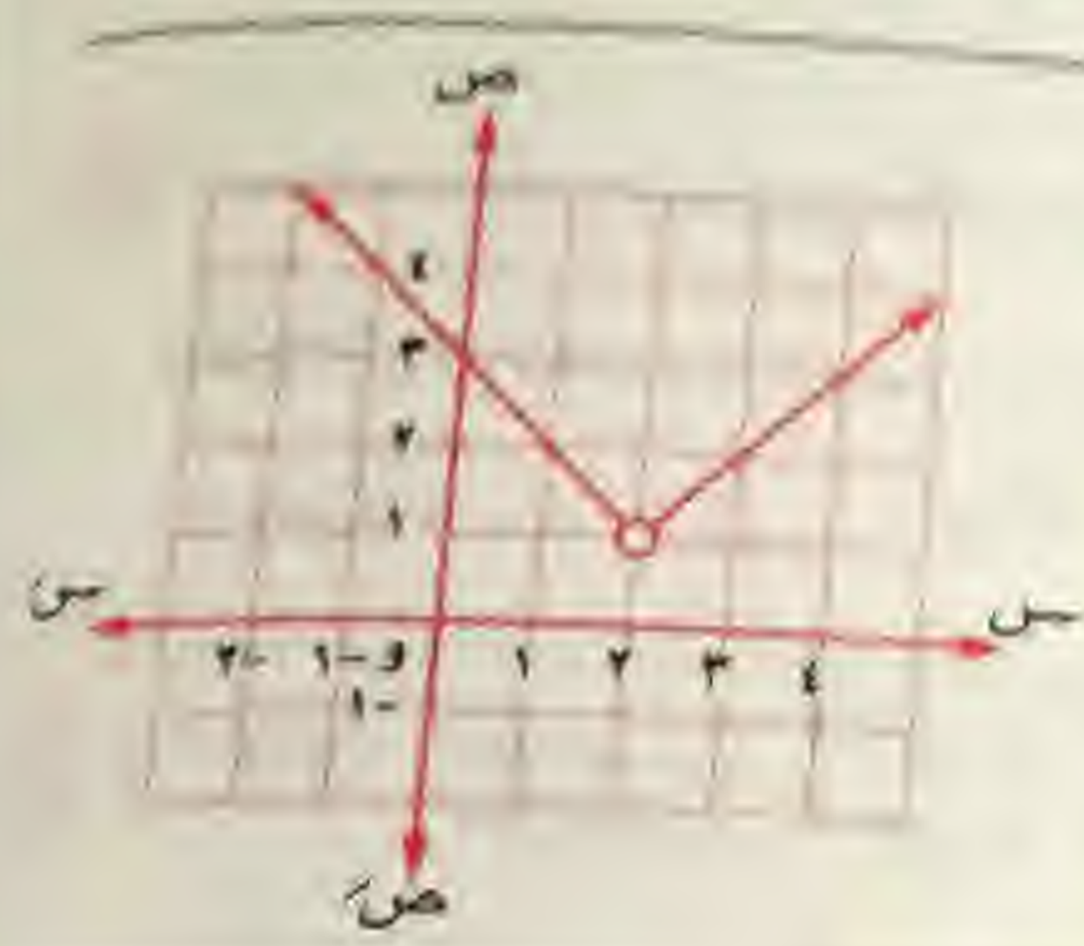
---

١٠ إذا كانت د دالة حيث : د (س) = ٧ س فإن : د$^{-1}$ (س) = ...

(أ) ٧ س (ب) $\frac{س}{٧}$ (جـ) $\frac{٧}{س}$ (د) ٧ − س

---

١١ فى الشكل المقابل :



نهــا د (س) = ...
س ← ٢

(أ) ١ (ب) −١

(جـ) غير موجودة. (د) ٢

---

١٢ إذا كانت د دالة فردية ، أ ∈ مجال الدالة فإن : د (أ) + د (− أ) = ...

(أ) ٢ د (أ) (ب) ٢ د (− أ) (جـ) صفر (د) د (أ)

---

١٣ نهــا $\frac{س^{٢} - ٧ س + ١٢}{س - ٣}$ = ...
س ← ٣

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) ٧ (د) −٢

---

١٤ مجموعة حل المتباينة : $\sqrt{س^{٢} - ٤ س + ٤}$ > ٠ فى ح هى ......

(أ) ح − {٢} (ب) ح − {−٢} (جـ) ح (د) ∅

---

١٥ عدد الحلول الممكنة للمثلث أ ب حـ حيث : ق (∠ أ) = ٦٠° ، ب = ٣ سم ، أ = ٥ سم هو ......

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) لا يوجد مثلث. (د) عدد لا نهائى.

١٦ نهـا$_{س \to ٠}$ $\frac{\sqrt{س + ١} - ١}{س}$ = ...

(أ) صفر (ب) $\sqrt{٢}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) ليس لها وجود.

---

١٧ منحنى الدالة الزوجية يكون متماثلًا حول المستقيم ....

(أ) ص = س (ب) $\overleftrightarrow{صص}$ (جـ) $\overleftrightarrow{سس}$ (د) ص = − س

---

١٨ إذا كان : س$^{\frac{٣}{٢}}$ = ٨ فإن : س = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٨ (د) ٩

---

١٩ فى △ ء هـ و إذا كان : ق (∠ء) = ٣٠° ، هـ َ = ١٥ $\sqrt{٣}$

، ق (∠هـ) = ٦٠° فإن : ءَ = ... سم

(أ) ٣٠ سم (ب) ٤٥ سم (جـ) ١٥ سم (د) ٦٠ سم

---

٢٠ نهـا$_{س \to ٠}$ $\frac{(س + ٢)^{٥} - ٣٢}{س}$ = ...

(أ) ٢٥ (ب) ٦٤ (جـ) ٨٠ (د) ١٠٠

---

٢١ إذا كانت : لو$_{٢}$ ص = س فإن الصورة الأسية لها هى ....

(أ) ص = س^{٢} (ب) س = ص^{٢} (جـ) س = ٣^{ص} (د) ص = ٣^{س}

---

٢٢ إذا كان : د (س) = ٤$^{س - ١}$ فإن : د (س + ١) = ...

(أ) ٤^{س} (ب) ٤$^{س + ١}$ (جـ) ٤$^{س + ٢}$ (د) ٢^{س}

---

٢٣ ا ب حـ مثلث فيه : بَ = ٢ سم ، حـَ = ٢,٥ سم ، حا ا = $\frac{٢}{٥}$

فإن : △ ا ب حـ يكون ....

(أ) قائم الزاوية. (ب) متساوى الساقين.

(جـ) متساوى الأضلاع. (د) مختلف الأضلاع.

٢٤ نهــا (س ← ٠) |٢ س - جتا س| = ...

(أ) صفر　(ب) ٢　(جـ) π　(د) $\frac{\pi}{2}$

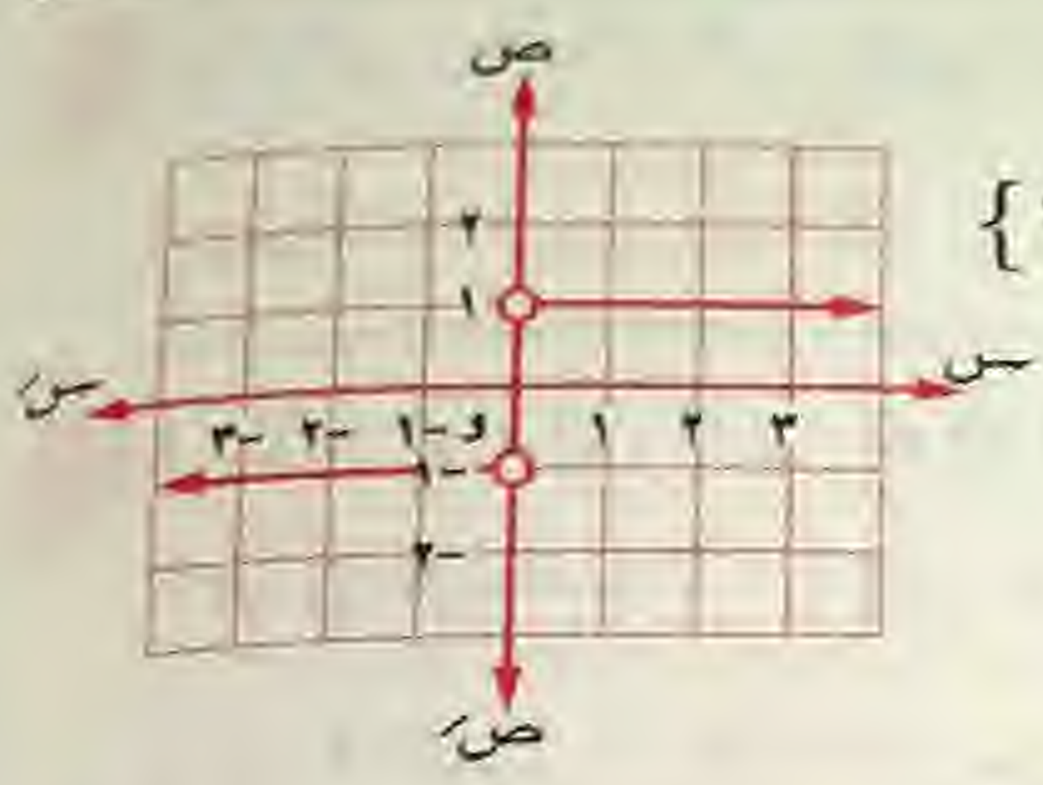
---

٢٥ إذا كانت : لو$_{س}$ (س + ٦) = ٢ فإن : س ∈ ....

(أ) {٣ ، -٢}　(ب) {٣}　(جـ) {٣ ، ١}　(د) {٦ ، ١}

---

٢٦ مدى الدالة الممثلة بالشكل المقابل هو ....



(أ) {١}　(ب) {١ ، -١}

(جـ) {-١}　(د) ح

---

٢٧ في المثلث س ص ع يكون : $\frac{٢ س}{جا س}$ = ... نق

(أ) ١　(ب) ٢　(جـ) ٤　(د) ٨

---

٢٨ إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} \frac{جا^{٢}\ ٢ س}{س^{٢}} & ، \quad س < ٠ \\ ٢ أ + ٣ جتا س & ، \quad س > ٠ \end{cases}$

وكانت : نهــا (س ← ٠) د (س) موجودة　فإن : أ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$　(ب) صفر　(جـ) ٢　(د) $-\frac{١}{٢}$

---

٢٩ مجال الدالة د : د (س) = لو$_{١ - س}$ س هو ....

(أ) س > ٠　(ب) س < ١　(جـ) ٠ < س < ١　(د) ٠ ≤ س ≤ ١

---

٣٠ نهــا (س ← ٠) ٥ س ظتا ٢ س = ...

(أ) $\frac{٥}{٢}$　(ب) ١٠　(جـ) $\frac{٢}{٥}$　(د) صفر

٣١ يقصد بحل المثلث ....

(أ) إيجاد أطوال أضلاعه.

(ب) إيجاد قياسات زواياه.

(جـ) إيجاد العلاقة بين أطوال أضلاعه وقياسات زواياه.

(د) إيجاد أطوال أضلاعه وقياسات زواياه.

---

٣٢ القيمة العددية للمقدار : $\frac{\text{لو } ٦٤}{\text{لو } ٨}$ تساوى ....

(أ) ٢ (ب) ٨ (جـ) ٨٠ (د) ٧٢

---

٣٣ تكون الدالة الأسية التى أساسها أ تزايدية إذا كانت ....

(أ) أ > ٠ (ب) أ > ١ (جـ) ٠ < أ < ١ (د) أ = ١

---

٣٤ Δ ل م ن فيه : ق(∠ ل) = ٣٠° ، م ن = ٧ سم فإن طول قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث تساوى ....

(أ) ١٤ (ب) ٧ (جـ) ٣,٥ (د) $\frac{١٤}{\sqrt{٣}}$

---

٣٥ إذا كانت : د(س) = $\begin{cases} \frac{س^{٢} - ٩}{س - ٣} & ، س \neq ٣ \\ ٢أ & ، س = ٣ \end{cases}$ متصلة عند س = ٣

فإن : أ = ...

(أ) ٢ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) −٣ (د) ٣

---

٣٦ إذا كان : لو س + لو ٥ = ٢ فإن : س = ...

(أ) ٣ (ب) ٨ (جـ) ١٧ (د) ٢٠

---

٣٧ إذا كانت : $\lim\limits_{س \to -١} \frac{س^{٢} + ك س + م}{س^{٢} - ١} = ٣$ فإن : ك + م = ...

(أ) −٤ (ب) −٥ (جـ) −٨ (د) −٩

٨ الدالة الأحادية من بين الدوال المعرفة بالقواعد الآتية هي ....

(أ) $د_{1}(س) = جتا\ س$ (ب) $د_{2}(س) = س^{2}$

(ج) $د_{3}(س) = س^{3} + س^{2}$

(د) $د_{4}(س) = س^{3}$

٩ جملة مبلغ ٥٠٠٠ جنيه موضوع في بنك يعطي فائدة مركبة سنوية قدرها ٥ ٪ لمدة ٧ سنوات = ... جنيه.

(أ) ٦٧٥٠ (ب) ٥٣٥٠ (ج) ٧٠٣٥٫٥ (د) ٨٥٠٠

١٠ إذا كانت : $\lim_{س \to 2^{-}} د(س) = ل$ ، $\lim_{س \to 2^{+}} د(س) = م$

وكانت الدالة متصلة عند $س = 2$ فإن : $ل^{2} + م^{2} - 2\ ل\ م =$ ....

(أ) صفر (ب) ١ (ج) -1 (د) ٢

٩ محافظة كفر الشيخ

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ الدالة الأحادية من بين الدوال المعرفة بالقواعد الآتية هي ....

(أ) د (س) = ٣ − س^{٢} (ب) د (س) = س^{٣} + ٣

(جـ) د (س) = س^{٤} + س^{٢} (د) د (س) = س^{٢} + س

٢ مجال الدالة (د ∘ ر) حيث : د (س) = $\sqrt{س − ٢}$ ، ر (س) = $\sqrt{٦ − س}$ هو ....

(أ) ح (ب) [٢ ، ∞[(جـ)]−∞ ، ٢] (د)]−∞ ، ٢[

٣ نهـا$_{س \to ٢}$ $\frac{س^{٤} + س^{٢} − ٢٠}{س − ٢}$ = ...

(أ) −٣٦ (ب) ٣٦ (جـ) ٣٠ (د) −٣٠

٤ نهـا$_{س \to −٤}$ $\frac{٢س^{٢} − ٤٨}{س + ٤}$ = ...

(أ) ٣٢ (ب) −٣٢ (جـ) ٢٤ (د) −٢٤

٥ فى Δ س ص ع إذا كان : س ص = نق حيث نق طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه فإن : ق (∠ ع) = ...°

(أ) ٣٠ (ب) ٣٠ أ، ١٢٠ (جـ) ١٥٠ (د) ٣٠ أ، ١٥٠

٦ إذا كانت : د (س) = ٣$^{س − ٢}$ فإن مجموعة حل المعادلة : د (س − ١) = ٨١ هى ....

(أ) {٧} (ب) {٤} (جـ) {٣} (د) {٥}

٧ الدالة د حيث د (س) = $\frac{٢س − ١}{س − ١}$ تناقصية فى الفترة ....

(أ)]−∞ ، ١] (ب)]−∞ ، ١[،]١ ، ∞[

(جـ) [١ ، ∞[(د)]−∞ ، ٢[،]٢ ، ∞[

٨ أ ب جـ ء شكل رباعى فيه : أ ب = ٢٢ سم ، ب جـ = ٣٥ سم ، ء جـ = ١٨ سم ، ق(∠ء أ ب) = ٦٥° ، ق(∠ء ب أ) = ٥٠°

فإن : ق(∠جـ ب ء) = ...

(أ) ٧٥َ ٨٠° (ب) ٩١ ٤٩َ ٤٢° (جـ) ٩ ٢٨َ ٤٤° (د) ٤٠ ٨٥°

---

٩ $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \frac{\text{س}^{٢} - ٤}{\text{س}^{٥} - ٣٢}$ = ...

(أ) ٢٠ (ب) −٢٠ (جـ) $\frac{١}{٢٠}$ (د) $\frac{-١}{٢٠}$

---

١٠ $\lim\limits_{\text{س} \to ١} \frac{٢ - \sqrt{\text{س}^{٢} + ٣}}{١ - \text{س}}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{-١}{٢}$ (جـ) ٢ (د) −٢

---

١١ منحنى الدالة ر حيث : ر (س) = | س | − ٢ هو نفس منحنى الدالة

د : د (س) = | س | بإزاحة مقدارها وحدتان فى اتجاه ....

(أ) $\overrightarrow{\text{و س}}$ (ب) $\overleftarrow{\text{و س}}$ (جـ) $\overrightarrow{\text{و ص}}$ (د) $\overleftarrow{\text{و ص}}$

---

١٢ نقطة رأس منحنى الدالة د حيث : د (س) = $(١ + \text{س})^{٢} - ٣$ هى ....

(أ) (١ ، ٣) (ب) (١ ، −٣) (جـ) (−١ ، ٣) (د) (−١ ، −٣)

---

١٣ إذا كانت الدالة د حيث : د (س) = $\begin{cases} \frac{(\text{س} + ٢)^{٦} - ٦٤}{٢\,\text{س}} & \text{س} \neq ٠ \\ \text{ك} & \text{س} = ٠ \end{cases}$

متصلة عند س = ٠ فإن : ك = ...

(أ) ٩٦ (ب) ١٩٢ (جـ) ٣٨٤ (د) ٩٢

---

١٤ $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \frac{\text{س}^{٧} - ٢\,\text{س}^{٣}}{٢\,\text{س}^{٤} - ٣\,\text{س}^{٢} - ١}$ = ...

(أ) صفر (ب) ٣ (جـ) ∞ (د) ١

■ س ص ع مثلث فيه : ق(∠ س) = ٨٠° ، ق(∠ ص) = ٦٠° ، ع = ١٠ سم فإن : س = ... لأقرب سم.

(أ) ١٢ (ب) ١٣ (جـ) ١٤ (د) ١٥

■ في المثلث س ص ع : ٢ س ص جتا (س + ص) = ...

(أ) س² + ص² − ع² (ب) ص² + ع² − س²

(جـ) س² − ع² + ص² (د) ع² − س² − ص²

■ نهــا (س ← ١) (٢ س − √س) = ...

(أ) ٢ (ب) −٢ (جـ) −١ (د) ١

■ نهــا (س ← ٠) (جا س − جا س جتا س) / س² = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

■ مجموعة حل المعادلة : √(س²) − ٣ س = ٨ هى ....

(أ) ∅ (ب) {−٢ ، −٤} (جـ) {−٤} (د) {−٢}

■ إذا كان : ٢^(س − ١) = ٤٤ فإن : ٢^(س − ٢) = ...

(أ) ١٨ (ب) ٢٢ (جـ) ١٠ (د) ١٦

■ مجموعة حل المعادلة : ٧^(س²) = ٤٩^(س + ٤) هو ....

(أ) {−٢} (ب) {−٢ ، ٤} (جـ) {−٢ ، ٣} (د) {٢ ، −٤}

■ الدالة د حيث : د(س) = { ٢ ، س > ٠ ؛ −٢ ، س < ٠ } متماثلة بالنسبة للنقطة ....

(أ) (٢ ، −٢) (ب) (٢ ، ٠) (جـ) (−٢ ، ٠) (د) (٠ ، ٠)

٢٣ Δ أ ب حـ فيه : أ ب = ٦ سم ، ب حـ = ١٢ سم ، ق (∠ ب) = ٣٠°

فإن : مساحته = ... سم^٢

(أ) ٣٦ (ب) ٩ (جـ) ١٨ (د) ٢٧

---

٢٤ إذا كانت : $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{س^٢ - ٧ س + م}{س^٢ - ١} = \frac{-٥}{٢}$ فإن : م = ...

(أ) −٦ (ب) ٦ (جـ) ٣ (د) −٣

---

٢٥ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt[٣]{٦٤ س^٣ + ٧ س - ٢}}{٣ س + ٢}$ = ...

(أ) ٤ (ب) ٣ (جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) $\frac{٤}{٣}$

---

٢٦ $\underset{س \to -٢}{\text{نهـا}} \frac{٢ س^٣ + ٣ س^٢ + ٤}{س^٣ + ٨}$ = ...

(أ) ٢ (ب) −٢ (جـ) ١ (د) −١

---

٢٧ $\frac{أ}{حـ} \times \frac{\text{حا حـ}}{\text{حا أ}}$ = ...

(أ) ٢ نق (ب) ٢ نق^٢ (جـ) ١ (د) ٢

---

٢٨ الدالة د حيث د (س) = ٥ س متماثلة حول ....

(أ) النقطة (٢ ، ١) (ب) المستقيم ص = ١

(جـ) النقطة (٥ ، ٠) (د) (٠ ، ٠)

---

٢٩ إذا كانت الدالة د : د (س) = ٢ س + ب هى داله عكسية للدالة

ر : ر (س) = حـ س + ٣ فإن : ب × حـ = ...

(أ) ٣ (ب) −٣ (جـ) ٦ (د) −٦

---

٣٠ منحنى الدالة د حيث : د (س) = لو$_ب$ س يمر بالنقطة (٣٢ ، ٥)

فإن : قيمة ب = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

مجموعة حل المتباينة : |٢ س − ١| ≤ ٣ هو ....

(أ) [−١ ، ٢] (ب) [−٢ ، ٤] (جـ) [−١ ، ٢] (د)]−١ ، ٢[

المثلث س ص ع فيه : ق (∠ س) = ١٠٠° ، س ص = ٣ سم ، ص ع = ٤ سم هذه الشروط ....

(أ) تحقق وجود مثلث وحيد. (ب) تحقق وجود مثلثين.

(جـ) تحقق وجود ثلاثة حلول. (د) لا تحقق وجود أى مثلث.

نهـا س ← ٣ $\frac{س^٢ - ٧ س + ١٢}{س - ٣}$ = ...

(أ) −١ (ب) ١ (جـ) ٧ (د) −٢

إذا كان المنحنى ص = د (س) يمثل دالة حقيقية فإن صورته بإزاحة قدرها ٥ وحدات رأسيا لأسفل هو المنحنى ر (س) = ...

(أ) د (س − ٥) (ب) د (س + ٥) (جـ) د (س) + ٥ (د) د (س) − ٥

إذا كان : $٥^{س}$ = ١٧ فإن : س = ...

(أ) ٥ (ب) $لو_{١٧}$ ٥ (جـ) $لو_{٥}$ ١٧ (د) ١٧

مجموعة حل المعادلة : لو $س^٢$ − $(لو س)^٢$ = ٠ هى ....

(أ) {١} (ب) {١ ، ١٠} (جـ) {١ ، ١٠٠} (د) {١٠٠}

المثلث أ ب حـ فيه : أ = ٨ سم ، ب = ٥ سم ، ق (∠ حـ) = ٦٠°

فإن : ق (∠ أ) = ...

(أ) ٨٣° ٤٢َ ١٢ً (ب) ٨١° ٤٧َ ١٢ً

(جـ) ٣٨° ١١ً (د) ٦٠° ٢٣َ ١٠ً

٣٨ المستقيم ص = ٩ يقطع منحنى الدالة د حيث د (س) = ٣ ^-س^ في النقطة ....

(أ) (٠ ، ١) (ب) (٢ ، ٠) (جـ) (٩ ، -٢) (د) (-٢ ، ٩)

٣٩ مدى الدالة د حيث : د (س) = - | س^{٢} | هي ....

(أ) ح (ب)]٠ ، ∞] (جـ)]-∞ ، ٠] (د) ح - {٠}

٤٠ مجموعة حل المعادلة : (لو$_{٢}$ س)^{٢} - ٢ لو$_{٢}$ س = ٣ هو ....

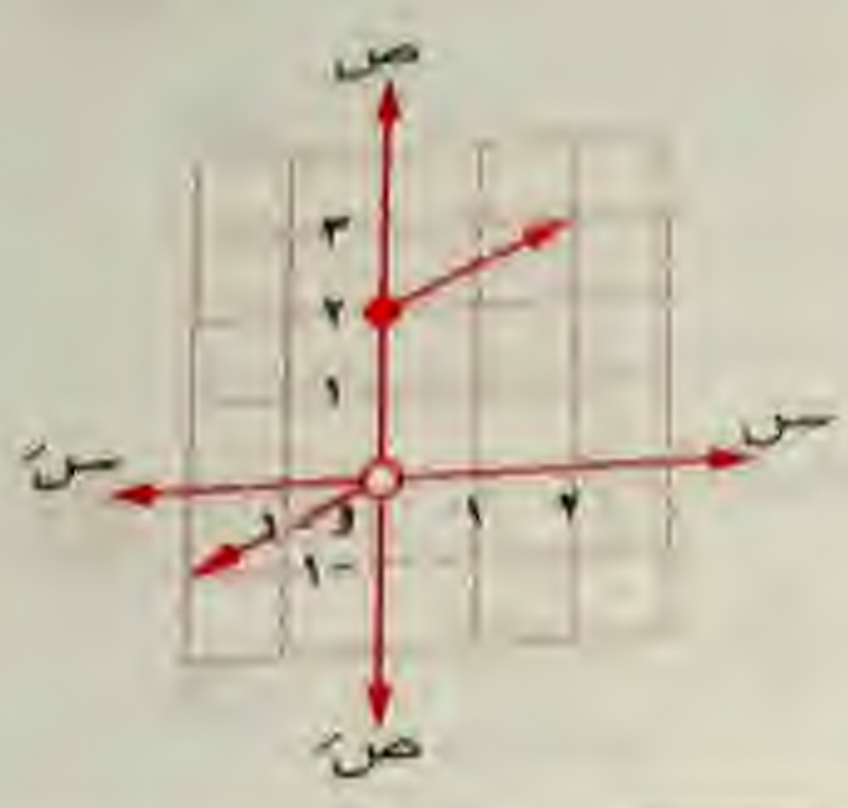
(أ) {١٦} (ب) {٨} (جـ) {٠٫٥ ، ١٦} (د) {٠٫٥ ، ٨}

١٠ محافظة المنيا

مديرية التربية والتعليم
نموذج (ب)

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ الشكل المقابل يمثل دالة فى س مداها ....



(أ) ح − [٠ ، ٢]

(ب) ح − {٠}

(ج) ح −]٠ ، ٢]

(د) ح − [٠ ، ٢[

---

٢ إذا كانت : د (س) = ٧ فإن مدى الدالة د هو ....

(أ) ح (ب) $ح^+$ (ج) {٧} (د) ح − {٧}

---

٣ إذا كان مجال الدالة د : د (س) = $\frac{س}{|س| + أ}$ هو ح − {−٢ ، ٢}

فإن : أ = ...

(أ) ٢ (ب) −٢ (ج) ± ٢ (د) صفر

---

٤ إذا تقاطع منحنى الدالة د مع منحنى الدالة $د^{-١}$ فى النقطة (ك ، ٢ ك − ٣)

فإن : ك = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (ج) ٤ (د) ٥

---

٥ إذا كان : $٣^{س} = ٥$ فإن : س = ...

(أ) ٢ (ب) لو $_{٣}$ ٥ (ج) لو $_{٥}$ ٣ (د) $\frac{٥}{٣}$

---

٦ $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{س^٢ + ٥}{٦} = $ ....

(أ) صفر (ب) $\frac{٥}{٦}$ (ج) ١ (د) ∞

٧ [illegible]

(أ) [illegible] (ب) [illegible] (جـ) ١٠- (د) ٥-

---

٨ إذا كانت د (س) = [illegible] عند س ≠ أ ، د (أ) = ٢٠٠ متصلة عند س = أ

فإن أ = ...

(أ) ٥ (ب) [illegible] (جـ) ١٢٥ (د) [illegible]

---

٩ إذا كان نق طول نصف قطر الدائرة الخارجة عن المثلث س ص ع

فإن $\frac{\text{ص ع}}{\text{٢ جا س}}$ = ...

(أ) نق (ب) ٢ نق (جـ) $\frac{١}{٢}$ نق (د) ٤ نق

---

١٠ المثلث أ ب جـ فيه : ٦ أ = ٤ ب = ٣ جـ فإن قياس أصغر زوايا المثلث = ...

لأقرب دقيقة.

(أ) ٢٨° ٥٧َ (ب) ٤١° ١٢َ (جـ) ٥٧° ٢٨َ (د) ٣٦° ٥٢َ

---

١١ إذا كانت : د (س) = $\sqrt{\text{س}}$ ، ر (س) = $\text{س}^٢$ فإن : (د ∘ ر) (س) = ...

(أ) س (ب) $\text{س}^٢$ (جـ) $\sqrt{\text{س}}$ (د) |س|

---

١٢ مدى الدالة د : د (س) = $\begin{cases} ٠ & : \text{س} \le ٠ \\ ١ & : \text{س} > ٠ \end{cases}$ هو ......

(أ) {١} (ب) {٠} (جـ) ح (د) {٠ ، ١}

---

١٣ إذا كانت : د : ح^+ ← ح حيث د (س) = س - ٥ ، ر : [-١ ، ٥] ← ح

حيث ر (س) = س - ٢ فإن مجال $\left(\frac{\text{د}}{\text{ر}}\right)$ (س) هو ......

(أ)]٠ ، ٥] (ب)]٠ ، ٥] - {٢}

(جـ)]١ ، ∞[(د) ح

نقطة رأس المنحنى للدالة د : د (س) = (٢ − س)^{٢} + ٣ هي ....

(أ) (٢ ، ٣) (ب) (٢ ، −٣) (جـ) (−٢ ، ٣) (د) (−٢ ، −٣)

في الدالة الأسية د : د (س) = أ^{س} ، ٠ < أ < ١ تكون د (س) > ١

عندما س ∈ ....

(أ) ح (ب) ح$^{+}$ (جـ) ح$^{-}$ (د) ص

إذا كانت الدالة د : د (س) = $\begin{cases} \dfrac{\text{ظتا س}}{\pi - ٢\text{س}} & : ٠ < \text{س} < \dfrac{\pi}{٢} \\ \text{جا}(\pi - \text{س}) & : \text{س} > \dfrac{\pi}{٢} \end{cases}$

فإن : $\lim\limits_{\text{س} \to \frac{\pi}{٢}}$ د (س) = ...

(أ) ٢ (ب) $\frac{\pi}{٢}$ (جـ) π (د) غير موجودة.

$\lim\limits_{\text{س} \to \frac{\pi}{٤}} \dfrac{\text{ظا س}}{\text{س}}$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) $\frac{٤}{\pi}$ (د) ليس لها وجود.

$\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \dfrac{٥ + \text{س}^{-٢}}{٢\text{س}^{-٢} + ١}$ = ...

(أ) $\frac{٥}{٤}$ (ب) $\frac{٥}{٣}$ (جـ) ٥ (د) $\frac{١}{٣}$

س ص ع مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه ١٠ $\sqrt{٣}$ سم فإن طول قطر الدائرة الخارجة لهذا المثلث يساوي .... سم

(أ) ٥ (ب) ١٠ (جـ) ١٥ (د) ٢٠

أ ب حـ مثلث فيه : $\dfrac{\text{جا أ}}{٣} = \dfrac{٢\ \text{جا ب}}{٥} = \dfrac{\text{جا حـ}}{٤}$ فإن : أَ : بَ : حَ = ...

(أ) ٦ : ٥ : ٨ (ب) ٨ : ٥ : ٦ (جـ) ٧ : ٢ : ٤ (د) ٣ : ٥ : ٤

٢١ الشكل المقابل يمثل دالة في س مجالها ....

(أ) ح

(ب) ح -]-٢ ، ٢[

(جـ) ح - [-٢ ، ٢]

(د) ح - {٠}

---

٢٢ إذا كانت د دالة فردية ، أ ∈ مجال د فإن : د (أ) + د (- أ) = ...

(أ) صفر　(ب) ٢ د (أ)　(جـ) ٢ أ　(د) د (أ)

---

٢٣ $\underset{س \to ٠}{\text{نهـــا}} \frac{\text{جا } ٢ س \text{ ظا } ٣ س}{٤ س^{٢}}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$　(ب) $\frac{٣}{٤}$　(جـ) $\frac{٣}{٢}$　(د) ٦

---

٢٤ إذا كان : $\sqrt{٢} \times \sqrt[٣]{٣} = \sqrt[٦]{س}$ فإن : س = ...

(أ) ٢٧　(ب) ٤٨　(جـ) ٧٢　(د) ١٠٨

---

٢٥ إذا كان : لو (س + ١١) = ٢ فإن : س = ...

(أ) -٩　(ب) ٢٢　(جـ) ٨٩　(د) ٩١

---

٢٦ $\underset{س \to ٠}{\text{نهـــا}} \frac{٢ س}{\text{جا } ٣ س}$ = ...

(أ) $\frac{٢}{٣}$　(ب) $\frac{٣}{٢}$　(جـ) ٦　(د) ليس لها وجود.

---

٢٧ $\underset{س \to ١}{\text{نهـــا}} \frac{١ - \sqrt[ن]{س}}{١ - \sqrt[م]{س}}$ = ...

(أ) ١　(ب) $\frac{ن}{م}$　(جـ) -١　(د) $\frac{م}{ن}$

... إذا كانت د(س) = $\begin{cases} ٣س - ١ & س \neq ٢ \\ ٦ & س = ٢ \end{cases}$

فإن نهـا د(س) عندما س ← ٢ = ...

(أ) ... (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ليس لها وجود.

... س ص ع المقدار : $\frac{س^٢ + ص^٢ - ع^٢}{٢ س ص}$ = ...

(أ) جتا س (ب) جتا ص (جـ) جتا ع (د) جا ع

في الشكل المقابل :

أ ب جـ ء شكل رباعي فيه : أ ب = ٨ سم

ب جـ = ٦ سم ، ق(∠ ب) = ٩٠°

ء جـ = ٥ سم ، ق(∠ أ جـ ء) = ٦٠°

فإن مساحة الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ء جـ = ... سم²

(أ) ٩ π (ب) ١٦ π (جـ) ٢٥ π (د) ٤٩ π

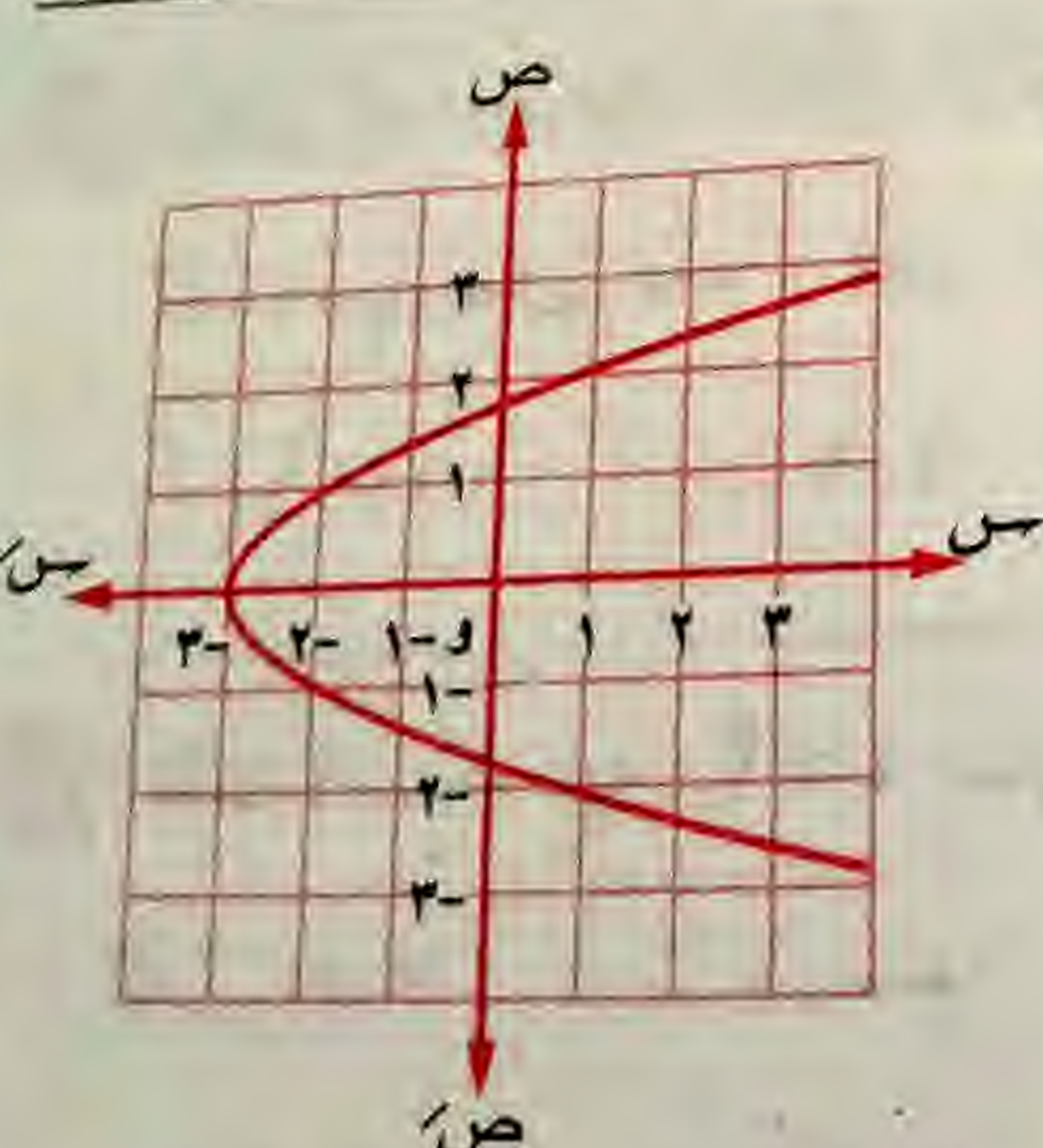
منحنى الدالة ر : ر(س) = س² + ٤ هو نفس منحنى الدالة د : د(س) = س²

بإزاحة مقدارها ٤ وحدات في اتجاه ....

(أ) $\overleftarrow{وس}$ (ب) $\overleftarrow{وس'}$ (جـ) $\overleftarrow{وص}$ (د) $\overleftarrow{وص'}$

المنحنى الموضح بالشكل المقابل متماثل حول المستقيم

الذي معادلته ....



(أ) س = صفر

(ب) ص = صفر

(جـ) ص = -٢

(د) س = ٢

٣٣ إذا كانت : س ∈]-١ ، ١[فإن : |٢ س - ٣| ∈ ....

(أ) ٣ (ب) ٤ (ج) ٥ (د) -٥

٣٤ المقدار : $\frac{٣ \text{ لو } ٢}{\text{لو } ٤ + \text{لو } ٢}$ يكافئ المقدار ....

(أ) لو٢ ٢ (ب) لو٤ ٢ (ج) لو١٠ ٨ (د) لو٢ ٨

٣٥ تكون الدالة الأسية التي أساسها أ تناقصية إذا كانت ....

(أ) أ > ٠ (ب) أ < ٠ (ج) ٠ < أ < ١ (د) -١ < أ < ٠

٣٦ إذا كان : لو٢ (٤ + لو٢ س) = ٢ فإن : س = ...

(أ) ١٦ (ب) ٣٢ (ج) ٦٤ (د) ١٢٨

٣٧ $\lim_{س \to ١} \frac{س^{أ} - س^{ح}}{س^{أ} - س^{ء}}$ = ...

(أ) $\frac{أ + ح}{أ + ء}$ (ب) أ $س^{ح - ء}$ (ج) $\frac{أ - ح}{أ - ء}$ (د) $\frac{ح}{ء}$

٣٨ إذا كانت د : د (س) = $\frac{س^{٢} - ٢٥}{س - ٥}$ حيث س ≠ ٥ فإن قيمة د (٥) التي تجعل الدالة متصلة عند هذا الموضع = ...

(أ) ١٠ (ب) صفر (ج) ٢٥ (د) غير معرفة.

٣٩ المثلث أ ب ح فيه : ق (∠ أ) = ٤٠° ، ق (∠ ح) = ٣٥° ، طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه ٦ سم فإن : أ = ... سم

(أ) ١١,٦ (ب) ٦,٩ (ج) ٧,٧ (د) ٩,٦

٤٠ المثلث أ ب ح فيه : أ = ٥ سم ، ب = ٧ سم ، ق (∠ ح) = ٦٥°

فإن : ح = ... سم

(أ) ٦,٧ (ب) ٧,٦ (ج) ٥,٧ (د) ٧,٥

إرشادات نماذج اختبارات الكتاب المدرسي في التفاضل وحساب المثلثات

الاختبار الأول

١

① (جـ) ② (ب) ③ (د) ④ (جـ)

٢

(أ) ① $\frac{٨}{٧}$ ② ١٧

(ب) ق(∠أ) = ٢٥ ٤٨°، ق(∠ب) = ١٤ ٦٣°

، ق(∠جـ) = ٦١ ٦٨°، جـ = ٢٦ سم

٣

(أ) ① صفر ② ١ ③ غير موجودة

(ب) محيط متوازي الأضلاع = ٢٨ سم

٤

(أ) ق(∠ب) = ٩ ٦٤°، أ، ٥١ ١١٥°

(ب) م = $-\frac{١}{٢}$

٥

(أ) ٢ (ب) $\frac{١}{١٦}$

الاختبار الثاني

١

① (د) ② (د) ③ (أ) ④ (جـ)

٢

(أ) م = -١

(ب) ق(∠جـ) = ٩٠°، مساحة Δ أ ب جـ = ٢٤ سم^٢

٣

(أ) $\frac{٣}{٢}$

(ب) جـ = ١٩.٥٠٤ سم، ق(∠أ) = ٢٠ ٢٦°

، ق(∠ب) = ٤٠ ٤٧°

٤

(أ) $-\frac{٥}{٤}$

(ب) أثبت بنفسك، مساحة الشكل أ ب جـ ء = ١٢٤ سم^٢

٥

(أ) ① $\frac{١}{٤}$ ② ٢

(ب) ٦١.٩ سم^٢

إرشادات نماذج الامتحانات النهائية

النموذج الأول

١ (ب) **٢** (جـ) **٣** (ب) **٤** (ب)

٥

∵ جـ^٢ = أ^٢ + ب^٢ - ٢ أ ب جتا جـ

= ٤٩ + ٨١ - ٢ × ٧ × ٩ جتا ٤٣ ٩٦°

∴ جـ = ١٢ سم

، مساحة Δ أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ أ ب جا جـ

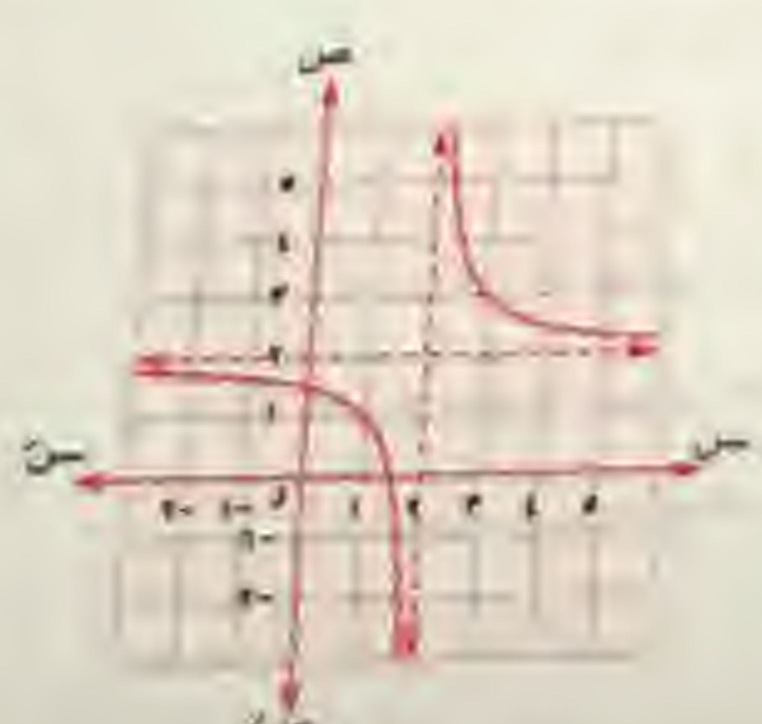
= $\frac{١}{٢}$ × ٧ × ٩ جا ٤٣ ٩٦°

= ٣١ سم^٢

٦ (ب) **٧** (أ)

٨

ر(س) = $\frac{١}{س - ٢}$ + ٢



مدى الدالة ر هو ح - {٢}

، ر تناقصية في كل من]-∞ ، ٢[،]٢ ، ∞[

٩ (جـ) **١٠** (أ) **١١** (ب)

١٢ (جـ) **١٣** (أ) **١٤** (جـ)

١٥

بوضع ٢ - س ≤ ٠ ∴ س ≥ ٢

∴ مجال د هو]-∞ ، ٢] ، مدى د هو [٢ ، ∞[

، ∵ ص = ٢ + $\sqrt{٢ - س}$ وبتبديل المتغيرين

∴ س = ٢ + $\sqrt{٢ - ص}$

∴ $\sqrt{٢ - ص}$ = س - ٢

∴ ٢ - ص = س^٢ - ٤ س + ٤

∴ ص = - س^٢ + ٤ س - ١

∴ د$^{-١}$(س) = - س^٢ + ٤ س - ١

، مجال د$^{-١}$ = مدى د = [٢ ، ∞[

، مدى د$^{-١}$ = مجال د =]-∞ ، ٢]

١٦ (جـ) **١٧** (ب) **١٨** (أ)

١٩ (د) **٢٠** (د)

٢١

د(٢$^+$) = نهـــا$_{س ← ٢^+}$ (٥ س - ٤) = ٦

، د(٢$^-$) = نهـــا$_{س ← ٢^-}$ (س^٢ - س + ٤) = ٦

∴ د(٢$^+$) = د(٢$^-$) = ٦

∴ نهـــا$_{س ← ٢}$ د(س) = ٦

، ∵ د(٢) = ك

∴ ك = ٦ حتى تصبح د متصلة عند س = ٢

٢٢ (أ) **٢٣** (د) **٢٤** (ب)

٢٥ (أ) **٢٦** (جـ) **٢٧** (جـ)

٢٨ (ب) **٢٩** (جـ) **٣٠** (أ)

٣١ (أ) **٣٢** (ب)

النموذج الثاني

١ (جـ) **٢** (أ)

إرشادات نماذج اختبارات الكتاب المدرسى فى التفاضل وحساب المثلثات

الاختبار الأول

١

① (جـ) ② (ب) ③ (د) ④ (جـ)

٢

(أ) ① $\frac{٨٠}{٧}$ ② ١٧

(ب) ق (∠ أ) = ٢٥ ٤٨° ، ق (∠ ب) = ٦٤ ٦٣°

، ق (∠ جـ) = ٦١ ٦٨° ، جـ = ٢٦ سم

٣

(أ) ① صفر ② ١ ③ غير موجودة

(ب) محيط متوازى الأضلاع = ٣٨ سم

٤

(أ) ق (∠ ب) = ٩ ٦٤° أ، ٥١ ١١٥°

(ب) أ = $-\frac{١}{٢}$

٥

(أ) ٢ (ب) $\frac{١}{١٦}$

الاختبار الثانى

١

① (د) ② (د) ③ (أ) ④ (جـ)

٢

(أ) أ = -١

(ب) ق (∠ جـ) = ٩٠° ، مساحة △ أ ب جـ = ٢٤ سم^٢

٣

(أ) $\frac{٣}{٢}$

(ب) جـ = ١٩.٥٠٤ سم ، ق (∠ أ) = ٢٠ ٢٦°

، ق (∠ ب) = ٤٠ ٤٧°

٤

(أ) $-\frac{٤}{٤}$

(ب) أثبت بنفسك ، مساحة الشكل أ ب جـ ء = ١٢٤ سم^٢

٥

(أ) ① $\frac{١}{٤}$ ② ٢

(ب) ٦١.٩ سم^٢

إرشادات نماذج الامتحانات النهائية

النموذج الأول

١ (ب) **٢** (جـ) **٣** (ب) **٤** (ب)

٥

∵ جـ^٢ = أ^٢ + ب^٢ - ٢ أ ب جتا جـ

= ٤٩ + ٨١ - ٢ × ٧ × ٩ جتا ٣٢ ٩٦°

∴ جـ = ١٢ سم

، مساحة △ أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ أ ب جا جـ

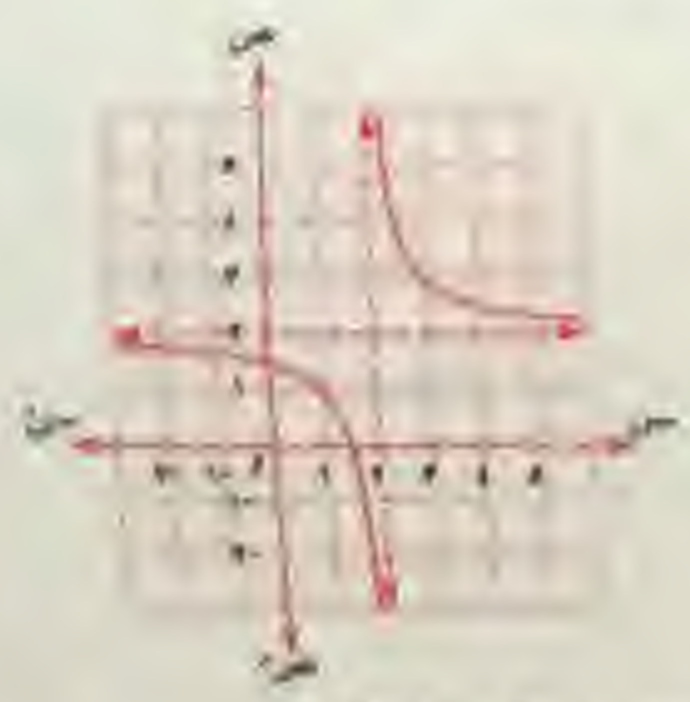
= $\frac{١}{٢}$ × ٧ × ٩ جا ٣٢ ٩٦°

= ٣١ سم^٢

٦ (ب) **٧** (أ)

٨

ن (س) = $\frac{١}{س - ٢}$ + ٢



مدى الدالة ن هو ح - {٢}

، ن تناقصية فى كل من]-∞ ، ٢[،]٢ ، ∞[

٩ (جـ) **١٠** (أ) **١١** (ب)

١٢ (جـ) **١٣** (أ) **١٤** (ب)

١٥

بوضع ٢ - س ≤ ٠ ∴ س ≥ ٢

∴ مجال د هو]-∞ ، ٢] ، مدى د هو [٢ ، ∞[

، ∵ ص = ٢ + $\sqrt{٢ - س}$ وبتبديل المتغيرين

∴ س = ٢ + $\sqrt{٢ - ص}$

∴ $\sqrt{٢ - ص}$ = س - ٢

∴ ٢ - ص = س^٢ - ٤ س + ٤

∴ ص = - س^٢ + ٤ س - ٢

∴ د$^{-١}$ (س) = - س^٢ + ٤ س - ٢

، مجال د$^{-١}$ = مدى د = [٢ ، ∞[

، مدى د$^{-١}$ = مجال د =]-∞ ، ٢]

١٦ (جـ) **١٧** (ب) **١٨** (أ)

١٩ (د) **٢٠** (د)

٢١

د (٢$^+$) = نهـا (س ← ٢$^+$) (٥ س - ٤) = ٦

، د (٢$^-$) = نهـا (س ← ٢$^-$) (س^٢ - س + ٤) = ٦

∴ د (٢$^+$) = د (٢$^-$) = ٦

∴ نهـا (س ← ٢) د (س) = ٦

، ∵ د (٢) = ك

∴ ك = ٦ حتى تصبح د متصلة عند س = ٢

٢٢ (أ) **٢٣** (د) **٢٤** (ب)

٢٥ (أ) **٢٦** (جـ) **٢٧** (جـ)

٢٨ (ب) **٢٩** (جـ) **٣٠** (أ)

٣١ (أ) **٣٢** (ب)

النموذج الثانى

١ (جـ)

مجال ن = ح - {٢} ، المدى = ح - {٣}

ن تناقصية فى كل من]-∞ ، ٢[،]٢ ، ∞[

٣

(أب)^2 = (أ ء)^2 + (ب ء)^2

− ٢ × أ ء × ب ء جتا θ (١)

، (أ حـ)^2 = (أ ء)^2 + (حـ ء)^2

− ٢ × أ ء × حـ ء جتا (١٨٠° − θ)

، ∵ ب ء = حـ ء ، جتا (١٨٠° − θ) = − جتا θ

∴ (أ حـ)^2 = (أ ء)^2 + (ب ء)^2 + ٢ × أ ء × ب ء جتا θ (٢)

بجمع (١) ، (٢) :

∴ (أ ب)^2 + (أ حـ)^2 = ٢ (أ ء)^2 + ٢ (ب ء)^2

∴ (٥)^2 + (٨)^2 = ٢ (أ ء)^2 + ٢ (٦)^2

أ ء = $\frac{\sqrt{٣٤}}{٢}$ = ٢.٩ سم

٤ (د) **٥** (ب) **٦** (جـ)

٧

$\frac{١}{س}$ = $\frac{١}{٥ + ٢\sqrt{٦}}$ × $\frac{٥ - ٢\sqrt{٦}}{٥ - ٢\sqrt{٦}}$ = $\frac{٥ - ٢\sqrt{٦}}{٢٥ - ٢٤}$

= ٥ − ٢$\sqrt{٦}$

∴ س + $\frac{١}{س}$ = ٥ + ٢$\sqrt{٦}$ + ٥ − ٢$\sqrt{٦}$ = ١٠

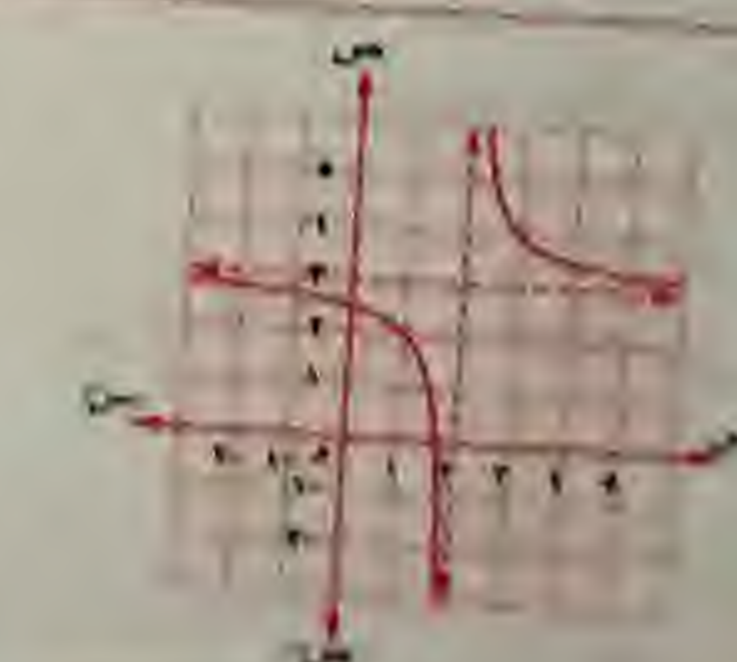
∴ لو (س + $\frac{١}{س}$) = لو ١٠ = ١

٨ (جـ) **٩** (جـ) **١٠** (جـ)

١١ (جـ) **١٢** (ب) **١٣** (د)

١٤ (د) **١٥** (أ)

١٦



مجال ر = ح − {٢} ، المدى = ح − {٣}

، ر تناقصية فى كل من]− ∞ ، ٢[،]٢ ، ∞[

، ر ليست زوجية وليست فردية ، ر أحادية

١٧ (د) **١٨** (جـ) **١٩** (جـ) **٢٠** (جـ)

٢١

د (٣$^+$) = نهــا$_{س ← ٣^+}$ (٣ س + ١) = ١٠

، د (٣$^-$) = نهــا$_{س ← ٣^-}$ (س^2 + ١) = ١٠

، ∵ د (٣$^+$) = د (٣$^-$) = ١٠

∴ نهــا$_{س ← ٣}$ د (س) موجودة وتساوى ١٠

٢٢ (جـ) **٢٣** (د) **٢٤** (د) **٢٥** (ب)

٢٦ (ب) **٢٧** (ب) **٢٨** (د) **٢٩** (أ)

٣٠ (أ) **٣١** (أ) **٣٢** (أ)

النموذج الثالث

١

∵ د (٢ س − ١) + د (س − ٢) = ٥٠

∴ ٧$^{٢ س − ١ + ١}$ + ٧$^{س − ٢ + ١}$ = ٥٠

∴ ٧$^{٢ س}$ + ٧$^{س − ١}$ = ٥٠

∴ ٧ × ٧$^{٢ س}$ + ٧^{س} − ٣٥٠ = ٠

∴ (٧^{س} − ٧) × (٧ × ٧^{س} + ٥٠) = ٠

∴ ٧^{س} = ٧ ∴ س = ١

أو ٧$^{س + ١}$ = − ٥٠ (مرفوض)

٢ (جـ) **٣** (د) **٤** (ب) **٥** (ب)

٦ (د) **٧** (ب) **٨** (أ)

٧

ق (∠ أ ء ب) = ٧٠°

، ق (∠ أ ب ء) = ١٨٠° − (٥٠° + ٧٠°) = ٦٠°

∴ $\frac{٨}{جا ٥٠°}$ = $\frac{أ ب}{جا ٧٠°}$ = $\frac{أ ء}{جا ٦٠°}$

∴ أ ب = ٩.٨ سم ، أ ء = ٩ سم

محيط متوازى الأضلاع = ٣٨ سم

١٠ (أ) **١١** (ب) **١٢** (أ) **١٣** (جـ)

١٤ (د) **١٥** (د) **١٦** (د) **١٧** (ب)

١٨ (أ) **١٩** (أ) **٢٠** (جـ) **٢١** (ب)

٢٢

د (س) = { − س ، س ≤ ٠ ؛ س^2 ، س > ٠ }

• مدى الدالة = [٠ ، ∞[

• الدالة تناقصية فى]− ∞ ، ٠[، تزايدية فى]٠ ، ∞[

٢٣ (د) **٢٤** (ب) **٢٥** (ب)

٢٦ (جـ) **٢٧** (جـ)

٢٨

∵ د متصلة عند س = صفر

∴ د (٠) = نهــا$_{س ← ٠}$ د (س)

∴ ك = نهــا$_{س ← ٠}$ $\frac{(س + ٢)^٥ − ٢^٥}{س}$

∴ ك = ٥ × ٢^٤ = ٨٠

٢٩ (د) **٣٠** (جـ) **٣١** (د) **٣٢** (ب)

النموذج الرابع

١ (أ) **٢** (أ) **٣** (جـ) **٤** (د)

٥ (ب) **٦** (د) **٧** (د)

٨

حـ = ٢١ − (٨ + ٧) = ٦ سم

∴ حـ هو طول أصغر ضلع

∴ ق (∠ حـ) هو قياس أصغر زاوية

∴ جتا حـ = $\frac{٦٤ + ٤٩ − ٣٦}{٢ × ٨ × ٧}$

∴ ق (∠ حـ) = ٤٦° ٣٤ َ ٤ ً

٩

نوجد الدالة العكسية للدالة د

بوضع ص = ٢ س + أ وبتبديل المتغيرين

∴ س = ٢ ص + أ ∴ ٢ ص = س − أ

∴ ص = $\frac{١}{٢}$ س − $\frac{١}{٢}$ أ

∴ د$^{-١}$ (س) = $\frac{١}{٢}$ س − $\frac{١}{٢}$ أ

، ∵ ر هى الدالة العكسية للدالة د

∴ ر (س) = د$^{-١}$ (س)

∴ ب س + ٣ = $\frac{١}{٢}$ س − $\frac{١}{٢}$ أ

وبمقارنة المعاملات : ∴ ب = $\frac{١}{٢}$ ، أ = −٦

١٠ (أ) **١١** (جـ) **١٢** (جـ)

١٣

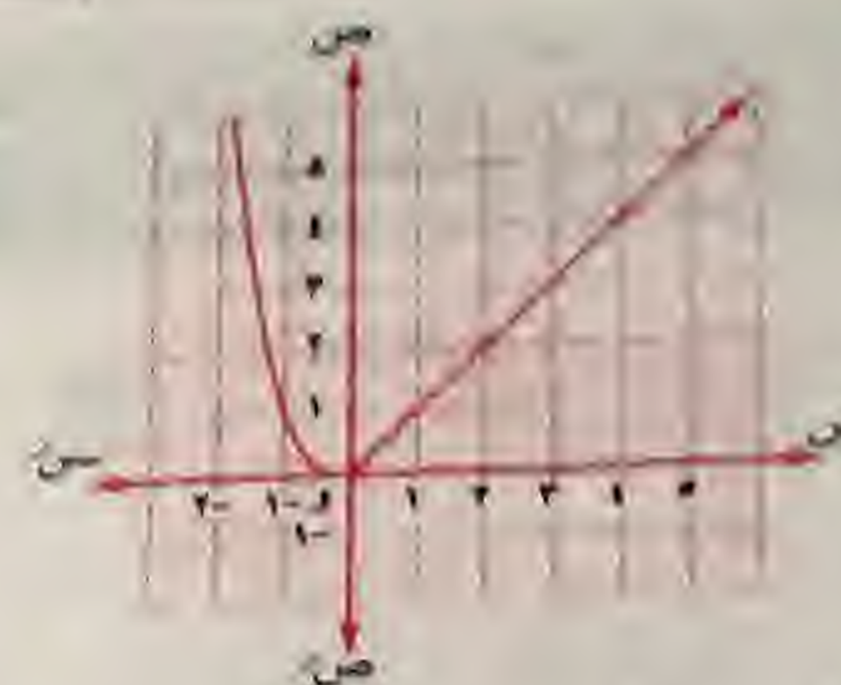
∵ د (١$^-$) = د (١$^+$)

∴ − أ − ٣ = − ٣ − ٢

∴ أ = ٢

١٤ (د) **١٥** (جـ)

١٦



- المدى = [٠ ، ∞[
- الدالة ليست زوجية وليست فردية
- الدالة تزايدية فى]٠ ، ∞[وتناقصية فى]− ∞ ، ٠[

١٧ (جـ)	**١٨** (أ)	**١٩** (ب)	**٢٠** (د)
٢١ (د)	**٢٢** (أ)	**٢٣** (جـ)	**٢٤** (ب)
٢٥ (ب)	**٢٦** (ب)	**٢٧** (ب)	**٢٨** (ب)
٢٩ (ب)	**٣٠** (د)	**٣١** (د)	**٣٢** (ب)

النموذج الخامس

١ (جـ)	**٢** (د)	**٣** (أ)	**٤** (ب)
٥ (د)	**٦** (د)	**٧** (جـ)	

٨

∵ $٣^{٢س-١}$ − ٤ × $٣^{س}$ + ٩ = ٠ ، وبالضرب × ٣

∴ $٣^{٢س}$ − ١٢ × $٣^{س}$ + ٢٧ = ٠

∴ ($٣^{س}$ − ٣) ($٣^{س}$ − ٩) = ٠

∴ $٣^{س}$ = ٣ ∴ س = ١

، $٣^{س}$ = ٩ = $٣^{٢}$ ∴ س = ٢

∴ مجموع الحل = {١ ، ٢}

٩ (جـ)	**١٠** (د)	**١١** (جـ)	**١٢** (جـ)
١٣ (جـ)	**١٤** (جـ)	**١٥** (جـ)	

١٦

من Δ أ ب ء :

ق (∠ أ) = ١٨٠° − (٥٠° − ٦٥°)

= ٦٥°

∴ ب ء = أ ب = ٢٢ سم

، من Δ ب ء حـ :

$$جتا (∠ حـ ب ء) = \frac{(٢٢)^٢ + (٢٥)^٢ - (١٨)^٢}{٢ \times ٢٢ \times ٢٥}$$

∴ ق (∠ حـ ب ء) = ٤٤° ٢٨َ ٩ً

١٧ (د)	**١٨** (د)	**١٩** (أ)	**٢٠** (ب)

٢١

- د (س) = |س| + ١ ، ر (س) = $\frac{١}{س - ١}$

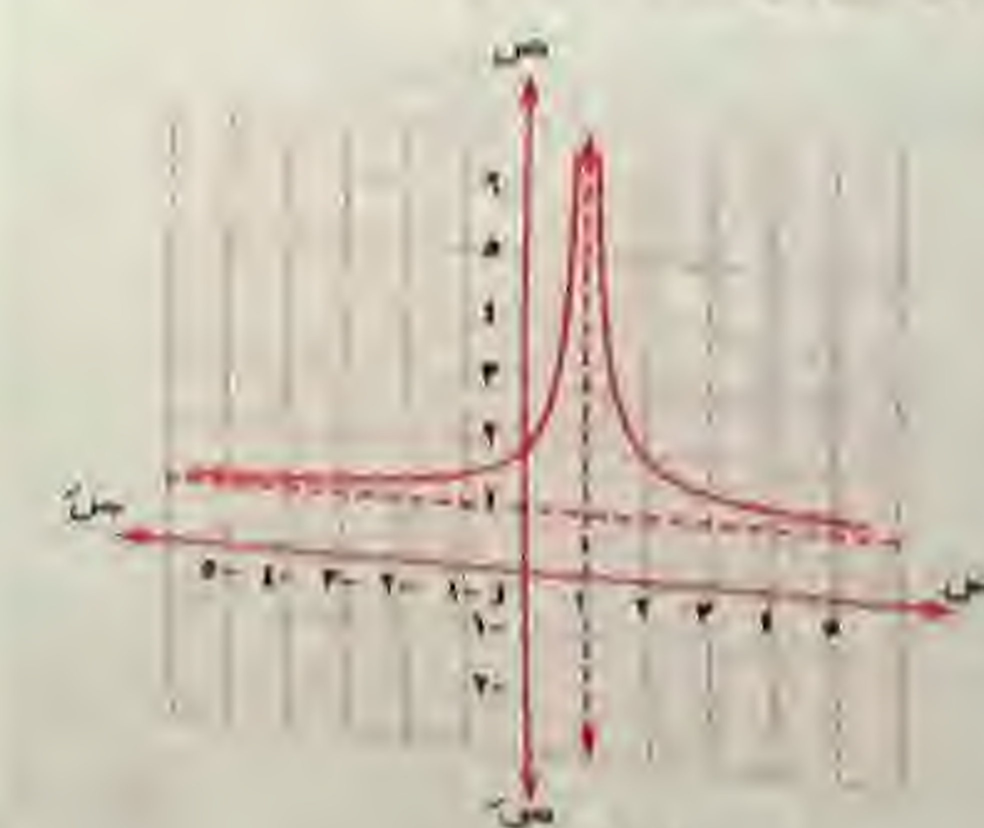
∴ (د ∘ ر) (س) = د [ر (س)] = د ($\frac{١}{س - ١}$)

= |$\frac{١}{س - ١}$| + ١

، م ر = مجال ر = ح − {١} ، م د = ح

∴ مجال (د ∘ ر) = ح − {١}

- التمثيل البيانى للدالة (د ∘ ر) :



* المجال = ح − {١}
* الدالة ليست زوجية وليست فردية
* المنحنى متماثل بالنسبة للمستقيم س = ١
* الدالة ليست أحادية

٢٢ (ب)	**٢٣** (ب)	**٢٤** (ب)	
٢٥ (ب)	**٢٦** (جـ)	**٢٧** (جـ)	

٢٨

د (٠⁻) = $\underset{س \to ٠^-}{نهـا} \frac{س + طا س}{٢ س - طا ٢ س}$

= $\underset{س \to ٠^-}{نهـا} \frac{س (١ + \frac{طا س}{س})}{س (٢ - \frac{طا ٢ س}{س})}$ = $\frac{١ + ١}{٢ - ٢}$ = ٢

، د (٠⁺) = $\underset{س \to ٠^+}{نهـا}$ (٢ س − ١) = −١

، ∵ د (٠⁻) ≠ د (٠⁺)

∴ د غير متصلة عند س = ٠

٢٩ (د)	**٣٠** (ب)	**٣١** (ب)	**٣٢** (جـ)

النموذج السادس

١ (أ)	**٢** (جـ)	**٣** (ب)

٤

① د١ (− س) = (− س) جتا (− س)

= − س جتا س = − د١ (س)

∴ د١ دالة فردية

② د٢ (− س) = { (− س)^٢ ، − س ≥ ٠ ؛ |− س| ، − س < ٠ }

= { س^٢ ، س ≤ ٠ ؛ |س| ، س > ٠ } ≠ ± د٢ (س)

∴ د٢ ليست زوجية وليست فردية.

٥ (جـ)	**٦** (ب)	**٧** (جـ)	**٨** (جـ)
٩ (ب)	**١٠** (ب)	**١١** (ب)	**١٢** (أ)

١٣

نضع ص = $\frac{١}{س^٢ + ١}$ حيث س ∈ ح⁻

، ص ∈]٠ ، ١[(بتبديل المتغيرين)

∴ س = $\frac{١}{ص^٢ + ١}$ حيث ص ∈ ح⁻ ، س ∈]٠ ، ١[

∴ ص^٢ + ١ = $\frac{١}{س}$

∴ ص^٢ = $\frac{١}{س}$ − ١ ∴ ص = $-\sqrt{\frac{١}{س} - ١}$

∴ د⁻¹ (س) = $-\sqrt{\frac{١}{س} - ١}$ ، مجال د⁻¹ =]٠ ، ١[

، مدى د⁻¹ = مجال د = ح⁻

١٤ (ب)	**١٥** (ب)	**١٦** (جـ)	**١٧** (ب)
١٨ (جـ)	**١٩** (ب)	**٢٠** (د)	**٢١** (أ)
٢٢ (ب)	**٢٣** (ب)		

٢٤

ق (∠ حـ) = ١٨٠° − (٤٠° + ٣٠°) = ١١٠°

∵ $\frac{أ}{جا أ} = \frac{ب}{جا ب} = \frac{حـ}{جا حـ}$

∴ $\frac{أ}{جا ٤٠°} = \frac{١٠}{جا ٣٠°} = \frac{حـ}{جا ١١٠°}$

∴ أ = ١٢,٩ ، حـ = ١٨,٨ سم

٢٥ (أ)	**٢٦** (أ)	**٢٧** (ب)

٢٨

∵ د متصلة عند س = ٣

∴ $\underset{س \to ٣}{نهـا} \frac{س^٢ + ٢ س - ٣}{س + ٣}$ = ٢ + ٢ = ...

∴ $\underset{س \to ٣}{نهـا} \frac{(س + ٣)(س - ١)}{س + ٣}$ = ٢ + ٢

∴ ... = ٢ + ٢

٢٩ (جـ)	**٣٠** (ب)	**٣١** (جـ)	**٣٢** (ب)

النموذج السابع

١ (أ) ٢ (ج) ٣ (ب)

٤

∴ $س^{\frac{2}{3}} - ١٠ س^{\frac{1}{3}} + ٩ = ٠$

∴ $(س^{\frac{1}{3}} - ٩)(س^{\frac{1}{3}} - ١) = ٠$ ∴ $س^{\frac{1}{3}} = ٩$

∴ $س = \pm ٢٧$ أو $س^{\frac{1}{3}} = ١$ ∴ $س = \pm ١$

∴ مجموعة الحل = $\{-١ ، ١ ، -٢٧ ، ٢٧\}$

٥ (د) ٦ (ج) ٧ (ب) ٨ (ب)
٩ (أ) ١٠ (د) ١١ (د) ١٢ (د)
١٣ (ب) ١٤ (د) ١٥ (ب)

١٦

$ع^2 = ٢٥ + ٤٩ - ٢ \times ٥ \times ٧$ جتا $٦٥°$

∴ $ع \approx ٦,٧$ سم

∴ محيط Δ س ص ع = ١٨,٧ سم

١٧ (ب) ١٨ (ب) ١٩ (د)

٢٠

[illegible]

بالقسمة بسطًا ومقامًا على س

[illegible]

∴ $د(٠^+) = د(٠^-) = ٢$

∴ $\lim د(س) = ٢$

٢١ (ج) ٢٢ (أ) ٢٣ (ب)

٢٤

∴ مجال ر = [٢ ، ∞[

∴ (د ∘ ر)(س) = د [ر(س)]

= د ($\sqrt{س - ٢}$)

= $(\sqrt{س - ٢})^2 - ٢$

= س - ٢ - ٢ = س - ٤

∴ ع = قيم س التي تجعل $\sqrt{س - ٢}$ في مجال د وهي ع

∴ مجال (د ∘ ر) = [٢ ، ∞[

∴ (د ∘ ر)(٢) = ٢ - ٤ = -٢

٢٥ (ب) ٢٦ (أ) ٢٧ (ب) ٢٨ (ج)
٢٩ (ب) ٣٠ (د) ٣١ (د) ٣٢ (د)

النموذج الثامن

١ (ب) ٢ (د) ٣ (ج) ٤ (د)
٥ (أ) ٦ (أ) ٧ (ب)

٨

$٥^{س} + ٥^{س-١} = ١٥٠$

∴ $٥^{س-١}(٥ + ١) = ١٥٠$

∴ $٥^{س-١} = ٢٥ = ٥^2$ ∴ س = ٣

٩ (د) ١٠ (ج) ١١ (ب) ١٢ (ج)
١٣ (أ) ١٤ (أ) ١٥ (ج) ١٦ (أ)

١٧

ق(∠ س) = ١٨٠° - (١١٢° + ٣٢°) = ٣٦°

[illegible]

∴ ق = ١٧ سم ، س ≈ ١٨ سم

∴ مساحة Δ = $\frac{1}{2}$ [illegible] جا

= $\frac{1}{2} \times ١٨ \times ١٩ \times$ جا $١١٢°$

≈ ١٥٩ سم²

١٨ (أ) ١٩ (ب) ٢٠ (د)

٢١

∵ د (س) = [illegible]

= س + ٢ ، س ≠ ٢

∴ س ≠ ٢

• مجال (د + ع) = ع - {٢} =]-٢ ، ٢[

س	[illegible]	٢	-	٢
(د + ع)(س)	[illegible]	-	٢	٤

• المدى =]٠ ، ∞[• الدالة تزايدية على مجالها

٢٢ (ب) ٢٣ (د)

٢٤

∵ د متصلة عند ٢

∴ $٢ \times ٢^2 + ٢ = ١٠$ ∴ [illegible]

∴ أ = ٢ أو أ = ١

٢٥ (د) ٢٦ (د) ٢٧ (ج) ٢٨ (د)
٢٩ (أ) ٣٠ (ب) ٣١ (ج) ٣٢ (أ)

النموذج التاسع

١ (د) ٢ (أ) ٣ (ج)

٤

[illegible]

٥ (ج) ٦ (أ) ٧ (د)

٨

∵ د متصلة عند س = ٢

∴ [illegible] = ١

∴ [illegible]

∴ $١ = ١ - ٢ + ٤$

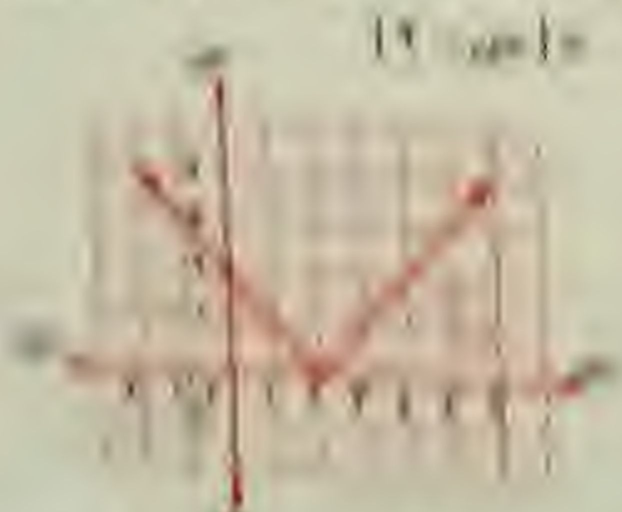
∴ [illegible]

∴ [illegible]

٩ (أ) ١٠ (ب) ١١ (ج) ١٢ (ج)
١٣ (ج) ١٤ (أ) ١٥ (أ)

١٦

∴ د(س) = [illegible]



∴ المدى = [٠ ، ∞[، تناقصية على]-∞ ، ٢] ، تزايدية على [٢ ، ∞[

١٧ (ب) ١٨ (ب) ١٩ (ب) ٢٠ (أ)

٢١

∵ $\frac{٣٦}{جا أ} = \frac{٣٠}{جا ب} = \frac{حـ}{جا حـ} = ٤٨$

∴ جا أ $= \frac{٣}{٤}$

∵ المثلث حاد الزوايا

∴ ق(∠أ) = ٤٨° ٣٥ ٢٥ ، جا ب = [illegible]

∵ المثلث حاد الزوايا

∴ ق(∠ب) = ٦٣° ١٤ ٤

∴ ق(∠حـ) = ٦٨° ١٠ ٢٩

∴ حـ = ٤٨ جا ٦٨° ١٠ ٢٩ = ٣٦ سم [illegible]

٢٢ (أ) ٢٣ (د) ٢٤ (د) ٢٥ (حـ)

٢٦ (حـ) ٢٧ (د) ٢٨ (ب) ٢٩ (حـ)

٣٠ (حـ) ٣١ (ب) ٣٢ (د)

النموذج العاشر

١ (أ) ٢ (د) ٣ (ب) ٤ (حـ)

٥ (د) ٦ (حـ) ٧ (ب)

٨

∵ د متصلة عند س = ٢

∴ د(٢) = [illegible]

[illegible]

٩

∵ ٣٦ = ب + حـ + [illegible]

∴ ب + حـ = ٤٤

∴ ب = ٤٤ − حـ

∵ أ² = ب² + حـ² − ٢ ب حـ جتا أ

∴ (٣٦)² = (٤٤ − حـ)² + حـ² − ٢(٤٤ − حـ) حـ جتا ٦٠°

∴ ١٢٩٦ = ١٩٣٦ − ٨٨ حـ + حـ² + حـ² − ٤٤ حـ + حـ²

∴ ٣ حـ² − ١٣٢ حـ + ٦٤٠ = ٠

∴ حـ² − ٤٤ حـ + ٤٢٠ = ٠ [illegible]

∴ (حـ − ٣٠)(حـ − ١٤) = ٠

∴ حـ = ٣٠ سم ومنها ب = ١٤ سم

أو حـ = ١٤ سم ومنها ب = ٣٠ سم

∴ ب حـ = ١٤ × ٣٠ = ٤٢٠

∴ مساحة Δ أ ب حـ = $\frac{١}{٢}$ ب حـ جا أ

$= \frac{١}{٢} \times ٤٢٠ \times$ جا ٦٠°

$= ١٠٥ \sqrt{٣}$ سم²

١٠ (د) ١١ (د) ١٢ (حـ) ١٣ (د)

١٤ (أ) ١٥ (أ) ١٦ (ب) ١٧ (ب)

١٨ (ب) ١٩ (د) ٢٠ (حـ)

٢١

[illegible]

[illegible]

١ محافظة القاهرة

١ (ب) **٢** (جـ) **٣** (ب)

٤ (جـ) **٥** (د) **٦** (جـ)

٧ (د)

الحل :

∵ $|س| = \begin{cases} س & ، س \geq ٠ \\ -س & ، س < ٠ \end{cases} = \begin{cases} س & ، س > ٠ \\ -س & ، س \leq ٠ \end{cases}$

∴ مجموعة حل المعادلة |س| = −س هي]−∞ ، ٠]

٨ (ب)

الحل :

$(م \circ د)(١) = م(د(١)) = م(٣) = ٢$

٩ (ب)

١٠ (د)

الحل :

∵ ٥ ∈ مجال الدالة د ، −٥ ∉ مجال الدالة د

∴ الدالة د ليست زوجية وليست فردية.

١١ (ب)

الحل :

بوضع س − ٤ > ٠ ∴ س > ٤

∴ مجال الدالة د =]٤ ، ∞[

١٢ (ب)

١٣ (أ)

الحل :

$٣^{٢س-١} + ٩^{س+١} = ٧٥٦$

∴ $٣^{٢س-١} + ٣^{٢س+٢} = ٧٥٦$

∴ $٣^{٢س}(٣^{-١} + ٣^{٢}) = ٧٥٦$

∴ $٣^{٢س} \times \frac{٢٨}{٣} = ٧٥٦$

∴ $٣^{٢س} = ٧٥٦ \times \frac{٣}{٢٨}$ ∴ $٣^{٢س} = ٨١ = ٣^{٤}$

∴ ٢س = ٤ ∴ س = ٢

١٤ (د)

١٥ (جـ)

الحل :

$لو\left(\frac{أ^{٢}}{ب جـ}\right) = لو أ^{٢} - لو ب جـ = ٢ لو أ - لو ب - لو جـ$

١٦ (د)

الحل :

س − ٢ = ٠ ∴ س = ٢

١٧ (د)

الحل :

∵ د دالة فردية ∴ د(−س) = −د(س)

∴ د(−س) + د(س) = −د(س) + د(س)

= صفر

١٨ (أ)

١٩ (جـ)

الحل :

∵ $\frac{١}{|س|} \geq ١$ ∴ |س| ≤ ١ ، س ≠ ٠

∴ −١ ≤ س ≤ ١ ، س ≠ ٠

∴ مجموعة الحل = [−١ ، ١] − {٠}

٢٠ (أ)

الحل :

$٣^{ص} = ٢س - ١$ بتبديل المتغيرات

∴ $٣^{س} = ٢ص - ١$ ∴ $ص = \frac{٣^{س}+١}{٢}$

∴ $د^{-١}(س) = \frac{٣^{س}+١}{٢}$ ∴ $د^{-١}(٠) = \frac{٣^{٠}+١}{٢} = ١$

٢١ (جـ) **٢٢** (ب) **٢٣** (أ)

٢٤ (د)

الحل :

$\lim_{س \to ٠} \frac{س^{٢}-٤}{س-٢} = \frac{(٠)^{٢}-٤}{٠-٢} = ٢$

٢٥ (جـ)

الحل :

$\lim_{س \to ٠} \frac{٢س}{جا ٢س} = \lim_{س \to ٠} \frac{٢}{\frac{جا ٢س}{س}} = \frac{٢}{٢}$

٢٦ (ب)

الحل :

$\lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt{س+١}-٢}{س-٢} = \lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt{س+١}-٢}{س-٢} \times \frac{\sqrt{س+١}+٢}{\sqrt{س+١}+٢}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{س+١-٤}{(س-٣)(\sqrt{س+١}+٢)} = \frac{١}{٤}$

٢٧ (أ)

الحل :

$\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٥}-٣٢}{س^{٣}-٨} = \lim_{س \to ٢} \frac{س^{٥}-٢^{٥}}{س^{٣}-٢^{٣}}$

$= \frac{٥}{٣} \times ٢^{٢} = \frac{٢٠}{٣}$

٢٨ (أ)

الحل :

$\lim_{س \to ١} \frac{س^{٣}+س^{٢}-٢}{س-١} = \lim_{س \to ١} \frac{س^{٣}-١}{س-١}$

$+ \lim_{س \to ١} \frac{س^{٢}-١}{س-١}$

[illegible]

٢٩ (ب)

الحل : [illegible]

٣٠ (أ)

الحل : [illegible]

٣١ (أ)

الحل :

بوضع س − ١ ≥ ٠ ∴ س ≥ ١

∴ مجال د = [١ ، ∞[

[illegible]

٣٢ (جـ)

الحل : [illegible]

٣٣ (ب)

الحل : [illegible]

٣٤ (أ)

الحل :

∵ $\frac{\text{جـ}}{\text{جا س}}$ = ٦ = ٢ نق

∴ طول قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث = ٦ وحدات طول.

٣٥ (جـ)

الحل :

∵ ٢ جا أ = ٣ جا ب = ٤ جا جـ بالقسمة على ١٢

∴ $\frac{\text{٢ جا أ}}{١٢} = \frac{\text{٣ جا ب}}{١٢} = \frac{\text{٤ جا جـ}}{١٢}$

∴ $\frac{\text{جا أ}}{٦} = \frac{\text{جا ب}}{٤} = \frac{\text{جا جـ}}{٣}$

∴ أ : ب : جـ = ٦ : ٤ : ٣

٣٦ (ب)

الحل :

ق (∠ جـ) = ١٨٠° − (١٠٠° + ١٥°) = ٦٥°

، ∵ ∠ ب أصغر الزوايا قياسًا

∴ ب أصغر الأضلاع طولًا

، ∵ $\frac{\text{ب}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{جا جـ}}$ ∴ $\frac{\text{ب}}{\text{جا ١٥°}} = \frac{٤,٥}{\text{جا ٦٥°}}$

∴ ب = $\frac{\text{٤,٥ × جا ١٥°}}{\text{جا ٦٥°}}$ = ١,٣ سم.

٣٧ (ب)

الحل :

نفرض أن : أ = ٣ سم ، ب = ٥ سم ، جـ = ٧ سم

في Δ أ ب جـ

∴ جـ أكبر الأضلاع طولًا

∴ ∠ جـ أكبر الزوايا قياسًا

جتا جـ = $\frac{\text{أ}^٢ + \text{ب}^٢ - \text{جـ}^٢}{\text{٢ أ ب}} = \frac{٩ + ٢٥ - ٤٩}{(٣)(٥)٢} = -\frac{١}{٢}$

ق (∠ جـ) = ١٢٠°

٣٨ (ب)

الحل :

∵ أ ب جـ ء شكل رباعي دائري

∴ ق (∠ أ) + ق (∠ جـ) = ١٨٠°

∴ جتا أ + جتا جـ = جتا أ + جتا (١٨٠° − أ)

= جتا أ − جتا أ = صفر

٣٩ (ب)

الحل :

ق (∠ أ) = ١٨٠° − (٨٢° + ٥٦°) = ٤٢°

، ∵ $\frac{\text{أ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ب}}{\text{جا ب}}$ ∴ $\frac{٢٧}{\text{جا ٤٢°}} = \frac{\text{ب}}{\text{جا ٨٢°}}$

∴ ب = $\frac{\text{٢٧ × جا ٨٢°}}{\text{جا ٤٢°}}$

∴ مساحة سطح Δ أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ أ ب جا جـ

= $\frac{١}{٢}$ × ٢٧ × $\frac{\text{٢٧ × جا ٨٢°}}{\text{جا ٤٢°}}$

× جا ٥٦° = ٤٤٧ سم^٢

٤٠ (د)

الحل :

∵ أ + جـ = ١١ (١)

، أ − جـ = ١ (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢) :

∴ أ = ٦ سم ، جـ = ٥ سم

، ∵ جتا أ = $\frac{\text{ب}^٢ + \text{جـ}^٢ - \text{أ}^٢}{\text{٢ ب جـ}} = \frac{١٦ + ٢٥ - ٣٦}{(٥)(٤)٢} = \frac{١}{٨}$

∴ ق (∠ أ) = ٤٩ َ ٨٢°

، جتا ب = $\frac{\text{أ}^٢ + \text{جـ}^٢ - \text{ب}^٢}{\text{٢ (أ) (جـ)}} = \frac{٣٦ + ٢٥ - ١٦}{(٥)(٦)٢} = \frac{٣}{٤}$

∴ ق (∠ ب) = ٣٥ ً ٢٤ َ ٤١°

∴ ق (∠ أ) = ٢ ق (∠ ب)

٢ محافظة الجيزة

١ (أ)

٢ (أ)

الحل :

∵ لو$_٣$ س = لو$_٤$ ٩ ∴ $\frac{\text{لو س}}{\text{لو ٣}} = \frac{\text{لو ٩}}{\text{لو ٤}}$

∴ لو س = $\frac{\text{٢ لو ٣ × لو ٢}}{\text{٢ لو ٢}}$

∴ لو س = لو ٣ ∴ س = ٣

٣ (جـ)

الحل :

$\frac{\text{د (س − ١)}}{\text{د (س + ١)}} = \frac{٥^{-(س-١)}}{٥^{-(س+١)}}$ = ٥$^{-س + ١ + س + ١}$

= ٥^٢ = ٢٥

٤ (د)

الحل :

د (س) = $\frac{\sqrt{\text{١ − جتا}^٢\text{ س}}}{\text{س}} = \frac{\sqrt{\text{جا}^٢\text{ س}}}{\text{س}} = \frac{\text{|جا س|}}{\text{س}}$

∴ د (٠$^+$) = نهـا (س ← ٠$^+$) $\frac{\text{جا س}}{\text{س}}$ = ١

∴ د (٠$^-$) = نهـا (س ← ٠$^-$) $\frac{\text{− جا س}}{\text{س}}$ = −١

∴ د (٠$^+$) ≠ د (٠$^-$)

∴ نهـا (س ← ٠) د (س) غير موجودة.

٥ (أ)

الحل :

∵ الدالة زوجية والنقطة (٢ ، ب) ∋ للدالة

∴ النقطة (−٢ ، ب) ∋ للدالة

∴ الدالة متصلة عند النقطة (−٢ ، ب) أيضًا.

٦ (جـ)

الحل :

جتا ب = $\frac{\text{أ}^٢ + \text{جـ}^٢ - \text{ب}^٢}{\text{٢ أ جـ}} = \frac{٢٥ + ٩ - ٤٩}{(٣)(٥)٢} = -\frac{١}{٢}$

∴ ق (∠ ب) = ١٢٠°

٧ (ب)

الحل :

د (س) = $\frac{\text{س + ١}}{\text{س}}$ = ١ + $\frac{١}{\text{س}}$ = $\frac{١}{\text{س}}$ + ١

∴ نقطة تماثل الدالة (٠ ، ١)

٨ (د)

الحل :

∵ لو$_{\sqrt{٢}}$ س + لو$_{\sqrt{٢}}$ (س + ١) = ٢

∴ لو$_{\sqrt{٢}}$ س (س + ١) = ٢

∴ س^٢ + س = $(\sqrt{٢})^٢$ = ٢

∴ س^٢ + س − ٢ = ٠

∴ (س + ٢) (س − ١) = ٠

∴ س = −٢ (مرفوضة) أ، س = ١

∴ م.ح = {١}

٩ (ب)

الحل :

لو$_{\text{س ص}}$ $\left(\frac{١}{\text{س}}\right)$ + لو$_{\text{س ص}}$ $\left(\frac{١}{\text{ص}}\right)$ = لو$_{\text{س ص}}$ $\left(\frac{١}{\text{س ص}}\right)$

= لو$_{\text{س ص}}$ (س ص)$^{-١}$ = − لو$_{\text{س ص}}$ س ص = −١

١٠ (ب)

الحل :

[illegible]

∴ $ق(د ح) = ١٢٠°$

(جـ)

الحل :

$د(٠^+) = \lim_{س \to ٠^+} \frac{٢ س + جا س}{ظا ٢ س + ٤ س}$

$= \lim_{س \to ٠^+} \frac{٢ + \frac{جا س}{س}}{\frac{ظا ٢ س}{س} + ٤} = \frac{٢ + ١}{٢ + ٤} = \frac{١}{٢}$

، $د(٠^-) = \lim_{س \to ٠^-} (٥ س + \frac{١}{٢}) = ٥ (٠) + \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢}$

∴ $د(٠^+) = د(٠^-) = \frac{١}{٢}$

∴ $\lim د(س) = \frac{١}{٢}$

١٢ (أ)

الحل :

$ص ج^٢ = س ج^٢ + ع ج^٢ - ٢ س ج ع ج جتا ص$

$= (٢٠)^٢ + (١٦)^٢ - ٢ × ٢٠ × ١٦ × ٠٫٤$

∴ $ص ج^٢ = ٤٠٠$

∴ ص ج = ٢٠ سم

١٣ (ب)

١٤ (ب)

الحل :

$ص = ٣^س$ بتبديل المتغيرات

∴ $س = ٣^ص$ ∴ $ص = لو_٣ س$

∴ $د^{-١}(س) = لو_٣ س$

١٥ (د)

الحل :

بوضع $س + ٢ \ge$ ٠ ∴ $س \ge -٢$

∴ مجال الدالة = $[-٢ ، \infty[$

١٦ (د)

الحل :

$\lim \frac{ظا س}{س} = \frac{ط}{\frac{ط}{٤}} = ... = \frac{٤}{ط}$

١٧ (جـ)

الحل :

$\lim \frac{٣\sqrt{٣}}{٩} = \frac{١}{٩} \lim ... = \frac{١}{٩} × ١ = \frac{١}{٩}$

١٨ (د)

الحل :

$\frac{محيط \Delta أ ب جـ}{جا أ + جا ب + جا جـ} = ٢ نق$

∴ $\frac{٢٠}{جا ٨٠° + جا ٦٠° + جا ٤٠°} = ٢ نق$

∴ ٢ نق = ٨ سم

∴ طول قطر الدائرة = ٨ سم

١٩ (د)

الحل :

∵ $لو_س ٣ = -٢$ ∴ $س^{-٢} = ٣$

∴ $س^٢ = \frac{١}{٣}$

∴ $س = \frac{١}{\sqrt{٣}}$ والحل السالب مرفوض.

٢٠ (ب)

الحل :

$(ن \circ د)(١) = ن(د(١)) = ن(١) = -٢$

٢١ (ب)

الحل :

عند ن = ٤ تكون $\lim \frac{س^ن - ٢^ن}{س - ٢} = ٤ × ٢^٣ = ٣٢$

٢٢ (أ)

الحل :

$\lim \frac{١ - جتا س}{س} = \frac{١}{٢} \lim ... = \frac{١}{٢} × ٠ = ٠$

٢٣ (أ)

٢٤ (ب)

الحل :

$د(-س) = \frac{(-س) ظا (-س)}{|-س|} = \frac{س ظا س}{|س|} = د(س)$

٢٥ (ب)

الحل :

$د(س) = \sqrt[٣]{س^٣} + |س| = س + |س|$

$= ٢|س|$

∴ $٢|س| = ٢$ ∴ $|س| = ١$

∴ س = ±١ ∴ م.ح = {١ ، -١}

٢٦ (د)

الحل :

∵ $|س| < ٢$ ∴ $-٢ < س < ٢$

∴ $س \in]-٢ ، ٢[$

٢٧ (جـ)

الحل :

$\lim \frac{س^٢ - ... }{...}$

$= \lim \frac{...}{...} = ...$

(جـ)

الحل :

[illegible]

(ب)

الحل :

[illegible]

(جـ)

الحل :

[illegible]

٣٤ (ب)

الحل :

$\frac{|\text{س}|}{\text{س}} = \begin{cases} \frac{\text{س}}{\text{س}} & ، \text{س} > 0 \\ \frac{-\text{س}}{\text{س}} & ، \text{س} < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & ، \text{س} > 0 \\ -1 & ، \text{س} < 0 \end{cases}$

$\therefore \frac{|\text{س}|}{\text{س}} = 1$ لكل $\text{س} \in]0 ، \infty[$

$\therefore$ م.ح $=]0 ، \infty[= \text{ح}^+$

٣٥ (ب)

الحل :

$\frac{\text{حـ}}{\text{جا حـ}} = 2\,\text{نق}$

$\therefore \frac{5\,\text{حـ}}{\text{جا حـ}} = 5 \times 2\,\text{نق} = 10\,\text{نق}$

٣٦ (د)

الحل :

$\frac{\text{جا س}}{3} = \frac{\text{جا ص}}{\frac{5}{2}} = \frac{\text{جا ع}}{4}$

$\therefore$ س : ص : ع $= 3 : \frac{5}{2} : 4 = 6 : 5 : 8$

٣٧ (ب)

٣٨ (أ)

الحل :

$\lim_{\text{س} \to \frac{1}{2}} \frac{8\text{س}^3 - 1}{32\text{س}^5 - 1} = \lim_{\text{س} \to \frac{1}{2}} \frac{8(\text{س}^3 - \frac{1}{8})}{32(\text{س}^5 - \frac{1}{32})}$

$= \frac{1}{4} \lim_{\text{س} \to \frac{1}{2}} \frac{\text{س}^3 - (\frac{1}{2})^3}{\text{س}^5 - (\frac{1}{2})^5}$

$= \frac{1}{4} \times \frac{3}{5} \times (\frac{1}{2})^{-2} = \frac{3}{5}$

٣٩ (د)

الحل :

أ ب حـ مثلث

$\therefore$ أ + ب + حـ $= 180°$

$\therefore$ أ + ب $= 180° -$ حـ

$\therefore$ جتا (أ + ب) = جتا (١٨٠° − حـ) = − جتا حـ

٤٠ (جـ)

الحل :

$\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\text{أ}\text{س}^2 - 5\text{س}}{2\text{س} + 3\text{س}^2} = \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\text{أ} - \frac{5}{\text{س}}}{\frac{2}{\text{س}} + 3}$

$= \frac{\text{أ} - 0}{0 + 3} = \frac{\text{أ}}{3}$

$\therefore \frac{\text{أ}}{3} = 3 \qquad \therefore \text{أ} = 9$

٣ محافظة الإسكندرية

١ (جـ)

الحل :

$\because |\text{س} - 2| = 5$

$\therefore \text{س} - 2 = 5 \qquad \therefore \text{س} = 7$

أو $\text{س} - 2 = -5 \qquad \therefore \text{س} = -3$

$\therefore$ م.ح $= \{7 ، -3\}$

٢ (ب)

الحل :

$\lim_{\text{س} \to 1} \frac{\text{س}^2 - 1}{\text{س} - 1} = \lim_{\text{س} \to 1} \frac{(\text{س} - 1)(\text{س} + 1)}{(\text{س} - 1)} = 2$

٣ (جـ)

الحل :

$\frac{8\sqrt{3}}{\text{جا } 60°} = 2\,\text{نق} \qquad \therefore$ طول القطر = ١٦ سم

٤ (أ)

٥ (د)

الحل :

$\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{2\text{س}^2 + 1}{\text{س}^2 + 1} = \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{2 + \frac{1}{\text{س}^2}}{1 + \frac{1}{\text{س}^2}} = 2$

٦ (د)

الحل :

$\because$ أ ب حـ مثلث

$\therefore$ جا (ب + حـ) = جا (١٨٠° − أ) = جا أ

، $\because \frac{\text{أ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ب}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{حـ}}{\text{جا حـ}}$

$\therefore \frac{\text{أ} + \text{ب}}{\text{جا أ} + \text{جا ب}} = \frac{\text{أ}}{\text{جا أ}}$

$\therefore \frac{\text{أ} + \text{ب}}{\text{جا أ} + \text{جا ب}} = \frac{\text{أ}}{\text{جا (ب + حـ)}}$

$\therefore \frac{\text{جا (ب + حـ)}}{\text{جا أ} + \text{جا ب}} = \frac{\text{أ}}{\text{أ} + \text{ب}}$

٧ (أ)

الحل :

$\because \text{لو}_3 (2\text{س} + 3) = 2 \quad \therefore 2\text{س} + 3 = 3^2$

$\therefore 2\text{س} + 3 = 9 \qquad \therefore \text{س} = 3$

٨ (أ)

الحل :

$\lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{جا } 3\text{س}}{\text{طا } \frac{1}{3}\text{س}} = \lim_{\text{س} \to 0} \frac{\frac{\text{جا } 3\text{س}}{\text{س}}}{\frac{\text{طا } \frac{1}{3}\text{س}}{\text{س}}} = \frac{3}{\frac{1}{3}} = 9$

٩ (أ)

الحل :

$(\text{ب حـ})^2 = (\text{أ ب})^2 + (\text{أ حـ})^2 - 2\,\text{أ ب} \times \text{أ حـ} \times \text{جتا أ}$

$= 100 + 36 - 2 \times 10 \times 6 \times \text{جتا } 120°$

$\therefore$ ب حـ = ١٤ سم

١٠ (ب)

١١ (أ)

الحل :

$\because (\text{د} \circ \text{ر})(\text{س}) = \text{د}(\text{ر}(\text{س})) = (\text{س} + 2)^2$

$\therefore (\text{هـ} \circ \text{س})$ دالة المحايدة.

١٢ (د)

الحل :

$\because$ د متصلة عند س = ٣

$\therefore \text{د}(3) = \lim_{\text{س} \to 3} \text{د}(\text{س})$

$\therefore 2\text{أ} = \lim_{\text{س} \to 3} \frac{\text{س}^2 - 9}{\text{س} - 3}$

$= \lim_{\text{س} \to 3} \frac{(\text{س} - 3)(\text{س} + 3)}{(\text{س} - 3)} = 6$

$\therefore \text{أ} = 3$

١٣ (أ)

الحل :

بفرض أن قياس أكبر زاوية = θ وهى تقابل أكبر الأضلاع طولًا = ٧ سم

$\therefore \text{جتا } \theta = \frac{3^2 + 5^2 - 7^2}{2(3)(5)} = \frac{-1}{2}$

$\therefore \theta = 120°$

١٤ (ب)

١٥ (ب)

الحل :

$\lim_{\text{س} \to 2} \frac{\text{س}^2 + \text{س} - 6}{\text{س}^2 - 4}$

$= \lim_{\text{س} \to 2} \frac{(\text{س} + 3)(\text{س} - 2)}{(\text{س} - 2)(\text{س} + 2)} = \frac{5}{4}$

١٦ (أ)

الحل :

$\text{ن} = \sqrt{5^2 + 7^2 - 2 \times 5 \times 7 \times \text{جتا } 60°} = 6.2$ سم

١٧ (د)

الحل :

$\because \text{س}^{\frac{2}{5}} = 4$

$\therefore \text{س} = \pm 4^{\frac{5}{2}} = \pm (\sqrt{4})^5 = \pm 32$

١٨ (د)

٢٣ (جـ)

الحل :

عندما $\text{س} \geq \frac{1}{2}$ $\therefore 2\text{س} - 1 = \text{س} + 2$

٢٤ (ب)

الحل :

لو ١٥ = لو ٥ + لو ٣ = س + ص

٢٥ (ب)

الحل :

∴ (د ∘ ر) دالة أحادية

١٨ (د)

∴ جا (أ + ب) = جا حـ

∵ أ / جا أ = ب / جا ب = حـ / جا حـ = ٢ نق = ١٠

∴ أ = ١٠ جا أ ، ب = ١٠ جا ب

∵ مساحة Δ أ ب حـ = ٢٤

∴ ½ أ ب جا حـ = ٢٤

∴ ½ × ١٠ جا أ × ١٠ جا ب × جا حـ = ٢٤

∴ جا أ جا ب جا (أ + ب) = ١٢ / ٢٥

٢٠ (ب)

الحل :

∵ جتا حـ = (أ² + ب² − حـ²) / ٢ أ ب

∴ ب / ٢ أ = (أ² + ب² − حـ²) / ٢ أ ب ∴ ب² = أ² + ب² − حـ²

∴ أ² = حـ² ∴ أ = حـ

٢١ (ب)

الحل :

نهــا (س ← ٠) (٢ س + جا ٣ س) / (٥ س + ظا ٢ س) = نهــا (س ← ٠) (٢ + جا ٣ س / س) / (٥ + ظا ٢ س / س)

= (٢ + ٣) / (٥ + ٢) = ٥ / ٧

٢٢ (جـ)

الحل :

بوضع س = ٢ ، ∵ د دالة فردية

∴ د (−٢) = − د (٢)

∴ ٢ د (٢) + ٨ د (−٢) = ٢

∴ ٢ د (٢) − ٨ د (٢) = ٢

∴ −٦ د (٢) = ٢ ∴ د (٢) = −⅓

الحل :

عندما س ≥ ½ ∴ ٢ س − ١ = س + ١

∴ س = ٢ ∈ [½ ، ∞[

عندما س < ½ ∴ ٢ س − ١ = − س − ٢

∴ س = −⅓ ∈]−∞ ، ½[

∴ م.ح = {٢ ، −⅓}

٢٤ (أ)

٢٥ (د)

الحل :

نهــا (س ← ٢) ((س + ١)⁴ − ٨١) / (س − ٢)

= نهــا ((س + ١) ← ٣) ((س + ١)⁴ − ٣⁴) / ((س + ١) − ٣) = ٤ × ٣³ = ١٠٨

٢٦ (أ)

الحل :

نهــا (س ← ∞) (أ + ٧/س) / (٥ − ٧/س) = ١ ∴ (أ + ٠) / (٥ − ٠) = ١ ∴ أ = ٥

٢٧ (أ)

الحل :

نهــا (س ← ١) جا (س − ١) / (س² − ١)

= نهــا ((س − ١) ← ٠) جا (س − ١) / (س − ١) × نهــا (س ← ١) ١ / (س + ١)

= ١ × ½ = ½

٢٨ (ب)

الحل :

نهــا (س ← π/٢) ٣ جتا س / (π − ٢ س)

= نهــا ((π/٢ − س) ← ٠) ٣ جا (π/٢ − س) / ٢ (π/٢ − س) = ٣/٢

الحل :

لو ١٥ = لو ٥ + لو ٣ = س + ص

٣٠ (جـ)

الحل :

٢^(٢س) − ٣ × ٢^(س+١) + ٢³ = ٠

∴ (٢^س)² − ٦ × ٢^س + ٨ = ٠

∴ (٢^س − ٤) (٢^س − ٢) = ٠

∴ ٢^س = ٤ ∴ س = ٢

، ٢^س = ٢ ∴ س = ١

∴ م.ح = {١ ، ٢}

٣١ (ب)

الحل :

∵ ٢ لو ٢ − لو س = لو (س + ٣) − لو ٧

∴ لو ٤ − لو س = لو (س + ٣) − لو ٧

∴ لو ٤/س = لو (س + ٣)/٧ ∴ ٤/س = (س + ٣)/٧

∴ س² + ٣ س − ٢٨ = ٠

∴ (س + ٧) (س − ٤) = ٠

∴ س = −٧ (مرفوض)

أ، س = ٤ ∴ م.ح = {٤}

٣٢ (د)

الحل :

∵ لو_ص س = لو_س ص = ١ / لو_س س

∴ (لو_ص س)² = ١ ∴ لو_ص س = ١

أ، لو_ص س = −١

∴ س = ص

∴ س = ١/ص

٣٣ (ب)

٣٤ (ب)

الحل :

أ جا ب جا حـ / (هـ جا أ) = ½ أ ب جا حـ

∴ أ جا ب = ½ ب جا أ × هـ

∴ هـ = ٢ × (جا ب / ب) × (أ / جا أ) = ٢ × ١ = ٢

٣٦ (ب)

الحل :

ص = (س + ١) / (س − ٢) بتبديل المتغيرات

∴ س = (ص + ١) / (ص − ٢)

∴ س ص − ٢ س = ص + ١

∴ ص (س − ١) = ٢ س + ١

∴ ص = (٢ س + ١) / (س − ١) ∴ د⁻¹ (س) = (٢ س + ١) / (س − ١)

∴ د⁻¹ (٤) = (٢ (٤) + ١) / (٤ − ١) = ٣

٣٧ (جـ)

الحل :

بفرض أن : س + ٢ = أ

∴ س = أ − ٢ ∴ د (أ) = هـ^(أ−٢)

∴ د (س) = هـ^(س−٢)

٣٨ (ب)

٣٩ (أ)

الحل :

(∛س − ٢) (∛س − ١) = ٠

∴ ∛س = ٢ ∴ س = ٨

، ∛س = ١ ∴ س = ١

∴ م.ح = {٨ ، ١}

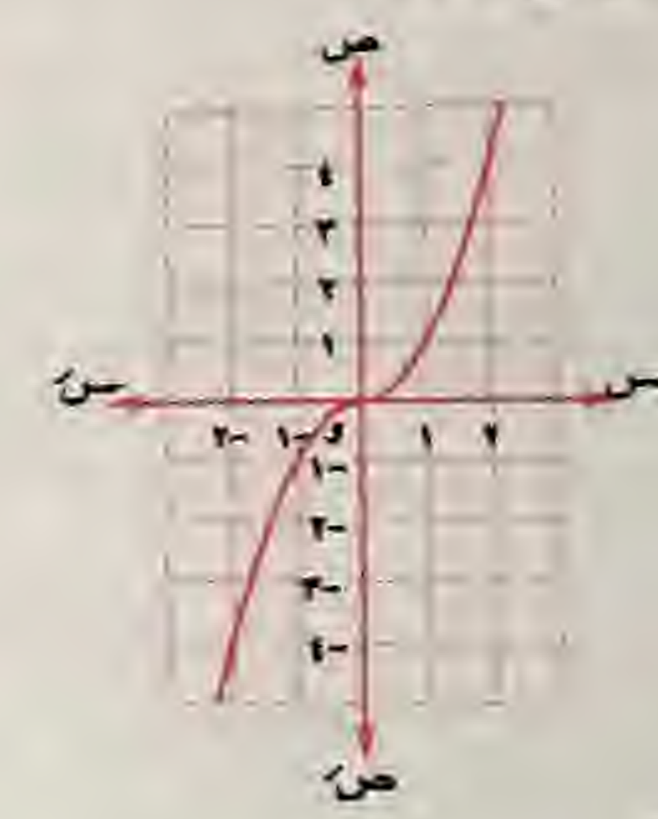
٤٠ (جـ)

الحل :

$$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}\,(\text{س}) & ، \quad \text{س} \geq ٠ \\ \text{س}\,(-\text{س}) & ، \quad \text{س} < ٠ \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \text{س}^{٢} & ، \quad \text{س} \geq ٠ \\ -\text{س}^{٢} & ، \quad \text{س} < ٠ \end{cases}$$

ومن التمثيل البيانى للدالة



مدى الدالة = ح

٤ محافظة القليوبية

١ (د)

الحل :

$$(٢٥)^{\text{س}} = (٥^{\text{س}})^{٢} = (٢)^{٢} = ٤$$

٢ (أ)

الحل :

∵ النقطة $\left(\frac{١}{٤} ، -\frac{١}{٢}\right)$ تنتمى للمنحنى

ص = لو$_{ع}$ (١ - ٢ س)

∴ $-\frac{١}{٢}$ = لو$_{ع}$ (١ - $\frac{١}{٤}$ ٢)

∴ ١ - $\frac{١}{٤}$ ٢ = ع$^{-\frac{١}{٢}}$ ∴ ١ - $\frac{١}{٤}$ ٢ = $\frac{١}{٢}$

∴ $\frac{١}{٤}$ ٢ = $\frac{١}{٢}$ ∴ ٢ = ٢

٣ (جـ)

الحل :

$$\text{نهـا}_{\text{س} \to \infty} \frac{\text{س}^{٢} + ٥}{٢\,\text{س}^{٢} + ٣\,\text{س}} = \text{نهـا}_{\text{س} \to \infty} \frac{١ + \frac{٥}{\text{س}^{٢}}}{٢ + \frac{٣}{\text{س}}} = \frac{١ + ٠}{٢ + ٠} = \frac{١}{٢}$$

٤ (ب)

الحل :

∵ ٤ جا أ = ٣ جا ب = ٦ جا حـ بالقسمة على ١٢

∴ $\frac{\text{جا أ}}{٣} = \frac{\text{جا ب}}{٤} = \frac{\text{جا حـ}}{٢}$

∴ أ : ب : حـ = ٣ : ٤ : ٢

∴ أ = ٣ ك ، ب = ٤ ك ، حـ = ٢ ك

∴ جتا حـ = $\frac{\text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢} - \text{حـ}^{٢}}{٢\,\text{أ ب}}$

$= \frac{٩\,\text{ك}^{٢} + ١٦\,\text{ك}^{٢} - ٤\,\text{ك}^{٢}}{٢\,(٣\,\text{ك})\,(٤\,\text{ك})} = \frac{٧}{٨}$

∴ ق (∠ حـ) = ٢٩°

٥ (جـ)

الحل :

لو$_{\text{ب}}$ أ^{٢} × لو$_{\text{حـ}}$ ب^{٣} × لو$_{\text{أ}}$ حـ = $\frac{٢\,\text{لو أ}}{\text{لو ب}} \times \frac{٣\,\text{لو ب}}{\text{لو حـ}} \times \frac{\text{لو حـ}}{\text{لو أ}}$ = ٦

٦ (ب)

الحل :

∵ ص = $\sqrt[٣]{\text{س}}$ بتبديل المتغيرات

∴ س = $\sqrt[٣]{\text{ص}}$ ∴ س^{٣} = ص

∴ د$^{-١}$ (س) = س^{٣}

٧ (د)

الحل :

∵ د متصلة عند س = ١

∴ د (١) = $\text{نهـا}_{\text{س} \to ١}$ د (س)

∴ ٢ أ = $\text{نهـا}_{\text{س} \to ١} \frac{\text{س}^{٢} - ١}{\text{س} - ١}$

= $\text{نهـا}_{\text{س} \to ١} \frac{(\text{س} - ١)(\text{س} + ١)}{(\text{س} - ١)}$ = ٢

∴ أ = ١

٨ (ب)

الحل :

∵ أ ب حـ مثلث ∴ أ + ب + حـ = ١٨٠°

∴ أ + ب = ١٨٠° - حـ

∴ جتا (أ + ب) = جتا (١٨٠° - حـ) = - جتا حـ

$= -\frac{\text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢} - \text{حـ}^{٢}}{٢\,\text{أ ب}} = \frac{\text{حـ}^{٢} - \text{أ}^{٢} - \text{ب}^{٢}}{٢\,\text{أ ب}}$

٩ (أ)

الحل :

لو$_{٤}$ س + لو$_{٤}$ (س - ٣) = ١

∴ لو$_{٤}$ س (س - ٣) = لو$_{٤}$ ٤

∴ س^{٢} - ٣ س - ٤ = ٠

∴ (س - ٤) (س + ١) = ٠

∴ س = ٤ أ، س = -١ (مرفوض)

∴ م.ح = {٤}

١٠ (جـ)

١١ (ب)

الحل :

$$\text{نهـا}_{\text{س} \to ٢} \frac{\text{س}^{٥} - ٣٢}{(\text{س} - ٢)(\text{س} + ٥)} = \text{نهـا}_{\text{س} \to ٢} \frac{\text{س}^{٥} - ٢^{٥}}{\text{س} - ٢}$$

$$\times\ \text{نهـا}_{\text{س} \to ٢} \frac{١}{\text{س} + ٥} = ٥ \times ٢^{٤} \times \frac{١}{٢ + ٥} = \frac{٨٠}{٧}$$

١٢ (أ)

الحل :

حـ^{٢} = أ^{٢} + ب^{٢} - ٢ أ ب جتا حـ

= ٨١ + ٢٢٥ - ٢ × ٩ × ١٥ × جتا ١٠٦°

∴ حـ = ٢٠ سم

∴ محيط △ أ ب حـ = ٩ + ١٥ + ٢٠ = ٤٤ سم

١٣ (جـ)

الحل :

∵ |٢ س - ١٢| ≥ ٧ ∴ ٢ س - ٢ ≥ ٧

∴ ٢ س ≥ ٩ ∴ س ≥ ٢

، ٢ س - ١ ≥ -٧ ∴ ٢ س ≥ -٥

∴ س ≥ $\frac{٥}{٢}$

∴ م.ح = ح -] $\frac{٥}{٢}$ ، ٢ [

١٤ (د)

الحل :

∵ د دالة فردية ∴ د (-س) = - د (س)

∴ د (-س) + د (س) = - د (س) + د (س) = صفر

١٥ (جـ)

الحل :

$$\text{نهـا}_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{طا}\,٢\,\text{س} + ٥\,\text{طا}\,٣\,\text{س}}{\text{س}}$$

$$= \text{نهـا}_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{طا}\,٢\,\text{س}}{\text{س}} + ٥\ \text{نهـا}_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{طا}\,٣\,\text{س}}{\text{س}}$$

= ٢ + ٥ × ٣ = ١٧

١٦ (أ)

الحل :

$\frac{\text{جا أ}}{٣} = \frac{\text{جا ب}}{\frac{٥}{٢}} = \frac{\text{جا حـ}}{٤}$

∴ أ : ب : حـ = ٣ : $\frac{٥}{٢}$: ٤ (بالضرب × ٢)

= ٦ : ٥ : ٨

١٧ (ب)

الحل :

$$|\text{س}| + \text{س} = \begin{cases} \text{س} + \text{س} & ، \quad \text{س} \geq ٠ \\ -\text{س} + \text{س} & ، \quad \text{س} < ٠ \end{cases}$$

$$= \begin{cases} ٢\,\text{س} & ، \quad \text{س} \geq ٠ \\ ٠ & ، \quad \text{س} < ٠ \end{cases}$$

∴ |س| + س = ٠ لكل س < ٠

أى لكل س ∈] -∞ ، ٠ [

، عندما ٢ س = ٠ ∴ س = ٠

∴ مجموعة الحل =] -∞ ، ٠ [∪ {٠} =] -∞ ، ٠]

١٨ (جـ)

∴ ٢|س - ٢| ≤ ٧ ∴ ٢س - ٢ ≤ ٧

∴ ٢س ≤ ٩ ∴ س ≤ ٢

∴ مجموعة الحل =]-∞ ، ٠[∪ {١} ∪ {٠} ∪]-∞ ، ٠]

$= \dfrac{(\text{س}+1)}{1} = 2$

∴ ٢ = ١

$= \underset{\text{س} \to 1}{\text{نهــا}} \dfrac{16 - (\text{س} + 15)}{(1-\text{س})(1+\text{س})(4 + \sqrt{\text{س} + 15})}$

$= \underset{\text{س} \to 1}{\text{نهــا}} \dfrac{1 - \text{س}}{(1-\text{س})(1+\text{س})(4 + \sqrt{\text{س} + 15})}$

$= \dfrac{1}{2 \times 8} = \dfrac{1}{16}$

٢٠ (د)

الحل :

بفرض أن : ق(∠أ) = ٣ ك ، ق(∠ب) = ٥ ك

، ق(∠حـ) = ٤ ك

∴ ٣ ك + ٥ ك + ٤ ك = ١٨٠°

∴ ك = ١٥°

∴ ق(∠أ) = ٣ (١٥°) = ٤٥°

، ق(∠حـ) = ٤ (١٥°) = ٦٠°

$\because \dfrac{أ}{\text{جا أ}} = \dfrac{حـ}{\text{جا حـ}}$ ∴ $\dfrac{حـ}{أ} = \dfrac{\text{جا } 60°}{\text{جا } 45°}$

$\therefore \dfrac{حـ^2}{أ^2} = \dfrac{\text{جا}^2\, 60°}{\text{جا}^2\, 45°} = \dfrac{3}{2}$

٢١ (جـ)

الحل :

٣^{٢س} - ١٢ × ٣^{س} + ٢٧ = ٠

∴ (٣^{س} - ٣) (٣^{س} - ٩) = ٠

∴ ٣^{س} = ٣ ∴ س = لو٣ ٣

، ٣^{س} = ٩ ∴ س = لو٣ ٩

∴ مجموع الجذرين = لو٣ ٣ + لو٣ ٩ = لو٣ ٢٧

٢٢ (جـ)

الحل :

∵ د تربط كل عدد حقيقي بنفسه

وبمقارنة المعاملات الطرفين

∴ ٢ + ١ = ١ ومنها أ = ٠

، ب - ٢ = ٠ ومنها ب = ٢

∴ (أ ، ب) = (٠ ، ٢)

٢٣ (د)

الحل :

$\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهــا}} \dfrac{5 + \frac{6}{\text{س}^2}}{1 + \frac{4}{\text{س}^2}} = \dfrac{5 + 0}{1 + 0} = 5$

٢٤ (جـ)

الحل :

$\dfrac{5\sqrt{3}}{\text{جا } 60°} = 2$ نق ∴ ٢ نق = ١٠ سم

∴ طول قطر الدائرة المارة برؤوسه = ١٠ سم

٢٥ (ب)

الحل :

بوضع س + ٢ ≥ ٠ ∴ س ≥ -٢

∴ مجال د = [-٢ ، ∞[

٢٦ (جـ)

الحل :

من التمثيل البياني للدالتين

المساحة = ١/٢ × ٤ × ٢ = ٤ وحدة مربعة

، ق(∠د) = ٥٠°

، ق(∠ب د حـ) = ١٨٠° - (٧٠° + ٥٠°) = ٦٠°

∆ ب حـ د فيه : $\dfrac{8}{\text{جا } 50°} = \dfrac{\text{ب حـ}}{\text{جا } 60°} = \dfrac{\text{د حـ}}{\text{جا } 70°}$

∴ ب حـ = $\dfrac{8 \times \text{جا } 60°}{\text{جا } 50°}$ = ٩ سم

، د حـ = $\dfrac{8 \times \text{جا } 70°}{\text{جا } 50°}$ = ١٠ سم

∴ محيط ▱ أ ب حـ د = ٢ × (٩ + ١٠) = ٣٨ سم

٢٨ (د)

الحل :

(د ∘ ر) (٢) = د (ر (٢)) = د (٣^٢) = د (٩)

= ٤ (٩) - ٥ = ٣١

٢٩ (د)

الحل :

س + ١ = ٠ ∴ س = -١

∴ ٣^{-١+١} = ٣^٠ = ١

٣٠ (أ)

الحل :

$\underset{\text{س} \to 2}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{س}^3 - 7\text{س} + 6}{2\text{س}^3 - 8\text{س} + 4}$

$= \underset{\text{س} \to 2}{\text{نهــا}} \dfrac{(\text{س} - 2)(\text{س}^2 + 2\text{س} - 3)}{(\text{س} - 2)(2\text{س} - 2)}$

$= \dfrac{4 + 4 - 3}{4 - 2} = \dfrac{5}{2}$

٣١ (ب)

٣٢ (ب)

الحل :

∵ $\sqrt{4\text{س}^2 - 12\text{س} + 9} \ge 9$

∴ $\sqrt{(2\text{س} - 3)^2} \ge 9$ ∴ |٢س - ٣| ≥ ٩

∴ -٩ ≥ ٢س - ٣ ≥ ٩ ∴ -٦ ≥ ٢س ≥ ١٢

∴ -٣ ≥ س ≥ ٦ ∴ م.ح = [-٣ ، ٦]

٣٣ (أ)

الحل :

$\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهــا}} \dfrac{1}{\text{س}} \sqrt{4\text{س}^2 + 2} = \underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهــا}} \sqrt{4 + \frac{2}{\text{س}^2}}$

$= \sqrt{4} = 2$

٣٤ (ب)

الحل :

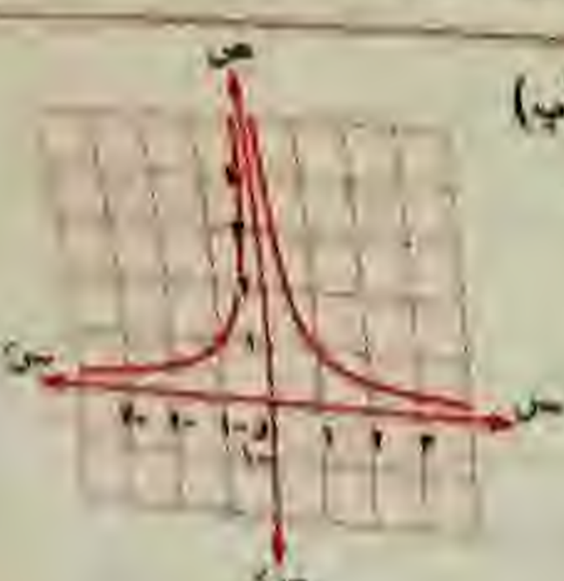
$\underset{\text{س} \to 1}{\text{نهــا}} \dfrac{(\text{س} + 2)^5 - 1}{\text{س}^2 - 1} = \underset{}{\text{نهــا}} \dfrac{(\text{س} + 2)^5 - 1}{\text{س} + 2}$

$\times \underset{}{\text{نهــا}} \dfrac{1}{\text{س} - 1} = \underset{}{\text{نهــا}} \dfrac{(\text{س} + 2)^5 - 1}{(\text{س} + 2) - 1}$

$\times \underset{}{\text{نهــا}} \dfrac{1}{\text{س} - 1} = 5 \times 1 \times \dfrac{1}{-2-2} = -\dfrac{5}{4}$

٣٥ (ب)

الحل :



من التمثيل البياني الدالة د :

$د(\text{س}) = \dfrac{1}{|\text{س}|} = \begin{cases} \dfrac{1}{\text{س}} & ، \text{س} > 0 \\ \dfrac{1}{-\text{س}} & ، \text{س} < 0 \end{cases}$

∴ مدى الدالة =]٠ ، ∞[

٣٧ (ب)

الحل :

∵ لو$_{٣}$ س + لو$_{٩}$ س = ٣

∴ $\frac{\text{لو س}}{\text{لو ٣}} + \frac{\text{لو س}}{\text{٢ لو ٣}} = ٣$

∴ $\frac{\text{لو س}}{\text{لو ٣}} \left(١ + \frac{١}{٢}\right) = ٣$ ∴ $\frac{\text{لو س}}{\text{لو ٣}} \times \frac{٣}{٢} = ٣$

∴ لو س = ٢ لو ٣ ∴ لو س = لو ٩

∴ س = ٩ ∴ م.ح = {٩}

٣٨ (ب)

الحل :

$\lim\limits_{\text{س} \to \text{صفر}} \frac{١ - \text{جتا س} + \text{جا ٢ س}}{١ - \text{جتا س} - \text{جا س}}$

(بقسمة البسط والمقام على س)

$= \lim\limits_{\text{س} \to \text{صفر}} \frac{\frac{١ - \text{جتا س}}{\text{س}} + \frac{\text{جا ٢ س}}{\text{س}}}{\frac{١ - \text{جتا س}}{\text{س}} - \frac{\text{جا س}}{\text{س}}} = \frac{\text{صفر} + ٢}{\text{صفر} - ١} = -٢$

٣٩ (ب)

الحل :

$\lim\limits_{\text{هـ} \to \text{صفر}} \frac{(٢ - ٣\text{هـ})^٧ - ١٢٨}{٤\text{هـ}}$

$= \frac{-٣}{٤} \lim\limits_{-٣\text{هـ} \to \text{صفر}} \frac{(-٣\text{هـ} + ٢)^٧ - ٢^٧}{-٣\text{هـ}}$

$= \frac{-٣}{٤} \times ٧ \times ٢^٦ = -٣٣٦$

٤٠ (أ)

الحل :

$\lim\limits_{\text{س} \to \text{صفر}} ٥ \text{ س قتا ٢ س} = \lim\limits_{\text{س} \to \text{صفر}} \frac{٥ \text{ س}}{\text{جا ٢ س}} = \frac{٥}{٢}$

٥ محافظة الشرقية

١ (ب)

الحل :

[illegible]

٢ (ب)

الحل :

∵ لو$_{٣}$ (٩$^{\text{س} - ١}$) = ٥ - س

∴ (س - ١) لو$_{٣}$ ٩ = ٥ - س

∴ ٢س - ٢ = ٥ - س

∴ ٣ س = ٧ ∴ س = $\frac{٧}{٣}$ ، ٤

٣ (ب)

الحل :

د (- س) = (- س) جتا (- س)

= - س جتا س = - د (س)

∴ د دالة فردية

٤ (ب)

الحل :

∵ $\sqrt{\text{س}^٢ - ٢\text{س} + ١} \geq ٤$

∴ $\sqrt{(\text{س} - ١)^٢} \geq ٤$ ∴ |س - ١| ≥ ٤

∴ س - ١ ≥ ٤ ∴ س ≥ ٥

، س - ١ ≤ -٤ ∴ س ≤ -٣

∴ م.ح = ح -]-٣ ، ٥[

٥ (ب)

الحل :

∵ ٣ جا أ = ٤ جا ب = ٦ جا حـ (بالقسمة على ١٢)

∴ $\frac{\text{جا أ}}{٤} = \frac{\text{جا ب}}{٣} = \frac{\text{جا حـ}}{٢}$

∴ أ : ب : حـ = ٤ : ٣ : ٢

٦ (حـ)

الحل :

[illegible]

٧ (ب)

الحل :

[illegible]

٨ (ب)

الحل :

[illegible]

٩ (د)

الحل :

[illegible]

١٠ (أ)

الحل :

[illegible]

١١ (ب)

١٢ (د)

١٣ (أ)

١٤ (ب)

الحل :

[illegible]

٦ محافظة ...

[illegible]

بقسمة البسط والمقام على س

$\lim \dfrac{\text{س}^3-(-2)^3}{\text{س}^4-(-2)^4} = \dfrac{3}{4}\times(-2)^{-1}$ ... $= -14$

٢٠ (جـ)

٢١ (أ)

الحل :

$\dfrac{4}{\text{جا }30^\circ} = 2\text{ نق}$ $\therefore 2\text{ نق} = 8$ سم

∴ طول قطر الدائرة المارة برؤوس Δ أ ب حـ = ٨ سم

٢٣ (أ)

الحل :

$\text{س} = 3^2 = 9$

٢٤ (ب)

٢٥ (ب)

٢٦ (جـ)

الحل :

$\lim\limits_{\text{س}\to\infty} \dfrac{\text{س}^3+3}{2\text{س}^3+3\text{س}} = \lim\limits_{\text{س}\to\infty} \dfrac{1+\frac{3}{\text{س}^3}}{2+\frac{3}{\text{س}^2}} = \dfrac{1}{2}$

٢٧ (ب)

٢٨ (جـ)

الحل :

∵ د متصلة عند س = ١ ∴ د (1^+) = د (1^-)

∴ ١ − ٢ = ك − ٣ ∴ ك = ٢

٢٩ (أ)

الحل :

$\lim \dfrac{12(1-\text{جتا س})}{\text{س}} = 12 \times 0 = 0$

الحل :

$3^{\text{س}} ... = 3^{-2}$

∴ س = −٨ ∴ س + ٥ = −٣

٣١ (ب)

الحل :

$\text{ع}^2 = \sqrt{\text{س}^2+\text{ص}^2-2\text{س ص جتا ع}}$

$= \sqrt{16+25-2(4)(5)\text{ جتا }60^\circ} = \sqrt{21}$ سم

٣٢ (جـ)

الحل :

$\lim\limits_{\text{س}\to 2} \dfrac{(\text{س}-2)(\text{س}+3)}{(\text{س}+4)(\text{س}-2)} = \dfrac{2+3}{2+4} = \dfrac{6}{7}$

٣٣ (د)

الحل :

$\lim\limits_{\text{س}\to\infty} \left(\dfrac{3}{\text{س}^2}-2\right) = \text{صفر} - 2 = -2$

٣٤ (ب)

الحل :

$\lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{\text{جا }3\text{س}}{\text{س}(5\text{س}-4)} = \lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{\text{جا }3\text{س}}{\text{س}} \times \lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{1}{5\text{س}-4}$

$= 3 \times \dfrac{1}{-4} = \dfrac{-3}{4}$

٣٥ (أ)

الحل :

∵ |س + ٢| ≤ ٢ ∴ −٢ ≤ س + ٢ ≤ ٢

∴ −٤ ≤ س ≤ ٠ ∴ م.ح = [−٤ ، ٠]

٣٦ (ب)

الحل :

$3 = \text{لو}_{\text{أ}} 8$ ∴ $\text{أ}^3 = 8$ ∴ أ = ٢

∴ د (س) = لو_2 س ∴ د (٤) = $\text{لو}_2 4 = 2$

(ب)

الحل :

$\text{لو} \dfrac{\text{س}+8}{\text{س}-1} = 1$ ∴ $\dfrac{\text{س}+8}{\text{س}-1} = 10$

∴ س + ٨ = ١٠ س − ١٠

∴ ٩ س = ١٨ ∴ س = ٢

∴ م.ح = {٢}

٣٨ (أ)

الحل :

$3^{\text{س}} + \dfrac{3^3}{3^{\text{س}}} = 12$ (بالضرب × $3^{\text{س}}$)

∴ $3^{2\text{س}} + 27 = 12 \times 3^{\text{س}}$

∴ $3^{2\text{س}} - 12 \times 3^{\text{س}} + 27 = 0$

∴ $(3^{\text{س}} - 9)(3^{\text{س}} - 3) = 0$

∴ $3^{\text{س}} = 9$ ∴ س = ٢

أ، $3^{\text{س}} = 3$ ∴ س = ١

∴ م.ح = {٢ ، ١}

٣٩ (جـ)

الحل :

س + ٧ = س − ٥ ومنها ٧ = −٥ (غير منطقى)

أ، س + ٧ = − س + ٥ ومنها ٢ س = −٢

∴ س = −١ ∴ م.ح = {−١}

٤٠ (أ)

الحل :

∵ ∠ حـ حادة

، حـ > أ

∴ يوجد حل واحد

٦

١ (د)

الحل :

$\lim\limits_{\text{ص}\to 2} \dfrac{\text{ص}^5 - 2^5}{\text{ص} - 2} = 5 \times 2^4$

٢ (د)

الحل :

(د ∘ ر) (٢) = د (ر (٢)) = د (3^2) = د (٩)

= ٤ (٩) − ٥ = ٣١

٣ (جـ)

الحل :

$\dfrac{\text{أ}+\text{ب}+\text{حـ}}{\text{جا أ}+\text{جا ب}+\text{جا حـ}} = 2\text{ نق} = 2 \times 4 = 8$ سم

٤ (ب)

الحل :

لو_2 د (س) = $\text{لو}_2 2^{\text{س}}$ = س $\text{لو}_2 2$ = س

٥ (جـ)

الحل :

لو س = لو ٢٧ − لو ب − لو ٣

∴ لو س = لو $\dfrac{27}{3 \times \text{ب}}$ ∴ س = $\dfrac{9}{\text{ب}}$

٦ (جـ)

الحل :

$\lim \dfrac{2\text{س} + 2\text{س}^{-1}}{\text{س} + 4\text{س}^{-1}} \times \dfrac{\text{س}}{\text{س}}$

$= \lim \dfrac{2\text{س}^2 + 2}{\text{س}^2 + 4} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

٧ (جـ)

الحل :

ص = س^{٣} + ٧ بتبديل المتغيرات

∴ س = ص^{٣} + ٧

∴ ص = $\sqrt[٣]{\text{س} - ٧}$

∴ د$^{-١}$ (س) = $\sqrt[٣]{\text{س} - ٧}$

∴ د$^{-١}$ (−١) = $\sqrt[٣]{-١ - ٧}$ = −٢

٨ (أ)

الحل :

٢ س − ٤ = س + ١ ومنها س = ٥

أ، ٢ س − ٤ = − س − ١ ومنها ٣ س = ٣

∴ س = ١ ∴ م.ح = {٥ ، ١}

٩ (جـ)

١٠ (أ)

الحل :

∵ د حـ منفرجة ، حـَ < أ

∴ عدد الحلول = ١

١١ (ب)

الحل :

نهـــا (١ + ٢ س^{٢} − س^{٣})

= نهـــا س^{٣} $\left(\frac{١}{\text{س}^{٣}} + \frac{٢}{\text{س}} - ١\right)$

= ∞ (٠ + ٠ − ١) = − ∞

١٢ (أ)

الحل :

ع = $\sqrt{٢٥ + ٩ - ٢ \times (٥)(٣) \text{ جتا } ١٢٠}$ = ٧ سم

١٣ (أ)

الحل :

$\frac{\text{لو } ٢٥}{\text{لو } ٥} = \frac{\text{لو } ٥^{٢}}{\text{لو } ٥} = \frac{٢ \text{ لو } ٥}{\text{لو } ٥} = ٢$

١٤ (أ)

١٥ (د)

١٦ (ب)

الحل :

لو (جا θ) + لو (قا θ) = لو (جا θ × قا θ) = لو ١

= صفر

١٧ (ب)

١٨ (جـ)

الحل :

| ٣ س − ٢ | ≥ ٧ ∴ ٣ س − ٢ ≥ ٧

∴ ٣ س ≥ ٩ ∴ س ≥ ٣

، ٣ س − ٢ ≤ −٧ ∴ ٣ س ≤ −٥

∴ س ≤ $\frac{-٥}{٣}$ ∴ م.ح = ح −]$\frac{-٥}{٣}$ ، ٣[

١٩ (جـ)

الحل :

$\frac{-١}{٢}$ = لو$_{٤}$ (١ − $\frac{١}{٨}$ أ) ∴ ١ − $\frac{١}{٨}$ أ = ٤$^{-\frac{١}{٢}}$

∴ ١ − $\frac{١}{٨}$ أ = $\frac{١}{٢}$ ∴ $\frac{١}{٨}$ أ = $\frac{١}{٢}$

∴ أ = ٤

٢٠ (أ)

الحل :

٣$^{\text{س} + ١}$ − ٣$^{\text{س} - ١}$ = ٢٤

∴ ٣$^{\text{س}}$ (٣ − $\frac{١}{٣}$) = ٢٤ ∴ ٣$^{\text{س}}$ × $\frac{٨}{٣}$ = ٢٤

∴ ٣$^{\text{س}}$ = ٢٤ × $\frac{٣}{٨}$ = ٩ ∴ س = ٢

٢١ (د)

٢٢ (د)

٢٣ (جـ)

٢٤ (جـ)

٢٥ (ب)

الحل :

= نهـــا (٥ + $\frac{١}{\text{س}}$ − $\frac{٢}{\text{س}^{٢}}$) = ٥

٢٦ (أ)

٢٧ (د)

الحل :

∵ حـ^{٢} = أ^{٢} + ب^{٢} − ٢ أ ب جتا حـ

∴ أ^{٢} + ب^{٢} − ٢ أ ب جتا حـ = أ^{٢} + ب^{٢} + أ ب

∴ − ٢ أ ب جتا حـ = أ ب

∴ جتا حـ = $\frac{-١}{٢}$

∴ ق (∠ حـ) = ١٢٠°

٢٨ (جـ)

الحل :

٢$^{\text{س}}$ = ٥ ∴ لو ٢$^{\text{س}}$ = لو ٥

∴ س لو ٢ = لو ٥

∴ س = $\frac{\text{لو } ٥}{\text{لو } ٢}$ = لو$_{٢}$ ٥

٢٩ (جـ)

الحل :

∵ | س − ١ | < ٥

∴ −٥ < س − ١ < ٥

∴ −٤ < س < ٦

∴ م.ح =]−٤ ، ٦[

٣٠ (جـ)

الحل :

∵ د (س − ١) = ٣ (س − ١) + ٢ [illegible]

∴ د (س) = ٣ س + [illegible]

٣١ (ب)

الحل :

نهـــا $\sqrt[٣]{\dfrac{٢ + \frac{٦}{\text{س}} + \frac{١}{\text{س}^{٢}}}{١ - \frac{٢}{\text{س}} + \frac{٣}{\text{س}^{٢}}}}$ = $\sqrt[٣]{\left(\frac{٢}{١}\right)}$ = [illegible]

٣٢ (ب)

الحل :

نهـــا $\frac{\text{جا} (\text{س} - ٢)}{(\text{س} - ٢)}$ × نهـــا $\frac{١}{\text{س} + ٢}$

= ١ × $\frac{١}{٢ + ٢}$ = $\frac{١}{٤}$

٣٣ (جـ)

٣٤ (ب)

الحل :

نهـــا $\frac{(\sqrt{\text{س}} - ٣)(\sqrt{\text{س}} + ٣)}{(\sqrt{\text{س}} - ٣)}$ = $\sqrt{٩}$ + ٣ = ٦

٣٥ (د)

الحل :

∵ جتا ب = $\frac{\text{حـ}}{٢ \text{ أ}}$ ∴ $\frac{\text{أ}^{٢} + \text{حـ}^{٢} - \text{ب}^{٢}}{٢ \text{ أ حـ}}$ = $\frac{\text{حـ}}{٢ \text{ أ}}$

∴ أ^{٢} + حـ^{٢} − ب^{٢} = حـ^{٢}

∴ أ^{٢} = ب^{٢} ∴ أ = ب

٣٦ (ب)

الحل :

نهـــا [illegible] = [illegible] = [illegible]

ع = √(٢٥ + ٩ − ٢ × ٥ × ٣ جتا ١٢٠°) = ٧ سم

∴ ٣^س = ٢٤ × ٣/٨ = ٩ ∴ س = ٢

∴ −٤ < س < ٦

∴ م.ح =]−٤ ، ٦[

∴ ٢ نق = ٦

٣٨ (د)

الحل :

د (٣⁻) = نهـا_{س ← ٣⁻} (٣ س² + أ س − ٢) = ١٦

∴ ٣ (٣)² + أ (٣) − ٢ = ١٦

∴ أ = −٣

، د (٣⁺) = نهـا_{س ← ٣⁺} (٢ س + ب) = ١٦

∴ ٢ (٣) + ب = ١٦ ∴ ب = ١٠

∴ أ + ب = −٣ + ١٠ = ٧

٣٩ (ب)

الحل :

حـ أ جتا ب + حـ ب جتا أ

= حـ أ × (أ² + حـ² − ب²) / (٢ أ حـ) + حـ ب × (ب² + حـ² − أ²) / (٢ ب حـ)

= ١/٢ (أ² + حـ² − ب² + ب² + حـ² − أ²)

= ١/٢ × ٢ حـ² = حـ²

٤٠ (ب)

الحل :

جا (أ + ب) = جا (١٨٠° − حـ)

∴ جا (أ + ب) = جا حـ

٧ محافظة الدقهلية

١ (د)

الحل :

د (−٢) = ٣^{−٢ + ٢} = ٣⁰ = ١

بوضع ٤ − س ≥ ٠ ∴ س ≤ ٤

∴ مجال د =]−∞ ، ٤]

٣ (أ)

الحل :

∵ أ ء // ب حـ

∴ ق (∠ أ حـ ب) = ق (∠ ء أ حـ) = ٤٠°

∴ Δ أ ب حـ فيه : ٤ / جا ٤٠° = أ حـ / جا ٦٠°

∴ أ حـ = (٤ × جا ٦٠°) / جا ٤٠° ≈ ٥ سم

٤ (د)

٥ (جـ)

الحل :

لو٢ (س − ٥) = ٣ ∴ س − ٥ = ٢³ = ٨

∴ س = ١٣ ∴ م.ح = {١٣}

٦ (ب)

الحل :

(د ∘ ر) (٢) = د (ر (٢)) = د (٢²) = د (٤)

= √(٤ + ٥) = ٣

٧ (ب)

الحل :

نهـا_{س ← ٠} (د (س) − ٤) = نهـا_{س ← ٠} د (س) − نهـا_{س ← ٠} ٤ = ٤ − ٤ = ٠

٨ (أ)

الحل :

٢ نق = ٦√٣ / جا ٦٠° = ١٢ سم

الحل :

٢ س + ٥ = ٧ ومنها ٢ س = ٢

∴ س = ١

أو ٢ س + ٥ = −٧ ومنها ٢ س = −١٢

∴ س = −٦

∴ م.ح = {١ ، −٦}

١٠ (جـ)

١١ (ب)

الحل :

−٩ ≤ ٢ س − ٥ ≤ ٩ ∴ −٤ ≤ ٢ س ≤ ١٤

∴ −٢ ≤ س ≤ ٧ ∴ م.ح = [−٢ ، ٧]

١٢ (جـ)

الحل :

د (٢) = ٤ أ + ٥

د (٢⁺) = نهـا_{س ← ٢⁺} (٩ − ب س) = ٩ − ٢ ب

∴ ٤ أ + ٥ = ٩ − ٢ ب

∴ ٤ أ + ٢ ب = ٤

∴ ٢ أ + ب = ٢

١٣ (جـ)

١٤ (د)

١٥ (أ)

الحل :

ق (∠ حـ) = ١٨٠° − (٥٣° + ٤٧°) = ٨٠°

∴ ١٥ / (جا ٥٣° + جا ٤٧° + جا ٨٠°) = أ ب / جا ٨٠°

∴ أ ب = (١٥ × جا ٨٠°) / (جا ٥٣° + جا ٤٧° + جا ٨٠°) ≈ ٦ سم

الحل

١٧ (جـ)

الحل :

١٨ (جـ)

الحل :

١٩ (د)

الحل :

٢٠ (ب)

الحل

٢١ (أ)

الحل :

$\lim\limits_{س \to ٤} \frac{\text{حا}(س - ٤)}{(س - ٤)} \times \lim\limits_{س \to ٤} \frac{١}{س + ٤}$

$= ١ \times \frac{١}{٤ + ٤} = \frac{١}{٨}$

٢٢ (جـ)

الحل :

$\text{لو}_٣ س - \frac{٢}{\text{لو}_٣ س} = ١$ ، بالضرب × لو٣ س

$\therefore (\text{لو}_٣ س)^٢ - ٢ = \text{لو}_٣ س$

$\therefore (\text{لو}_٣ س)^٢ - \text{لو}_٣ س - ٢ = ٠$

$\therefore (\text{لو}_٣ س - ٢)(\text{لو}_٣ س + ١) = ٠$

$\therefore \text{لو}_٣ س = ٢$ ومنها $س = ٣^٢ = ٩$

، $\text{لو}_٣ س = -١$ ومنها $س = ٣^{-١} = \frac{١}{٣}$

م.ح = $\{٩ ، \frac{١}{٣}\}$

٢٣ (ب)

الحل :

∵ د ، ى كلًا منها دالة عكسية للأخرى

$\therefore (د \circ ى)(س) = س$

$\therefore د(٢س + ٣) = س$

$\therefore ٤(٢س + ٣) - ١٢ = س$

$\therefore ٤ ٢س + ١٢ - ١٢ = س$

$\therefore ٤ ٢ = ١$ $\therefore ٢ = \frac{١}{٤}$

٢٤ (د)

الحل :

$\lim\limits_{س \to \infty} \frac{٢ + \frac{٥}{س}}{\frac{٧}{س} - ٢} = ٣$

$\therefore -\frac{٢}{٢} = ٣$ $\therefore ٢ = ٦$

٢٥ (أ)

الحل :

$-\frac{١}{٢} = \text{لو}_٨ (١ - \frac{١}{٤} ٢)$

$\therefore ١ - \frac{١}{٤} ٢ = ٨^{-\frac{١}{٢}}$ $\therefore ١ - \frac{١}{٤} ٢ = \frac{١}{٢}$

$\therefore \frac{١}{٤} ٢ = \frac{١}{٢}$ $\therefore ٢ = ٢$

٢٦ (أ)

الحل :

$٥ - س > ٠$ $\therefore س < ٥$

$\therefore س \in]-\infty ، ٥[$

، $س > ٠$ ، $س \neq ١$

$\therefore س \in]٠ ، \infty[- \{١\}$

$\therefore$ مجال د $=]-\infty ، ٥[\cap]٠ ، \infty[- \{١\}$

$=]٠ ، ٥[- \{١\}$

٢٧ (جـ)

الحل :

$٣^{٢س} - ٨ \times ٣^س - ٣^٢ = ٠$

$\therefore ٣^{٢س} - ٨ \times ٣^س - ٩ = ٠$

$\therefore (٣^س - ٩)(٣^س + ١) = ٠$

$\therefore ٣^س = ٩$ ومنها $س = ٢$

، $٣^س = -١$ (مرفوضة)

٢٨ (د)

الحل :

بفرض أن قياس أكبر زاوية يساوى θ وهى الزاوية المقابلة لأكبر ضلع الذى طوله ٧ سم

$\therefore \text{حتا}\,\theta = \frac{٣^٢ + ٥^٢ - ٧^٢}{٢ (٣)(٥)} = -\frac{١}{٢}$

$\therefore \theta = ١٢٠^\circ$

٢٩ (جـ)

الحل :

$\lim\limits_{س \to ٠} \left(\frac{٢^٢ س^٢ - ٢ س}{س^٢} - \frac{٢٥}{س}\right) = -١$

$\therefore ٢^٢ - ٢ ٢ + ١ = ٠$ $\therefore (٢ - ١)^٢ = ٠$

$\therefore ٢ = ١$

٣٠ (جـ)

الحل :

$\sqrt{(س + ٢)^٢} \geq ٧$ $\therefore |س + ٢| \geq ٧$

$\therefore س + ٢ \geq ٧$ $\therefore س \geq ٥$

، $س + ٢ \leq -٧$ $\therefore س \leq -٩$

$\therefore$ م.ح $= ح -]-٩ ، ٥[$

٣١ (أ)

الحل :

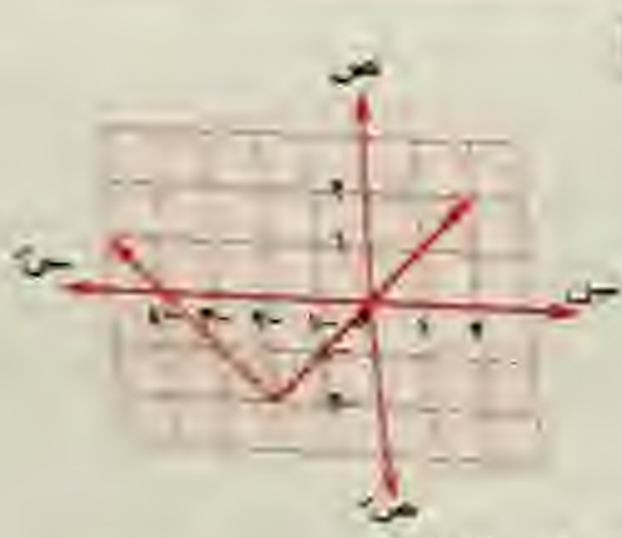
$\lim\limits_{س \to \infty} \frac{\sqrt[٣]{٨س^٣ + ٥س}}{س + ٦}$

(بقسمة البسط والمقام على $س = \sqrt[٣]{س^٣}$)

$= \lim\limits_{س \to \infty} \frac{\sqrt[٣]{٨ + \frac{٥}{س^٢}}}{١ + \frac{٦}{س}} = \frac{\sqrt[٣]{٨}}{١} = ٢$

٣٢ (د)

الحل :



من التمثيل البيانى للدالة

المساحة $= \frac{١}{٢} \times ٤ \times ٢ = ٤$ وحدة مساحة

(أ)

الحل

[illegible]

∴ عدد الحلول = صفر

(أ)

الحل

$\lim = \ldots = \lim \frac{١ - \ldots}{س} =$ صفر

(د)

(ب)

الحل

بفرض أن ق(∠أ) = ٢ ل

، ق(∠ب) = ٣ ل ، ق(∠حـ) = ٤ ل

∴ ٢ ل + ٣ ل + ٤ ل = ١٨٠°

∴ ٩ ل = ١٨٠°

∴ ل = ٢٠°

∴ ق(∠أ) = ٤٠° ، ق(∠ب) = ٦٠°

، ق(∠حـ) = ٨٠° $\therefore \frac{١٢}{\text{جا}\,٨٠^\circ} = \frac{\text{أحـ}}{\text{جا}\,٦٠^\circ}$

$\therefore \text{أحـ} = \frac{١٢ \times \text{جا}\,٦٠^\circ}{\text{جا}\,٨٠^\circ} = ١١$ سم

(ب)

الحل :

∵ د دالة فردية

∴ د(−س) = −د(س)

المقدار = $\frac{٦ د(س) - ٨ د(س)}{-٣ د(س)} = \frac{-٦ د(س)}{٣ د(س)} = ...$

الحل:

$$د(-٣) = \lim_{س \to -٣} \frac{س^٢ + ٢ س - ٣}{س + ٣}$$

$$= \lim_{س \to -٣} \frac{(س + ٣)(س - ١)}{(س + ٣)} = -٤$$

$$د(-٣^+) = \lim_{س \to -٣^+} (س + أ) = -٣ + أ$$

$$\because د(-٣^-) = د(-٣^+)$$

$\therefore -٤ = -٣ + أ$ $\qquad$ $\therefore أ = -١$

(جـ)

الحل:

$$\lim \frac{س^٥ - (-٢)^٥}{س^٣ - (-٢)^٣} = \frac{٥}{٣} \times (-٢)^٢ = -١٤$$

(ب)

الحل:

$\therefore$ محيط $\square$ أ ب جـ د = ٢ (٨ + ٥) = ٢٦ سم

٨

(أ)

(د)

الحل:

$\therefore$ مجال د = ع - [٢ ، ٣[

(جـ)

الحل:

الحل:

بقسمة البسط والمقام على س

$$\therefore \lim \frac{أ + \frac{٦}{س}}{٢ + \frac{٢}{س}} = ٤$$

$\therefore \frac{أ}{٢} = ٤$ $\qquad$ $\therefore أ = ٨$

(أ)

الحل:

$$د(-س) = \frac{جا(-س)}{-س} = \frac{-جا س}{-س} = \frac{جا س}{س} = د(س)$$

$\therefore$ د دالة زوجية.

(ب)

(ب)

الحل:

$$جتا \theta = \frac{٣^٢ + ٥^٢ - ٧^٢}{٢ (٣)(٥)} = \frac{-١}{٢}$$

$\therefore \theta = ١٢٠°$ $\qquad$ $\therefore$ قياس أكبر زاوية = ١٢٠°

(د)

الحل:

(د)

الحل:

(ب)

الحل:

(جـ)

الحل:

(ب)

الحل:

(أ)

الحل:

$\therefore$ مجموعة الحل = ع - {٢}

(أ)

الحل:

$\therefore$ عدد الحلول = ١

(جـ)

الحل:

(ب)

(ب)

الحل:

(جـ)

الحل:

(جـ)

الحل:

(د)

الحل:

(جـ)

الحل:

(د)

الحل:

٢٦ (ب)

٢٧ (جـ)

الحل :

$\frac{س}{جا س} = ٢$ نق (بضرب الطرفين × ٢)

∴ $\frac{٢ س}{جا س} = ٤$ نق

٢٨ (أ)

الحل :

$\underset{س \to ٠}{نهـــا} \frac{جا^٢ ٢ س}{س^٢} = \underset{س \to ٠}{نهـــا} (٢ أ + ٣ جتا س)$

∴ $٤ = ٢ أ + ٣$ ∴ $٢ أ = ١$ ∴ $أ = \frac{١}{٢}$

٢٩ (جـ)

الحل :

س > ٠ ∴ س ∈]٠ ، ∞[

، ١ − س > ٠ ∴ س < ١

∴ س ∈]−∞ ، ١[

، ١ − س ≠ ١ ∴ س ≠ ٠

∴ مجال د =]٠ ، ∞[∩]−∞ ، ١[=]٠ ، ١[

∴ ٠ < س < ١

٣٠ (أ)

الحل :

$\underset{س \to ٠}{نهـــا} \frac{٥ س}{جا ٢ س} = \frac{٥}{٢}$

٣١ (د)

٣٢ (أ)

الحل :

$\frac{لو ٦٤}{لو ٨} = \frac{لو ٨^٢}{لو ٨} = \frac{٢ لو ٨}{لو ٨} = ٢$

٣٣ (ب)

٣٤ (أ)

الحل :

$٢ نق = \frac{٧}{جا ٣٠°} = ١٤$ سم

٣٥ (د)

الحل :

$د(٣) = \underset{س \to ٣}{نهـــا} د(س)$

∴ $٢ أ = \underset{س \to ٣}{نهـــا} \frac{س^٢ - ٣^٢}{س - ٣}$

∴ $٢ أ = ٢ × ٣$ ∴ $أ = ٣$

٣٦ (د)

الحل :

لو ٥ س = ٢ ∴ ٥ س = $١٠^٢$ = ١٠٠

∴ س = ٢٠

٣٧ (د)

الحل :

بفرض أن : $س^٢ + ك س + م = (س + ١)(س + أ)$

∴ $\underset{س \to -١}{نهـــا} \frac{(س + ١)(س + أ)}{(س + ١)(س - ١)} = ٣$

∴ $\frac{-١ + أ}{-١ - ١} = ٣$ ∴ أ = −٥

∴ $س^٢ + ك س + م = (س + ١)(س - ٥)$

$= س^٢ - ٤ س - ٥$

∴ ك = −٤ ، م = −٥ ∴ ك + م = −٩

٣٨ (جـ)

٣٩ (جـ)

الحل :

$جـ = ٥٠٠٠ (١ + ٠,٠٠٥)^٧ = ٧٠٣٥,٥$ جنيه

٤٠ (أ)

الحل :

∵ د متصلة عند س = ٢

∴ $\underset{س \to ٢^-}{نهـــا} د(س) = \underset{س \to ٢^+}{نهـــا} د(س)$ ∴ ل = م

∴ $ل^٢ + م^٢ - ٢ ل م = ل^٢ + ل^٢ - ٢ ل^٢ =$ صفر

٩ محافظة كفر الشيخ

١ (ب)

٢ (جـ)

الحل :

$(د \circ ر)(س) = د(ر(س)) = \sqrt{\sqrt{٦ - س} - ٢}$

بوضع ٦ − س ≥ ٠ ∴ س ≤ ٦

∴ $م_١ =]-∞ ، ٦]$

، بوضع $\sqrt{٦ - س} - ٢ ≥ ٠$

∴ $\sqrt{٦ - س} ≥ ٢$

∴ ٦ − س ≥ ٤

∴ س ≤ ٢

∴ $م_٢ =]-∞ ، ٢]$

∴ مجال د ∘ ر =]−∞ ، ٦] ∩]−∞ ، ٢]

=]−∞ ، ٢]

٣ (ب)

الحل :

$\underset{س \to ٢}{نهـــا} \frac{(س^٢ + ٥)(س^٢ - ٤)}{س - ٢}$

$= \underset{س \to ٢}{نهـــا} \frac{(س^٢ + ٥)(س - ٢)(س + ٢)}{(س - ٢)}$

$= (٤ + ٥)(٢ + ٢) = ٣٦$

٤ (د)

الحل :

$\underset{س \to -٤}{نهـــا} \frac{٣(س^٢ - ١٦)}{س + ٤}$

$= \underset{س \to -٤}{نهـــا} \frac{٣(س - ٤)(س + ٤)}{(س + ٤)}$

$= ٣(-٤ - ٤) = -٢٤$

٥ (د)

الحل :

$\frac{ع}{جا ع} = ٢$ نق ∴ $\frac{نق}{جا ع} = ٢$ نق

∴ جا ع = $\frac{١}{٢}$ ∴ ق(∠ ع) = ٣٠° أو ١٥٠°

٦ (أ)

الحل :

$٣^{س - ١ - ٢} = ٨١$

∴ $٣^{س - ٣} = ٣^٤$ ∴ س − ٣ = ٤

∴ س = ٧ ∴ م.ح = {٧}

٧ (ب)

الحل :

$د(س) = \frac{٢ س - ٢ + ١}{س - ١} = ٢ + \frac{١}{س - ١}$

∴ نقطة التماثل للدالة د = (١ ، ٢)

∴ الدالة د تناقصية فى]−∞ ، ١[،]١ ، ∞[

٨ (جـ)

الحل :

∆ أ ب جـ فيه : ق(∠ أ) = ١٨٠° − (٦٠° + ٦٥°) ...

∴ ب جـ = ... = ٢٢ سم

الحل :

حـ = ٥٠٠٠ (١ + ٠,٠٥)^٧ = ٧٠٣٥,٥ جنيه

٢٢ (ب)

= نهـا (س + ٥) (س − ٢) (س + ٢) / (س − ٢)

= (٤ + ٥) (٢ + ٢) = ٣٦

Δ ١ ب ء فيه : ق(د ١) = ١٨٠° − (٥٠° + ٦٥°) = ٦٥°

∴ ب ١ = ب ء = ٢٢ سم

Δ ب ء حـ فيه

حتا (د ء ب حـ) = ((٢٢)^٢ + (٢٥)^٢ − (١٨)^٢) / (٢ (٢٢) (٢٥)) = ١٥٧ / ٢٢٠

∴ ق (د ء ب حـ) = ٤٤ َ ٢٨ ° ٩

٩ (جـ)

الحل :

نهـا (س ← ٢) (س^٢ − ٢^٢) / (س^٥ − ٢^٥) = ٢/٥ × ٢^−٣ = ١/٢٠

١٠ (أ)

الحل :

نهـا (س ← ١) (٢ − √(س^٢ + ٣)) / (١ − س) × (٢ + √(س^٢ + ٣)) / (٢ + √(س^٢ + ٣))

= نهـا (س ← ١) (٤ − س^٢ − ٣) / ((١ − س) (٢ + √(س^٢ + ٣)))

= نهـا (س ← ١) (١ − س) (١ + س) / ((١ − س) (٢ + √(س^٢ + ٣))) = ٢ / (٢ + ٢) = ١/٢

١١ (د)

١٢ (د)

١٣ (أ)

الحل :

م = ١/٢ نهـا (س ← ٠) ((س + ٢)^٦ − ٢^٦) / س

= ١/٢ × ٦ × ٢^٥ = ٩٦

١٤ (جـ)

الحل :

بقسمة البسط والمقام على س^٤

نهـا (س ← ∞) (س^٢ − ٢/س) / (٢ − ٣/س^٢ − ٢/س^٤) = ∞/٢ = ∞

١٥ (د)

الحل :

ق (د ع) = ١٨٠° − (٨٠° + ٦٠°) = ٤٠°

∴ سَ / حا ٨٠° = ١٠ / حا ٤٠°

∴ سَ = (١٠ × حا ٨٠°) / حا ٤٠° ≈ ١٥ سم

١٦ (د)

الحل :

Δ س ص ع فيه :

ق (د س) + ق (د ص) + ق (د ع) = ١٨٠°

∴ ق (د س) + ق (د ص) = ١٨٠° − ق (د ع)

∴ حتا (س + ص) = − حتا ع

∴ ٢ سَ صَ حتا (س + ص) = ٢ سَ صَ × (− حتا ع)

= − ٢ سَ صَ × (سَ^٢ + صَ^٢ − عَ^٢) / (٢ سَ صَ)

= عَ^٢ − سَ^٢ − صَ^٢

١٧ (د)

الحل :

نهـا (س ← ١) (٢ س − √س) = ٢ (١) − √١ = ١

١٨ (أ)

الحل :

نهـا (س ← ٠) حا س (١ − حتا س) / س^٢

= نهـا (س ← ٠) حا س / س × نهـا (س ← ٠) (١ − حتا س) / س = ١ × ٠ = ٠

١٩ (د)

الحل :

|س| − ٢ س = ٨

∴ |س| = ٢ س + ٨

∴ عندما س ≥ ٠ يكون ٢ س + ٨ = س

ومنها س = −٨ (مرفوض)

∴ عندما س < ٠ يكون ٢ س + ٨ = − س

ومنها س = −٢

∴ م.ح = {−٢}

٢٠ (ب)

الحل :

٢^(س − ١) = ٤٤ ∴ ٢^(س − ١) / ٢ = ٤٤/٢

∴ ٢^(س − ٢) = ٢٢

٢١ (ب)

الحل :

٧^(س^٢) = ٧^(٢ س + ٨) ∴ س^٢ = ٢ س + ٨

∴ س^٢ − ٢ س − ٨ = ٠

∴ (س − ٤) (س + ٢) = ٠

∴ س = ٤ أو س = −٢

∴ م.ح = {٤ ، −٢}

٢٢ (د)

٢٣ (جـ)

الحل :

مساحة Δ ١ ب حـ = ١/٢ × ٦ × ١٢ × حا ٣٠° = ١٨ سم^٢

٢٤ (ب)

الحل :

عند س = ١ يكون س^٢ − ٧ س + م = ٠

∴ ١ − ٧ + م = ٠ ∴ م = ٦

٢٥ (د)

الحل :

بقسمة البسط والمقام على س = √(س^٣)

نهـا (س ← ∞) ∛(٦٤ + ٧/س^٢ − ٢/س^٣) / (٣ + ٢/س) = ∛٦٤ / ٣ = ٤/٣

٢٦ (جـ)

الحل :

باستخدام القسمة المطولة أو التركيبية نجد أن

٢ س^٣ + ٣ س^٢ + ٤ = (س + ٢) (٢ س^٢ − س + ٢)

∴ نهـا (س ← −٢) (س + ٢) (٢ س^٢ − س + ٢) / ((س + ٢) (س^٢ − ٢ س + ٤))

= (٨ + ٢ + ٢) / (٤ + ٤ + ٤) = ١٢/١٢ = ١

٢٧ (جـ)

الحل :

∵ أ / حا ١ = حـ / حا حـ = ٢ نق

∴ أ = ٢ نق حا ١ ، حـ = ٢ نق حا حـ

∴ أ/حـ × حا حـ / حا ١ = (٢ نق حا ١) / (٢ نق حا حـ) × حا حـ / حا ١ = ١

٢٨ (د)

٢٩ (ب)

الحل :

∵ ص = ٢ س + ب بتبديل المتغيرات

∴ س = ٢ ص + ب ∴ ٢ ص = س − ب

∴ ص = ١/٢ س − ١/٢ ب

∴ ١/٢ س − ١/٢ ب = حـ س + ٣

∴ حـ = ١/٢ ، −١/٢ ب = ٣

∴ ب = −٦ ∴ ب × حـ = ١/٢ × −٦ = −٣

٣٠ (أ)

الحل :

٥ = لو_ب ٣٢ ∴ ب^٥ = ٣٢ ∴ ب = ٢

٣١ (جـ)

الحل :

−٣ ≥ ٢ س − ١ ≥ ٣ ∴ −٢ ≥ ٢ س ≥ ٤

∴ −١ ≥ س ≥ ٢ ∴ م.ح = [−١ ، ٢]

٣٢ (د)

الحل :

∴ د س منفرجة ، سَ < صَ

∴ الشروط لا تحقق وجود أى مثلث.

٣٣ (أ)

الحل :

نهــا س ← ٣ $\frac{(س - ٣)(س - ٤)}{(س - ٣)}$ = ٣ − ٤ = −١

٣٤ (د)

٣٥ (جـ)

الحل :

∵ ٥^س = ١٧ ∴ لو ٥^س = لو ١٧

∴ س لو ٥ = لو ١٧ ∴ س = $\frac{لو ١٧}{لو ٥}$ = لو$_٥$ ١٧

٣٦ (جـ)

الحل :

٢ لو س − (لو س)^٢ = ٠

∴ لو س (٢ − لو س) = ٠

∴ لو س = ٠ ومنها س = ١٠^٠ = ١

، لو س = ٢ ∴ س = ١٠^٢ = ١٠٠

∴ م . ح = {١ ، ١٠٠}

٣٧ (ب)

الحل :

حـ = $\sqrt{٨^٢ + ٥^٢ − ٢ (٨) (٥) (حتا ٦٠°)}$ = ٧ سم

حتا أ = $\frac{٥^٢ + ٧^٢ − ٨^٢}{٢ (٥) (٧)}$ = $\frac{١}{٧}$

∴ ق (∠ أ) = ٨١° ٤٧َ ١٢

٣٨ (د)

الحل :

٣^{−س} = ٩ ∴ ٣^{−س} = ٣^٢ ∴ س = −٢

∴ نقطة التقاطع (−٢ ، ٩)

٣٩ (جـ)

٤٠ (د)

الحل :

(لو$_٢$ س)^٢ − ٢ لو$_٢$ س − ٣ = ٠

∴ (لو$_٢$ س − ٣) (لو$_٢$ س + ١) = ٠

∴ لو$_٢$ س = ٣ ∴ س = ٢^٣ = ٨

، لو$_٢$ س = −١

∴ س = ٢^{−١} = $\frac{١}{٢}$

١٠ محافظة المنيا

١ (جـ)

٢ (جـ)

٣ (ب)

٤ (ب)

الحل :

∵ نقطة تقاطع منحنى الدالة د مع منحنى الدالة د^{−١} تقع على المستقيم ص = س

∴ ٢ ك − ٣ = ك ∴ ك = ٣

٥ (ب)

٦ (د)

الحل :

نهــا س ← ∞ $\frac{س^٢ + ٥}{٦}$ = $\frac{∞ + ٥}{٦}$ = ∞

٧ (أ)

الحل :

نهــا س ← ٣ $\frac{(س - ٣)(س + ٢)}{(س + ٤)(س - ٣)}$ = $\frac{٣ + ٢}{٣ + ٤}$ = $\frac{٥}{٧}$

٨ (أ)

الحل :

∵ د متصلة عند س = أ

∴ د (أ) = نهــا س ← أ د (س)

∴ ٢٠٠ = نهــا س ← أ $\frac{س^٨ − أ^٨}{س^٥ − أ^٥}$

∴ ٢٠٠ = $\frac{٨}{٥}$ × أ^٣ ∴ أ^٣ = ١٢٥ ∴ أ = ٥

٩ (أ)

الحل :

∵ $\frac{صَ}{جا ص}$ = ٢ نق ∴ $\frac{صَ}{٢ جا ص}$ = نق

١٠ (جـ)

الحل :

بالقسمة على ١٢

∴ $\frac{٦ أ}{١٢}$ = $\frac{٤ ب}{١٢}$ = $\frac{٣ حـ}{١٢}$ ∴ $\frac{أ}{٢}$ = $\frac{ب}{٣}$ = $\frac{حـ}{٤}$

وبفرض أن : أ = ٢ ك ، ب = ٣ ك ، حـ = ٤ ك

، ∵ أ طول أصغر الأضلاع

∴ ق (∠ أ) هى قياس أصغر الزوايا

∴ حتا أ = $\frac{ب^٢ + حـ^٢ − أ^٢}{٢ ب حـ}$

= $\frac{٩ ك^٢ + ١٦ ك^٢ − ٤ ك^٢}{٢ (٣ ك) (٤ ك)}$ = $\frac{٧}{٨}$

∴ ق (∠ أ) = ٢٨° ٥٧َ

١١ (أ)

الحل :

(د ∘ ر) (س) = د (ر (س)) = د (س^٢)

= ...

١٢ (د)

١٣ (ب)

الحل

بوضع س − ٢ = ٠ ∴ س = ٢

∴ مجموعة أصفار الدالة ص = {٢}

مجال $\frac{ص}{ع}$ = [...] − {٢}

= [−١ ، ٥] − {٢}

١٤ (أ)

١٥ (ب)

١٦ (د)

الحل :

د ($\frac{π}{٢}$^+) = نهــا س ← $\frac{π}{٢}$ ظا (π − س) = ظا (π − $\frac{π}{٢}$)

= ظا ($\frac{π}{٢}$) = ١

، د ($\frac{π}{٢}$^−) = نهــا س ← $\frac{π}{٢}$ $\frac{ظا س}{π − ٢ س}$

= نهــا ($\frac{π}{٢}$ − س) ← ٠ $\frac{ظا (\frac{π}{٢} − س)}{٢ (\frac{π}{٢} − س)}$ = $\frac{١}{٢}$

∴ د ($\frac{π}{٢}$^+) ≠ د ($\frac{π}{٢}$^−)

∴ نهــا س ← $\frac{π}{٢}$ د (س) غير موجودة.

١٧ (جـ)

الحل :

نهــا س ← $\frac{π}{٤}$ $\frac{ظا س}{س}$ = $\frac{ظا \frac{π}{٤}}{\frac{π}{٤}}$ = $\frac{٤}{π}$

١٨ (جـ)

الحل :

[illegible]

(د)

الحل :

٢ نق = $\frac{١٠\sqrt{٣}}{حا ٦٠°}$ = ٢٠ سم

(أ)

الحل :

$\frac{حا أ}{٣} = \frac{حا ب}{\frac{٥}{٢}} = \frac{حا حـ}{٤}$

∴ أ : ب : حـ = ٣ : $\frac{٥}{٢}$: ٤ = ٦ : ٥ : ٨

(د)

(أ)

الحل :

∵ د دالة فردية ∴ د (− ٢) = − د (٢)

∴ د (٢) + د (− ٢) = د (٢) − د (٢) = صفر

(جـ)

الحل :

نهــا $\frac{حا ٢س}{٤س}$ × نهــا $\frac{ظا ٣س}{س}$ = $\frac{٢}{٤}$ × ٣ = $\frac{٣}{٢}$

(جـ)

الحل :

س$^{\frac{١}{٦}}$ = ٢$^{\frac{١}{٢}}$ × ٣$^{\frac{١}{٣}}$ ∴ س = (٢$^{\frac{١}{٢}}$ × ٣$^{\frac{١}{٣}}$)^{٦}

∴ س = ٢^{٣} × ٣^{٢} = ٨ × ٩ = ٧٢

(جـ)

الحل :

∵ لو (س + ١١) = ٢

∴ س + ١١ = ١٠^{٢} = ١٠٠

∴ س = ١٠٠ − ١١ = ٨٩

(أ)

(د)

الحل :

نهــا $\frac{(\sqrt[م]{س} - ١)}{(\sqrt[ن]{س} - ١)}$ = نهــا $\frac{س^{\frac{١}{م}} - ١^{\frac{١}{م}}}{س^{\frac{١}{ن}} - ١^{\frac{١}{ن}}}$

= ($\frac{١}{م}$ ÷ $\frac{١}{ن}$) × ١$^{(\frac{١}{م} - \frac{١}{ن})}$ = $\frac{ن}{م}$

(ب)

الحل :

نهــا د (س) = نهــا (٢س − ١) = ٢ (٣) − ١ = ٥

(جـ)

(جـ)

الحل :

أحـ = $\sqrt{٨^{٢} + ٦^{٢}}$ = ١٠ سم

٢٠ء = $\sqrt{١٠^{٢} + ٥^{٢} - ٢ (١٠) (٥) جتا ٦٠°}$ = ٥$\sqrt{٣}$ سم

∴ Δ أءحـ فيه : $\frac{٥\sqrt{٣}}{حا ٦٠°}$ = ٢ نق

∴ نق = ٥ سم

∴ مساحة الدائرة المارة برؤوس Δ أءحـ = ٢٥ π سم^{٢}

(جـ)

(ب)

(جـ)

الحل :

∵ س ∈ [−١ ، ٤] ∴ −١ ≤ س ≤ ٤

∴ −٢ ≤ ٢س ≤ ٨ ∴ −٥ ≤ ٢س − ٣ ≤ ٥

∴ |٢س − ٣| ≤ ٥

(جـ)

الحل :

المقدار = $\frac{لو ٢^{٣}}{لو (٤ × ٣)}$ = $\frac{لو ٨}{لو ١٢}$ = لو$_{١٢}$ ٨

(جـ)

(ب)

الحل :

٢ + لو٣ س = [illegible]

∴ لو٣ س = [illegible] ∴ س = [illegible]

(جـ)

الحل :

نهــا [illegible]

= نهــا [illegible]

= [illegible]

(أ)

الحل :

نهــا د (س) = نهــا [illegible]

= ٥ + ٥ = ١٠

∴ د متصلة عند س = ٥ إذا كان د (٥) = ١٠

(جـ)

الحل

[illegible]

∴ [illegible] سم

(٢)

الحل

حـ = [illegible] سم